A. A. Davydov, T. S. Shutkina, Uniqueness of a cycle with discounting that is optimal with respect to the average time profit, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, Volume 17, Number 2, 80–87

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.187.58

April 26, 2023, 16:43:07

УДК 517.977.1

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЦИКЛА С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ, ОПТИМАЛЬНОГО ПО СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЕ¹

А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина

В работе для циклических процессов, моделируемых периодическими движениями непрерывной управляемой системы на окружности, доказана теорема единственности цикла, доставляющего максимальную среднюю временную выгоду за один период при наличии дисконтирования при условии, что минимальная и максимальная скорости движения системы совпадают лишь в отдельных точках, а плотность выгоды является дифференцируемой функцией с конечным числом критических точек. Эта теорема — аналог теоремы В.И. Арнольда о единственности такого цикла в случае, когда дисконтирование собираемой вдоль цикла выгоды отсутствует.

Ключевые слова: усредненная оптимизация, периодический процесс, необходимое условие оптимальности, дисконтирование.

A. A. Davydov, T. S. Shutkina. Uniqueness of a cycle with discounting that is optimal with respect to the average time profit.

For cyclic processes modeled by periodic motions of a continuous control system on a circle, we prove the uniqueness of a cycle maximizing the average one-period time profit in the case of discounting provided that the minimum and maximum velocities of the system coincide at some points only and the profit density is a differentiable function with a finite number of critical points. The uniqueness theorem is an analog of Arnol'd's theorem on the uniqueness of such a cycle in the case when the profit gathered along the cycle is not discounted.

Keywords: average optimization, periodic process, necessary optimality condition, discounting.

1. Введение

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности. Эта система задается полем скоростей v , гладко зависящим от точки x окружности и управляющего параметра u . Предполагается, что параметр u пробегает гладкое компактное многообразие (или объединение таковых) и принимает не менее двух различных значений, а все допустимые скорости положительные, т. е. $v > 0$.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение $x: t \mapsto x(t)$ отрезка временной оси в фазовое пространство, в точках дифференцируемости которого его производная лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей этой точки. В силу положительности скоростей системы любое ее допустимое движение, определенное при всех временах, совершает вращение на окружности в одном направлении.

Циклическим движением или просто *циклом* с периодом T , $T > 0$, называют периодическое допустимое движение x , $x(t + T) \equiv x(t)$. При наличии непрерывной *плотности выгоды* f на окружности возникает задача выбора циклического процесса с максимальной средней временной выгодой за один оборот

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \longrightarrow \max.$$

В.И. Арнольд показал, что в этом случае оптимальная стратегия существует и устроена просто — соответствующее ей движение использует максимальные и минимальные допустимые

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-91004-АНФ-а) и АВЦП РНПВШ (проект 2.1.1/5568).

скорости на участках, где плотность выгоды меньше или больше максимальной средней временной выгоды за цикл [1–4].

В частности, когда плотность выгоды дифференцируема и имеет лишь конечное число критических точек, то движение вдоль оптимального цикла и сам цикл определены однозначно. Действительно, в этом случае любой уровень плотности состоит из конечного числа точек, вне которых выбор скорости движения по оптимальному циклу однозначен, а выбор скорости движения в самих точках не влияет на движение по циклу.

В этой работе получен аналогичный результат для циклов при наличии положительного дисконта σ , $\sigma > 0$: доказана единственность оптимального цикла в задаче

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-\sigma t} f(x(t)) dt \longrightarrow \max \quad (1.1)$$

при разумных ограничениях на управляемую систему и плотность выгоды.

2. Существование оптимальной стратегии

Здесь для полноты изложения мы приводим полученные в [5, 6] теорему существования оптимального цикла с дисконтированием по критерию средней временной выгоды и соответствующее необходимое условие экстремума.

2.1. Переформулировка проблемы

Следуя В.И. Арнольду [1], для допустимого движения x определим плотность ρ , $\rho(x(t)) = 1/\dot{x}(t)$. В силу абсолютной непрерывности допустимого движения эта плотность определена почти всюду, а в остальных точках за ее значение можно выбрать любое возможное. Таким образом, почти всюду мы имеем $dx(t) = \dot{x}(t)dt$ или $dt = \rho(x(t))dx(t)$. С этой плотностью задача (1.1) может быть переписана в виде

$$A_\rho(f) := \frac{\int_0^{2\pi} f(x) d(e^{-\sigma\phi(x)})}{-\sigma \int_0^{2\pi} d(\phi(x))} \longrightarrow \max, \quad (2.1)$$

где $\phi(x) = \int_0^x \rho(z)dz$, а интегралы в (2.1) являются интегралами Римана — Стильеса. Теперь для решения задачи нужно найти измеримую плотность ρ (или соответствующую функцию ϕ), доставляющую максимум функционала в (2.1) и удовлетворяющую ограничениям

$$r_1 \leq \rho \leq r_2. \quad (2.2)$$

Здесь r_1 и r_2 — положительные функции, обратные значениям максимума и минимума допустимой скорости соответственно, а 0 и 2π — это начальная и конечная точки цикла. Измеримую плотность, удовлетворяющую ограничениям (2.2), будем называть *допустимой*.

2.2. Теорема существования и условие экстремума

Теорема 1. Для непрерывных плотности выгоды f и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, существует допустимая плотность, доставляющая точную верхнюю грань значений функционала в (2.1) по всем допустимым плотностям.

Эта теорема доказана в [5,6], где также получено следующее необходимое условие экстремума.

Теорема 2. Если для непрерывных плотности выгоды f и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, допустимая плотность ρ доставляет максимум A функционала в (2.1), то в любой точке x , где эта плотность является производной от своего интеграла и $r_1(x) \neq r_2(x)$, значение $S(x)$ функции

$$S(x) = e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - A \quad (2.3)$$

является неположительным, неотрицательным либо равным нулю, если $\rho(x)$ принимает значение $r_1(x)$ или $r_2(x)$ либо принадлежит интервалу $(r_1(x), r_2(x))$ соответственно.

Функция S играет роль функции переключения. В [5,6] ее значение получено прямыми вычислениями изменения средней временной выгоды при вариации допустимой плотности ρ на величину h на отрезке $[x, x + \nu]$ при $x \in (0, 2\pi)$ (при граничных x рассуждения аналогичны) и достаточно малом $\nu > 0$. Это изменение имеет вид

$$\frac{h\nu}{T} \left[e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - A \right] + \dots, \quad (2.4)$$

где $A = A_\rho(f)$ и T — период исходного цикла, а многоточие означает члены более высокого порядка по h и ν .

Таким образом, для малых h и $\nu > 0$ ($|h| = \nu$) знак полученной разности определяется знаками h и выражения, стоящего в квадратных скобках, так как значения периода T и ν положительные. Для оптимальной плотности ρ это значение должно быть неположительное. Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках, неположительно, неотрицательно или равно нулю, если значение $\rho(x)$ равно r_1, r_2 либо принадлежит интервалу (r_1, r_2) соответственно, так как в этих случаях h может принимать любые достаточно малые неотрицательные, неположительные и произвольные значения соответственно.

Нетрудно видеть, что функцию переключения можно переписать в виде

$$e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) + \sigma \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - \sigma P - A, \quad (2.5)$$

где

$$P = \int_0^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy$$

есть выгода вдоль цикла. Отметим, что при $\sigma = 0$ функция переключения та же, что и в случае без дискаунта [1–4].

В новой форме функции переключения величина $-\sigma P - A$ нам неизвестна, но на оптимальном цикле она равна некоторой константе. После выбора значения c этой константы функция переключения примет вид

$$e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) + \sigma \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy + c. \quad (2.6)$$

Эта функция однозначно определяет допустимое движение с вычислением точек переключения по ходу движения как нулей этой функции, если у этой функции конечное число критических точек. Но в этой форме функция переключения дифференцируема, если плотность выгоды дифференцируема, и имеет производную

$$S'(x) = e^{-\sigma \phi(x)} f'(x), \quad x \in [0, 2\pi).$$

В этом случае число критических точек у функции переключения то же, что и у плотности выгоды, а значит, число точек переключения может быть больше числа критических точек плотности выгоды не более, чем на единицу.

Цикл, доставляемый таким допустимым движением с точками переключения в нулях функции (2.6), будем называть *циклом уровня c* , а само c — *уровнем* этого цикла.

Отметим также, что (любой) оптимальный цикл является циклом некоторого уровня.

Для дифференцируемой плотности выгоды функцию переключения можно записать в виде

$$f(0) + \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f'(y) dy - \sigma P - A, \quad (2.7)$$

проинтегрировав по частям (2.5).

3. Единственность оптимального цикла

Здесь мы сначала устанавливаем определенную сбалансированности цикла с максимальной средней временной выгодой, а затем формулируем и доказываем теорему о его единственности.

3.1. Сбалансированности оптимального цикла

Теорема 3. *Для положительной (отрицательной) непрерывной плотности выгоды и непрерывных положительных функций r_1, r_2 , $r_1 \leq r_2$, совпадающих не более, чем в конечном числе точек, движение с минимальной (соответственно максимальной) скоростью не доставляет максимума средней временной выгоды.*

Доказательство. Допустим противное, что при $f > 0$ либо $f < 0$ движение с минимальной либо максимальной скоростью соответственно доставляет максимум средней временной выгоды. По теореме о среднем значении интеграла имеем

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-\sigma \phi(x)} f(x) r_j(x) dx}{\int_0^{2\pi} r_j(x) dx} = e^{-\sigma \phi(x_j)} f(x_j)$$

для некоторой точки $x_j \in (0, 2\pi)$, ибо плотность r_j непрерывна и положительна, где $j = 1, 2$, соответственно. Подставляя такое значение A в формулу (2.3), найдем значение функции переключения в этой точке

$$S(x_j) = -\sigma \int_{x_j}^{2\pi} e^{-\sigma \phi(y)} f(y) r_j(y) dy.$$

Это значение отрицательно, если плотность f положительна, и, наоборот, положительно, если эта плотность отрицательна.

Следовательно, в силу необходимого условия оптимальности из теоремы 2 в этих двух случаях оптимальное движение должно использовать вблизи точки x_j плотность r_j , $j = 1, 2$, т. е. использовать максимальную скорость при положительной плотности выгоды и минимальную при отрицательной. Учитывая, что по условию теоремы эти плотности совпадают лишь в отдельных точках, получаем противоречие. Следовательно, наше предположение ошибочно, и справедливо утверждение теоремы.

Утверждение доказанной теоремы доставляет определенную сбалансированность цикла с максимальной средней временной выгодой: когда непрерывная плотность выгоды всюду положительна (отрицательна), оптимальный цикл тем не менее имеет участки, где используется максимальная (минимальная) скорость движения.

3.2. Теорема единственности

Теорема 4. *Для дифференцируемой плотности выгоды f с конечным числом критических точек и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, цикл, доставляющий максимальную среднюю временную выгоду, определен однозначно, если эта плотность неотрицательна.*

Эта теорема доказана в следующих двух подразделах. Возможно, что единственность оптимального цикла есть и без условия неотрицательности средней временной выгоды, но наше доказательство это условие использует.

3.3. Монотонность периода

При конечности числа критических точек плотности выгоды любой уровень функции переключения состоит из конечного числа точек, в частности, таковым является и ее нулевой уровень, доставляющий точки переключения между максимальной и минимальной допустимыми скоростями движения.

Как мы отметили выше, для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических точек цикл с максимальной средней временной выгодой обязательно является некоторым циклом, поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно убедиться в единственности цикла уровня, доставляющего максимальную среднюю временную выгоду.

Рассмотрим теперь минимальное и максимальное значения m, M функции переключения в нуле такие, что при $c < m$ и $c > M$ движение по циклу уровня c происходит с допустимой минимальной и максимальной плотностями, соответственно. Понятно, что такие значения существуют и что при $c \leq m$ (либо $c \geq M$) период цикла уровня и выгода вдоль него постоянны как функции уровня c , а значит, постоянна и усредненная выгода. Таким образом, цикл с наибольшей средней временной выгодой является циклом некоторого уровня $c \in [m, M]$.

Предложение 1. *Для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических и непрерывных функций ограничения r_1 и $r_2, r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, период цикла уровня c — непрерывная возрастающая функция на отрезке $[m, M]$, имеющая вне значений уровня, для которых функция переключения имеет критические точки или концевые точки цикла на нулевом уровне, производную*

$$T'(c) = \sum_{\{x_i\}} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i))}{e^{-\sigma\varphi(x_i)} |f'(x_i)|}, \quad (3.1)$$

где суммирование идет по точкам переключения.

Доказательство. Непрерывность периода в условиях теоремы очевидна. Докажем монотонность и дифференцируемость.

Сначала предположим, что имеется лишь одна точка переключения x_1 , отличная от начальной и концевой точек цикла, в которой производная плотности выгоды, а, значит, и функции переключения, ненулевая. При изменении уровня цикла c на достаточно малую величину Δc новых точек переключения на участке движения до этой точки не появится, а сама эта

Изменения уровня цикла и точки переключения.

точка переключения изменится на величину Δx , которая зависит от Δc и производной $S'(x_1)$ и вычисляется по формуле

$$\Delta x = \frac{-\Delta c}{S'(x)} + \dots = \frac{-\Delta c}{e^{-\sigma\varphi(x_1)}f'(x_1)} + \dots, \quad (3.2)$$

что нетрудно видеть (см. рис.). Здесь и ниже многоточие означает члены более высокой степени по приращению (в данном случае по Δc).

Но при малых изменениях точки x_1 функция S мало изменяется и на участке после точки переключения в силу формулы (2.6). Следовательно, и на этом участке новых точек переключения также не появится. Таким образом, при изменении уровня цикла c на Δc скорость движения вдоль цикла изменяется лишь на малом интервале от x_1 до $x_1 + \Delta x$.

При $r_1(x_1) \neq r_2(x_1)$ соответствующее изменение периода ΔT вычисляется по формуле

$$\frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{S'(x_1)}\Delta c + \dots \quad \text{либо} \quad \frac{r_1(x_1) - r_2(x_1)}{S'(x_1)}\Delta c + \dots,$$

если производная $S'(x_1)$ положительна либо отрицательна, соответственно. Таким образом, это изменение имеет тот же знак, что и Δc . Отсюда получаем

$$\Delta T = \Delta c \frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{e^{-\sigma\varphi(x_1)}|f'(x_1)|} + \dots$$

Разделив последнее равенство на Δc и перейдя к пределу при $\Delta c \rightarrow 0$, получим, что функция периода дифференцируема в уровне c , и ее производная в этой точке вычисляется по формуле

$$\frac{dT}{dc}(c) = \frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{e^{-\sigma\varphi(x_1)}|f'(x_1)|},$$

где в правой части точка x_1 есть функция от уровня c . Нетрудно видеть, что эта производная положительна, если $r_2(x_1) \neq r_1(x_1)$.

Если же при выбранном c функция переключения имеет несколько точек переключения — невырожденных нулей этой функции, не лежащих на концах цикла, то рассуждения практически повторяют предыдущие. Нужно только заметить, что на изменение конкретной точки переключения влияют изменение самого уровня, т. е. Δc (и оно дает основной вклад) и изменения предыдущих точек переключения, которые дают вклад большего порядка малости по Δc . Отсюда, применяя индукцию, мы и получаем формулу (3.1).

Наконец, критические уровни функции переключения монотонно растут с ростом уровня c , что нетрудно видеть. Следовательно, проходу этих уровней через ноль соответствует конечное число уровней c в силу конечности числа критических точек плотности выгоды, а в силу формулы (2.7) и функции переключения. Прохождение нулевого уровня через концы цикла также происходит при не более чем двух уровнях c .

Таким образом, в условиях теоремы период цикла является непрерывной функцией на отрезке $[m, M]$, дифференцируемой на этом отрезке всюду за исключением конечного числа точек и имеющей вне конечного числа точек положительную производную. Следовательно, период цикла уровня c — непрерывная возрастающая функция от $c \in [m, M]$.

Предложение 1 доказано.

3.4. Дифференцируемость усредненной выгоды

Обозначим через τ_m и τ_M минимальный и максимальный периоды циклов уровня. В условиях предложения 1 на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ определена и непрерывна обратная функция $c : T \mapsto c(T)$ к функции периода цикла уровня $T : c \mapsto T(c)$. В этом случае среднюю временную выгоду $A = A(c)$, $c \in [m, M]$, вдоль цикла уровня мы можем рассматривать как функцию периода этого цикла, т. е. $A = A(c(T))$, $T \in [\tau_m, \tau_M]$.

Предложение 2. Если числа критических точек дифференцируемой плотности выгоды и точек совпадений значений непрерывных функций ограничения r_1 и r_2 , $r_1 \leq r_2$, конечны, то средняя временная выгода как функция периода цикла уровня является дифференцируемой на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ с производной

$$A'_T(c(T)) = -\frac{c(T) + \sigma P(c(T)) + A(c(T))}{T}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Приращение выгоды ΔP при малом изменении Δc уровня цикла, для которого функция переключения не обращается в ноль в своих критических точках и на концах цикла, вычисляется по аналогии с приращением периода цикла и имеет вид

$$\Delta c \sum_{x_i} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i)) \left[e^{-\sigma\phi(x_i)} f(x_i) + \sigma \int_0^{x_i} e^{-\sigma\phi(y)} f(y) \rho(y) dy - \sigma P(c) \right]}{e^{-\sigma\phi(x_i)} |f'(x_i)|} + \dots$$

Отсюда, учитывая вид (2.6) функции переключения, а также ее обращение в ноль в точках x_i , получаем

$$\Delta P = -\Delta c [c + \sigma P(c)] \sum_{x_i} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i))}{e^{-\sigma\phi(x_i)} |f'(x_i)|} + \dots$$

Теперь, используя формулу (3.1), находим производные выгоды и средней временной выгоды по периоду цикла уровня c

$$\begin{aligned} P_T(c) &= -c - \sigma P(c), \\ A'_T(c) &= -\frac{c + \sigma P(c) + A(c)}{T}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следовательно, средняя выгода вдоль цикла уровня есть дифференцируемая функция его периода на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ с производной, вычисляемой по формуле (3.3). Предложение 2 доказано.

Докажем теперь теорему 4. В силу дифференцируемости средней временной выгоды по периоду ее максимум достигается или на концах отрезка $[\tau_m, \tau_M]$, или в нуле $\tau \in (\tau_m, \tau_M)$ производной этой функции. В последнем случае имеем

$$c(\tau) + \sigma P(c(\tau)) + A(c(\tau)) = 0 \quad \text{или} \quad -c(\tau) - \sigma P(c(\tau)) = A(c(\tau))$$

и, в частности, значение $-c(\tau) - \sigma P(c(\tau))$ равно максимальной средней временной выгоде. Вычисляя теперь вторую производную выгоды A по периоду цикла уровня, находим

$$A_T''(c(T)) = -\frac{c_T(T) - \sigma(c(T) + \sigma P(c(T)) + A_T(c(T)))}{T} + \frac{c + \sigma P(c) + A(c)}{T^2}.$$

Эта производная определена всюду, где определена производная $c_T(T)$, т.е. почти всюду на этом отрезке вблизи точки τ в силу конечности числа критических точек плотности выгоды и числа точек совпадения функций ограничения r_1 и r_2 . Имеем

$$A_T''(c(\tau)) = -\frac{c_T(\tau) + \sigma A(c(\tau))}{T},$$

если в точке τ эта производная определена, а первая обращается в ноль, что нетрудно видеть. Первое слагаемое в числителе почти всюду положительно, а второе положительно в силу неотрицательности плотности выгоды и конечности числа ее критических точек.

Следовательно, вторая производная A_T'' почти всюду отрицательна вблизи точки τ , где первая производная обращается в ноль. Отсюда и из непрерывности первой производной получаем, что вблизи любой критической точки средней временной выгоды ее первая производная убывает. Следовательно, у этой выгоды не больше одного максимального значения на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$.

Таким образом, в условиях теоремы 4 цикл уровня с максимальной средней временной выгодой определен однозначно.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его приложения. 2002. Vol. 36, вып. 2. С. 1–11.
2. Давыдов А.А. Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Тр. МИАН. 2005. Vol. 250. С. 79–94.
3. Давыдов А.А., Мена Матош Е. Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Мат. сб. 2007. Vol. 198, № 1. С. 21–42.
4. Davydov A.A., Mena-Matos H. Singularity theory approach to time averaged optimization // Singularities in Geometry and Topology: Proc. of the Trieste singularity summer school and workshop. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2007. P. 598–628.
5. Давыдов А.А., Шуткина Т.С. Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде // Успехи мат. наук. 2009. Vol. 64, № 1 (385). С. 143–144.
6. Davydov A., Shutkina T. Time averaged optimization of cyclic processes with discount // Nonlinear Analysis and Optimization Problems: Proc. from the Internat. conf. / Montenegro Academy of Sciences and Arts. 2009. P. 93–100.

Давыдов Алексей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Владимирский государственный университет
e-mail: davydov@vlsu.ru

Поступила 10.10.2010

Шуткина Татьяна Сергеевна
аспирант
Владимирский государственный университет
e-mail: shutkina@vlsu.ru