Общероссийский математический портал

С. М. Асеев, О некоторых свойствах сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2013, том 19, номер 4, 15–24

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:17:41

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В СООТНОШЕНИЯХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА¹

С. М. Асеев

Для класса задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, возникающих при исследовании процессов экономического роста, изучаются свойства сопряженной переменной, фигурирующей в соотношениях принципа максимума Понтрягина и определяемой посредством формулы, аналогичной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем. Показано, что при выполнении условия типа доминирования дисконтирующего множителя так определенная сопряженная переменная удовлетворяет как основным соотношениям принципа максимума (сопряженной системе и условию максимума) в нормальной форме, так и дополнительному условию стационарности гамильтониана. Кроме того, рассмотрена основанная на данной формуле новая экономическая интерпретация сопряженной переменной.

Ключевые слова: Задачи оптимального экономического роста, бесконечный горизонт, принцип максимума Понтрягина, сопряженная переменная, условие стационарности гамильтониана.

S. M. Aseev. On some properties of the adjoint variable in the relations of the Pontryagin maximum principle for optimal economic growth problems.

For a class of infinite horizon optimal control problems that appear in studies on economic growth processes, the properties of the adjoint variable in the relations of the Pontryagin maximum principle defined by a formula similar to the Cauchy formula for the solutions to linear differential systems are studied. It is shown that, under a dominating discount condition, the adjoint variable defined in this way satisfies both the core relations of the maximum principle (the adjoint system and the maximum condition) in the normal form and the additional stationarity condition for the Hamiltonian. In addition, a new economic interpretation of the adjoint variable based on this formula is considered.

Keywords: optimal economic growth problems, infinite horizon, Pontryagin's maximum principle, adjoint variable, stationarity condition for the Hamiltonian.

Введение

Начиная с работы Ф. Рамсея [20] динамические модели оптимального экономического роста обычно формулируют в виде задач оптимального управления на бесконечном интервале времени (см., например, [8; 13]). Эти задачи характеризуются фиксированным начальным состоянием, отсутствием каких-либо ограничений на поведение допустимых траекторий на бесконечности и специальным видом интегрального функционала, задаваемого несобственным интегралом с дисконтированием. Задачи данного класса иногда называют *задачами оптимального экономического роста*. Как известно, основные трудности исследования этих задач связаны с бесконечным горизонтом планирования (см., например, [2; 4]).

В последние годы в области теории оптимального управления для задач на бесконечном интервале времени был получен ряд новых результатов. При помощи метода конечно-временных аппроксимаций (см. [2–4; 9]) и метода игольчатых вариаций (см. [10; 11]) были получены варианты принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащие дополнительные условия на сопряженную переменную. В частности, при выполнении условий типа доминирования дисконтирующего множителя в работах [2–4; 9–11] были доказаны различные варианты

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00685-а, 13-01-12446-офи-м2), ДРПННТ (проект 1.1348.2011) и научной программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

принципа максимума в нормальной форме с сопряженной переменной, определяемой по рассматриваемому оптимальному процессу при помощи формулы, аналогичной известной формуле Коши [7] для решений линейных дифференциальных систем. В некоторых ситуациях такое представление сопряженной переменной позволяет охарактеризовать ее асимптотическое поведение и обосновать применение стандартных условий трансверсальности на бесконечности (см. [2–4; 9–11]). Более того, это представление сопряженной переменной может быть использовано в качестве их альтернативы (см. обсуждение примера 2.4 в [11]).

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение свойств сопряженной переменной, определяемой по оптимальному процессу при помощи формулы, аналогичной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем. Исходя из результатов работ [10; 11], показано, что в случае выполнения условия типа доминирования дисконтирующего множителя такое задание сопряженной переменной влечет выполнение как основных соотношений принципа максимума в нормальной форме (сопряженной системы и условия максимума), так и дополнительного условия стационарности гамильтониана. Кроме того, обсуждается вытекающая из данного представления сопряженной переменной ее новая экономическая интерпретация.

1. Принцип максимума для задач оптимального экономического роста

Модели современной теории экономического роста обычно формулируются в виде следующей задачи оптимального управления.

Задача (P).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t \geq 0$, U — непустой компакт из $\mathbb{R}^m$, $\rho \in \mathbb{R}^1$ — параметр дисконтирования (не обязательно положительный). Предполагается, что начальное состояние x_0 принадлежит заданному открытому выпуклому множеству $G \subset \mathbb{R}^n$, а функции $f: G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ и $g: G \times U \mapsto \mathbb{R}^1$ вместе со своими частными производными $f_x: G \times U \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ и $g_x: G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывные.

Как обычно, будем считать, что класс допустимых управлений в задаче (P) состоит из всех измеримых (по Лебегу) вектор-функций $u: [0, \infty) \mapsto U$. По определению траекторией системы (1.1), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)$, является локально абсолютно непрерывное решение (в смысле Каратеодори) $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.1), определенное на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0, \tau)$, $\tau > 0$, удовлетворяющее начальному условию (1.2) и лежащее в множестве G . Траекторию $x(\cdot)$ будем называть допустимой, если она определена на всем бесконечном интервале $[0, \infty)$. Пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория, называется допустимой парой (в задаче (P)) или процессом.

Интеграл в (1.3) будем понимать как несобственный, т. е. для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ по определению

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt,$$

если этот предел существует. В дальнейшем будем предполагать, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ несобственный интеграл в (1.3) сходится (к конечному числу). Допустимую

пару $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть оптимальной в задаче (P) , если интегральный функционал (1.3) принимает на этой паре наибольшее возможное значение.

Определим функцию Гамильтона — Понтрягина $\mathcal{H}: [0, \infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H: [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ для задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \langle f(x, u), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u), \quad H(t, x, \psi^0, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi),$$

$$t \in [0, \infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi^0 \in \mathbb{R}^1, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

В нормальном случае (при $\psi^0 = 1$) переменную ψ^0 будем опускать и писать $\mathcal{H}(t, x, u, \psi)$ и $H(t, x, \psi)$ соответственно вместо $\mathcal{H}(t, x, u, 1, \psi)$ и $H(t, x, 1, \psi)$.

Вдоль допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем рассматривать линеаризованную систему

$$\dot{y}(t) = f_x(x_*(t), u_*(t))y(t) \quad (1.4)$$

и сопряженную к ней систему

$$\dot{z}(t) = -f_x^*(x_*(t), u_*(t))z(t). \quad (1.5)$$

Пусть $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ — их нормированные в момент 0 фундаментальные матрицы. Это означает, что столбцы матричных функций $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ — линейно независимые решения соответственно систем (1.4) и (1.5), а матрицы $Y_*(0)$ и $Z_*(0)$ — диагональные единичные. Как известно, матричные функции $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ связаны соотношением $Z_*^{-1}(t) = [Y_*(t)]^*$, $t \geq 0$.

В силу [18, Theorem 4.2] справедлив следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) .

Теорема 1. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P) . Тогда существуют такие $\psi^0 \geq 0$ и $\psi(\cdot) \in AC_{\text{loc}}([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, что

(1) функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t));$$

(2) выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{n.6.}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t));$$

(3) выполняется условие нетривиальности

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| > 0.$$

Как известно, в общем случае данный вариант принципа максимума может выполняться не обязательно в нормальной форме (в этом случае $\psi^0 = 0$), а стандартные условия трансверсальности на бесконечности вида $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ или $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0$ могут нарушаться (подробнее см. [4; 12; 18; 19]). Данное обстоятельство существенно затрудняет применение теоремы 1 к решению конкретных задач.

Вопрос о выполнении дополнительных условий, характеризующих сопряженные переменные ψ^0 и $\psi(\cdot)$, рассматривался многими авторами (см. [12; 15; 19; 21], а также библиографию в [2; 4]). В частности, в работе [19] показано, что в случае, когда для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ интегральный функционал (1.3) сходится, для оптимального процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ основные соотношения принципа максимума (условия (1) и (2) теоремы 1) всегда можно дополнить следующим условием стационарности гамильтониана:

$$H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Заметим, что условие (1.6) аналогично условию трансверсальности по времени для задач со свободным конечным временем [6] и является дополнительным к основным соотношениям принципа максимума (см. [4, пример 6.6]).

В работах [3; 4; 9] в случае $\rho \geq 0$ при условии типа доминирования дисконтирующего множителя и некоторых дополнительных предположениях при помощи метода конечно-временных аппроксимаций был получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P), содержащий как условие стационарности гамильтониана (1.6), так и поточечное описание сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством следующей формулы, аналогичной формуле Коши [7] для решений линейных дифференциальных систем:

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty e^{-\rho t} [Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

Обсуждение данного результата см. в работе [5], а его дальнейшее обобщение — в [2, разд. 4]. Отметим, что при использовании метода конечно-временных аппроксимаций основные соотношения принципа максимума (сопряженная система и условие максимума), условие стационарности гамильтониана (1.6) и представление для сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством формулы (1.7) получаются независимо друг от друга посредством предельного перехода в соотношениях принципа максимума для аппроксимирующих задач.

С другой стороны, в работах [10; 11] при несколько другом условии типа доминирования дисконтирующего множителя для общей неавтономной задачи с измеримым временем и при ослабленных предположениях на сходимость интегрального функционала при помощи метода игольчатых вариаций (подробнее см. [10; 11]) был получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, также содержащий описание сопряженной переменной посредством формулы (1.7). При таком подходе основные соотношения принципа максимума (сопряженная система и условие максимума) получаются как следствия задания сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ при помощи формулы (1.7).

Далее покажем, что в случае задачи (P) при выполнении условия типа доминирования дисконтирующего множителя (A2) из [11] задание сопряженной переменной при помощи формулы (1.7) влечет также и выполнение условия стационарности (1.6).

Для этого введем новую фазовую переменную $\tilde{z} = (z, z^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $z^{n+1} \in \mathbb{R}^1$, вектор управления $\tilde{u} = (w, v) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $w \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^1$, и рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача $(\tilde{P})$.

$$\dot{z}(\tau) = v(\tau)f(z(\tau), w(\tau)), \quad w(\tau) \in U, \quad v(\tau) \in [0.5, 1.5], \quad (1.8)$$

$$\dot{z}^{n+1}(\tau) = -v(\tau)\rho z^{n+1}(\tau), \quad (1.9)$$

$$\tilde{z}(0) = (x_0, 1),$$

$$\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = \int_0^\infty v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau)) d\tau \rightarrow \max. \quad (1.10)$$

Здесь $\tilde{z}(0) \in \tilde{G}$, где $\tilde{G} = G \times \mathbb{R}^1$, допустимое управление $\tilde{u}: [0, \infty) \mapsto U \times [0.5, 1.5]$ — измеримая (по Лебегу) функция, а остальные данные в задаче $(\tilde{P})$ те же самые, что и в (P). Оптимальность допустимой пары $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P})$ понимается так же, как и в (P).

Лемма. Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче (P), $v: [0, \infty) \mapsto [0.5, 1.5]$ — произвольная измеримая функция, а функция $t: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ определена равенством $t(\tau) = \int_0^\tau v(s) ds$, $\tau \geq 0$. Тогда пара $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$, где $z(\tau) = x(t(\tau))$, $z^{n+1}(\tau) = e^{-\rho \int_0^\tau v(s) ds}$ и $w(\tau) =$

$u(t(\tau))$, $\tau \geq 0$, — допустимый процесс в задаче $(\tilde{P})$. При этом для любого $\sigma > 0$ имеем

$$\int_0^\sigma v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau)) d\tau = \int_0^{t(\sigma)} e^{-\rho s} g(x(s), u(s)) ds.$$

В частности, если интеграл в (1.3) на паре $(x(\cdot), u(\cdot))$ сходится, то интеграл в (1.10) также сходится, и справедливо равенство $\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot))$.

Если же $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче $(\tilde{P})$, а функция $\tau(\cdot)$ — обратная к функции $t(\cdot)$, определенной равенством $t(\tau) = \int_0^\tau v(s) ds$, $\tau \geq 0$, то пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $x(t) = z(\tau(t))$, $u(t) = w(\tau(t))$, $t \geq 0$, — допустимый процесс в задаче (P) . При этом для любого $T > 0$ имеем

$$\int_0^T e^{-\rho s} g(x(s), u(s)) ds = \int_0^{\tau(T)} v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau)) d\tau.$$

В частности, если интеграл в (1.10) на паре $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ сходится, то интеграл в (1.3) также сходится, и справедливо равенство

$$\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot)).$$

Доказательство. Действительно, если $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче (P) , и $v: [0, \infty) \mapsto [0.5, 1.5]$ — произвольная измеримая функция, то функция $t(\cdot)$, определенная равенством $t(\tau) = \int_0^\tau v(s) ds$, $\tau \geq 0$, — абсолютно непрерывная и монотонная. Следовательно, функция $w(\cdot)$: $w(\tau) = u(t(\tau))$, $\tau \geq 0$, — измеримая, как суперпозиция измеримой функции $u(\cdot)$ и абсолютно непрерывной монотонной функции $t(\cdot)$. Легко видеть, что соответствующая функция $\tilde{z}(\cdot)$ — абсолютно непрерывная. Прямым дифференцированием проверяется, что функция $\tilde{z}(\cdot)$ является допустимой траекторией в задаче $(\tilde{P})$. Тогда для любого $\sigma > 0$, выполняя замену $t(\tau) = \int_0^\tau v(s) ds$, $\tau \geq 0$, получаем

$$\int_0^\sigma v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau)) d\tau = \int_0^{t(\sigma)} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt.$$

Следовательно, сходимость интеграла в (1.3) влечет сходимость интеграла в (1.10) и их равенство.

В одну сторону утверждение леммы доказано. Доказательство утверждения леммы в обратную сторону проводится аналогично. $\square$

В силу доказанной леммы задачи (P) и $(\tilde{P})$ эквивалентны. В частности, если $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальный процесс в задаче (P) , то $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) = (x_*(t), e^{-\rho t})$, $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, — оптимальный процесс в задаче $(\tilde{P})$.

Доказательство следующего результата основано на реализации схемы доказательства теоремы 4.1 из [11] применительно к вспомогательной задаче $(\tilde{P})$.

Теорема 2. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P) . Пусть, далее, существуют такие число $\gamma > 0$ и интегрируемая функция $\lambda: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$: $\|\zeta - x_0\| < \gamma$, задача Коши $\dot{x}(t) = f(x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, имеет решение (в смысле Каратеодори) $x(\zeta; \cdot)$ на $[0, \infty)$ в G и

$$\max_{\theta \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \left| \langle e^{-\rho t} g_x(\theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{n.6.}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t). \quad (1.11)$$

Тогда

(1) для любого $t \geq 0$ интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)) ds$$

сходится абсолютно, а функция $\psi(\cdot)$: $\psi(t) = Z_*(t)I_*(t)$, $t \geq 0$, (см. (1.7)) локально абсолютно непрерывна;

(2) функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет сопряженной системе

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)); \quad (1.12)$$

(3) выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{n.6.}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)); \quad (1.13)$$

(4) выполняется условие стационарности гамильтониана

$$H(t, x_*(t), \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.14)$$

Доказательство. В силу доказанной леммы из оптимальности процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P) вытекает оптимальность процесса $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) \equiv (x_*(t), e^{-\rho t})$ и $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, в задаче $(\tilde{P})$.

Рассмотрим линеаризованную вдоль оптимальной траектории $\tilde{z}_*(\cdot)$ систему (1.8), (1.9):

$$\dot{y}(t) = f_x(x_*(t), u_*(t))y(t), \quad (1.15)$$

$$\dot{y}^{n+1}(t) = -\rho y^{n+1}(t). \quad (1.16)$$

Система (1.15), (1.16) имеет блочный вид. Поэтому ее нормированная фундаментальная матрица $\tilde{Y}(\cdot)$ также имеет блочный вид:

$$\tilde{Y}_*(t) = \begin{pmatrix} Y_*(t) & 0 \\ 0 & e^{-\rho t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $Y_*(\cdot)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (1.4). Далее, в силу [11, лемма 3.1] при п.в. $t \geq 0$ выполняется неравенство $\| [Y_*(t)]^* g_x(x_*(t), u_*(t)) \| \leq \sqrt{n} \lambda(t)$. Отсюда вытекает сходимость для любого $t \geq 0$ несобственного интеграла

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)) ds.$$

Здесь $Z_*(t)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (1.5). Следовательно, функция $\tilde{\psi}(\cdot) = (\psi(\cdot), \psi^{n+1}(\cdot))$, $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\psi^{n+1}: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, определенная равенством

$$\tilde{\psi}(t) = (\psi(t), \psi^{n+1}(t)) = \begin{pmatrix} Z_*(t)I_*(t) & 0 \\ 0 & e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (1.17)$$

локально абсолютно непрерывна. Заметим, что формула (1.17) определяет ту же самую сопряженную функцию $\psi(\cdot)$, $\psi(t) = Z_*(t)I_*(t)$, $t \geq 0$, что и в [11, теорема 4.1]. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Прямым дифференцированием проверяется, что эта функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы (1.12). Таким образом утверждение (2) доказано.

Доказательство условия максимума для оптимального в задаче $(\tilde{P})$ процесса $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) = (x_*(t), e^{-\rho t})$, $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, проводится при помощи метода игольчатых вариаций полностью аналогично доказательству условия максимума в [11, теорема 4.1]. Оно опирается на оценку (1.11) и свойство сходимости интегрального функционала (1.3) (подробнее см. доказательство леммы 3.2 и теоремы 4.1 в [11]). Получаемое таким образом условие максимума имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle - \rho e^{-\rho t} \psi^{n+1}(t) + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \\ & \stackrel{\text{п.в.}}{=} \sup_{v \in [0.5, 1.5]} v \left[\sup_{u \in U} \left(\langle f(x_*(t), u), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u) \right) - \rho e^{-\rho t} \psi^{n+1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Поскольку для любого $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) & \leq \sup_{u \in U} \left(\langle f(x_*(t), u), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u) \right) \\ & \leq \sup_{v \in [0.5, 1.5]} v \sup_{u \in U} \left(\langle f(x_*(t), u), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u) \right), \end{aligned}$$

то равенство (1.18) влечет выполнение условия максимума (1.13) для задачи (P) :

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)).$$

Таким образом, утверждение (3) доказано.

Далее, в силу доказанного условия максимума (1.13) получаем, что при п.в. $t \geq 0$ верхняя грань по $v \in [0.5, 1.5]$ в (1.18) достигается в точке $v_*(t) = 1$. Следовательно, в силу непрерывности функции $\psi^{n+1}(\cdot)$ из равенства (1.18) получаем

$$\rho e^{-\rho t} \psi^{n+1}(t) = \sup_{u \in U} \left(\langle f(x_*(t), u), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u) \right) = H(t, x_*(t), \psi(t)), \quad t \geq 0.$$

С другой стороны, в силу (1.17) имеем

$$\psi^{n+1}(t) = e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Подставляя данное выражение для $\psi^{n+1}(t)$ в предыдущее равенство получаем условие стационарности гамильтониана (1.14) для задачи (P) :

$$H(t, x_*(t), \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Утверждение (4) доказано. $\square$

Заметим, что использованное в формулировке теоремы 2 условие (1.11) является адаптированным к случаю задачи (P) вариантом условия $(A2)$ из [11].

2. Экономическая интерпретация сопряженной переменной

Экономическая интерпретация принципа максимума Понтрягина [6], предложенная в конце 1960-х гг. Р. Дорфманом [17], основана на отождествлении текущей стоимости вектора капитала со значениями функции оптимального значения и использовании метода динамического программирования Р. Беллмана [14].

Именно при произвольных фиксированных $\xi \in G$ и $t \geq 0$ рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а $(P_{\xi,t})$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= f(x(s), u(s)), \quad u(s) \in U, \\ x(t) &= \xi, \end{aligned}$$

$$J_t(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} g(x(s), u(s)) ds \rightarrow \max.$$

Будем считать, что все остальные данные в задаче $(P_{\xi,t})$ те же самые, что и в задаче (P) .

Обычно в моделях оптимального экономического роста координаты фазового вектора $x \in G$ интерпретируются как величины различных видов производственного капитала, вектор управления $u \in U$ характеризует инвестиции в эти виды капитала и, возможно, потребление, а функция $g(\cdot, \cdot)$ задает текущую полезность (например, прибыль) $g(x, u)$, получаемую в единицу времени при имеющемся векторе капитала x и выбранном значении управления u .

Предположим, что для любых $\xi \in G$ и $t \geq 0$ задача $(P_{\xi,t})$ имеет решение, и определим текущую функцию оптимального значения $V: G \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$V(\xi, t) = \max_{(x(\cdot), u(\cdot))} J_t(x(\cdot), u(\cdot)), \quad \xi \in G, \quad t \geq 0.$$

Здесь максимум берется по всем допустимым парам $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче $(P_{\xi,t})$. Заметим, что определение функции $V(\cdot, \cdot)$ как “текущей” функции оптимального значения связано с тем фактом, что дисконтирование в задаче $(P_{\xi,t})$ осуществляется относительно начального в ней, т. е. текущего, момента времени t . Поэтому для любых $\xi \in G$ и $t \geq 0$ величина $V(\xi, t)$ интерпретируется как *текущая стоимость* (net present value) вектора капитала ξ в момент t . Эта стоимость $V(\xi, t)$ есть величина всей полезности, оцененная на момент t , которую может принести вектор капитала ξ на интервале $[t, \infty)$, если управление будет осуществляться оптимальным образом.

Несложно показать (см., например, [2; 4, § 5]), что в задаче $(P_{\xi,t})$ функция $V(\cdot, \cdot)$ инвариантна по времени, т. е. $V(\xi, t) \equiv V(\xi, 0)$, $\xi \in G$, $t \geq 0$. Таким образом, в задаче $(P_{\xi,t})$ способность капитала приносить полезность на интервале $[t, \infty)$, дисконтированная относительно момента t , зависит только от величины ξ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функцию $V(\cdot)$ как функцию одной переменной $\xi \in G$ и писать $V(\xi)$ вместо $V(\xi, t)$.

Пусть теперь функция $V(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируема на множестве G . Тогда основные соотношения (1) и (2) принципа максимума (теоремы 1) и условие стационарности (1.6) в нормальной форме могут быть получены при помощи метода динамического программирования (см., например, [4, § 5]). При этом значения $p(t) = e^{\rho t} \psi(t)$, $t \geq 0$, текущей сопряженной переменной $p(\cdot)$ вдоль оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ определяются равенством

$$p(t) = V_x(x_*(t)), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Это соотношение позволяет придать экономический смысл координатам вектора $p(t)$ как текущим *переходным ценам* (marginal prices) (их еще называют текущими *невидимыми ценами* (shadow prices)) соответствующих видов капитала в момент t . Данный факт играет ключевую роль в экономической интерпретации соотношений принципа максимума, предложенной Р. Дорфманом [17]. Величины же координат вектора $\psi(t) = e^{-\rho t} p(t)$, $t \geq 0$, понимаются в этом случае как эти цены, но приведенные на начальный момент времени 0, т. е. взятые с учетом дисконтирования относительно момента 0.

Покажем, что формула (1.7) позволяет дать альтернативное толкование координатам вектора $\psi(t)$, $t \geq 0$, сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ как агрегированным с учетом дисконтирования на интервале $[t, \infty)$ переходным межвременным ценам соответствующих видов вектора капитала $x_*(t)$, причем без каких-либо априорных предположений относительно дифференцируемости функции оптимального значения $V(\cdot)$.

Пусть выполняются условия теоремы 2 и $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P). Тогда для произвольного $t \geq 0$ и любого начального состояния ζ , лежащего в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{V}(x_*(t))$ точки $x_*(t)$, задача Коши

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u_*(s)), \quad x(t) = \zeta \quad (2.2)$$

имеет решение $x(\zeta, t; \cdot)$, определенное на всем бесконечном интервале $[t, \infty)$ и лежащее в G . В частности, $x(x_*(t), t; s) \equiv x_*(s)$, $s \geq t$. Заметим, что в задаче Коши (2.2) управление $u_*(\cdot)$ фиксировано, меняется только начальное состояние $\zeta \in \mathcal{V}(x_*(t))$.

При произвольных $0 \leq t < s$ определим функцию *межвременной мгновенной полезности* $\pi(\cdot, t, s)$ равенством

$$\pi(\zeta, t, s) = g(x(\zeta, t; s), u_*(s)), \quad \zeta \in \mathcal{V}(x_*(t)).$$

Здесь определение функции $\pi(\cdot, t, s)$ как “межвременной” мгновенной полезности связано с тем фактом, что величина $\pi(\zeta, t, s)$ есть выражение мгновенной полезности, получаемой в момент s в зависимости от вектора капитала ζ в предшествующий момент $t < s$, при заданном на интервале $[t, s]$ управлении $u_*(\cdot)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда для фигурирующей в утверждении теоремы 2 сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ вдоль оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ справедливо равенство

$$\psi(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} \pi_\zeta(x_*(t), t, s) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3 несложно получается из теоремы о дифференцируемости решения задачи Коши по начальному значению. Действительно, для любого $t \geq 0$ и произвольного $s > t$ согласно теореме о дифференцируемости решения задачи Коши по начальному значению (см., например, [1, § 2.5.6]) функция $x(\cdot, t; s)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_*(t)$ и

$$x_\zeta(x_*(t), t; s) = Y_*(s)[Y_*(t)]^{-1} = [Z_*(s)]^{-1} [Z_*(t)]^* = [Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1}^*.$$

Отсюда вследствие непрерывной дифференцируемости функции $g(\cdot, u_*(s))$ получаем

$$\begin{aligned} \pi_\zeta(x_*(t), t, s) &= [g_x(x_*(s), u_*(s))]^* x_\zeta(x_*(t), t; s) = [g_x(x_*(s), u_*(s))]^* [Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1}^* \\ &= [Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы 2 справедливо равенство (2.3). $\square$

Заметим, что поскольку при всех $s > t \geq 0$ величина $\pi(x_*(t), t, s)$ есть межвременная мгновенная полезность в момент s вектора капитала $x_*(t)$ в момент t , то координаты ее производной $\pi_\zeta(x_*(t), t, s)$ суть *переходные межвременные цены* в момент s , соответствующие различным видам вектора капитала $x_*(t)$ в момент t . Значения же координат вектора $e^{-\rho s} \pi_\zeta(x_*(t), t, s)$ суть эти цены, но выраженные на момент 0. Отсюда заключаем, что согласно теореме 3 в каждый момент времени $t \geq 0$ вектор $\psi(t)$ представляет собой проинтегрированную на интервале $[t, \infty)$ (с учетом дисконтирования относительно момента 0) соответствующую функцию переходных межвременных цен $\pi_\zeta(x_*(t), t, \cdot)$.

В заключение отметим, что выполнение обоих соотношений (2.1) и (2.3) влечет равенство

$$V_x(x_*(t)) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} \pi_\zeta(x_*(t), t, s) ds, \quad t \geq 0.$$

Данное равенство означает, что при движении по оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ в каждый момент времени $t \geq 0$ текущие переходные цены различных видов вектора капитала $x_*(t)$ равны их агрегированным с учетом дисконтирования относительно этого момента t на всем последующем интервале $[t, \infty)$ переходным межвременным ценам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжковский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 2. С. 3–64.
3. **Асеев С.М., Кряжковский А.В.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 5. С. 583–585.
4. **Асеев С.М., Кряжковский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
5. **Асеев С.М., Кряжковский А.В.** Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 16–31.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
7. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton; N.J.: Princeton Univ. Press, 2008. 552 p.
9. **Aseev S.M., Kryazhinskiy A.V.** The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119.
10. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 43–63.
11. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control: Research Report 2012-04 / ORCOS Institute of Mathematical Methods in Economics; Vienna University of Technology. Vienna, 2012. 19 p.
URL: http://orcos.tuwien.ac.at/fileadmin/t/orcos/Research_Reports/2012-04_Ase-VV_rev.pdf.
12. **Aubin J.-P., Clarke F.H.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979, Vol. 17. P. 567–586.
13. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. N. Y.: McGraw Hill, 1995. 654 p.
14. **Bellman R.** Dynamic programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. 342 p.
15. **Benveniste L.M., Scheinkman J.A.** Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case // J. Econ. Theory. 1982. Vol. 27. P. 1–19.
16. **Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 332 p.
17. **Dorfman R.** An economic interpretation of optimal control theory // Am. Econ. Rev. 1969. Vol. 59. P. 817–831.
18. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
19. **Michel P.** On the transversality conditions in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 975–985.
20. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // Economic J. 1928. Vol. 38. P. 543–559.
21. **Seierstad A.** Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. P. 201–229.

Асеев Сергей Миронович

Поступила 14.08.2013

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)

e-mail: aseev@mi.ras.ru