Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. M. Tarasyev, A. A. Usova, Construction of a regulator for the Hamiltonian system in a two-sector economic growth model, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2010, Volume 271, 278–298

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 14:23:31

УДК 517.977.52

Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста¹

©2010 г. А. М. Тарасьев^{2,3}, А. А. Усова^{2,4}

Поступило в июле 2010 г.

Работа посвящена построению оптимальных траекторий в задаче управления инвестициями в основной капитал страны и эффективность труда. В рамках классических подходов теории экономического роста строится модель, основу которой составляют три производственных фактора: основной капитал, человеческий капитал и полезная работа. Предполагается, что уровни инвестирования основного капитала и человеческого капитала являются эндогенными управляющими параметрами модели, а полезная работа есть экзогенный параметр, подчиненный динамике логистического типа. Уровень ВВП страны описывается производственной функцией Кобба–Дугласа. В качестве функции полезности рассматривается интегральный индекс потребления, дисконтированный на бесконечном промежутке времени. На основании построенной модели формулируется задача оптимального управления инвестициями. Задача решается методами динамического программирования. Исследуются оптимальные управляющие режимы, при каждом из которых рассматривается вопрос существования положения равновесия. На границах смены управляющих режимов проверяются свойства гладкости и строгой вогнутости максимизированного гамильтониана. Особое внимание уделяется режиму переменных управляющих воздействий. Новизна предлагаемого решения состоит в построении нелинейного стабилизатора, основанного на принципе обратной связи. Свойства построенного стабилизатора позволяют найти приближенное решение исходной задачи в окрестности положения равновесия. Численно были получены траектории капитала страны и эффективности труда из стабилизированной гамильтоновой системы. Найденные решения позволяют также оценить темпы роста ВВП страны и уровня потребления в окрестности положения равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается модель, суть которой состоит в анализе изменения внутреннего валового продукта (ВВП) страны. Построение модели опирается на классические конструкции теории экономического роста [2, 13, 14], а также включает в себя некоторые аспекты SEDIM-модели [12], которая описывает влияние различных экономических факторов, в частности демографических показателей, на развитие экономики страны.

В работе предполагается, что на изменение ВВП влияют три фактора [3]: основной капитал, человеческий капитал и полезная работа. Данное влияние описывается производственной функцией, обладающей свойством положительной однородности. Инвестиции в основной капитал и в человеческий капитал рассматриваются как эндогенные управляющие параметры.

Функция полезности определяется как интегральный индекс потребления, дисконтированный на бесконечном промежутке времени [7]. Здесь используется индекс потребления логарифмического типа, который в теории полезности описывает относительный прирост (в данном случае) потребления за единицу времени.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00587а), Российского гуманитарного научного фонда (проект 08-02-00315а), гранта Президента РФ (проект НШ-2640.2008.1), программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

²Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия.

³E-mail: tam@imm.uran.ru

⁴E-mail: anastasy.Ousova@gmail.com

Суть задачи управления, сформулированной на основании модели, состоит в поиске оптимального уровня инвестиций в основной капитал и в человеческий капитал страны на траекториях, максимизирующих функцию полезности. Поставленная задача решается методами теории оптимального управления [10] для задач на бесконечном промежутке времени [1].

В процессе решения были проанализированы различные управляющие режимы, определяющие оптимальный уровень инвестирования. Было показано, что максимизированный гамильтониан оказывается строго вогнутой функцией [11] в силу вогнутости производственной функции и гладкой склейки максимизированного гамильтониана на границах смены управляющих режимов [3]. Также проведен анализ существования стационарных точек гамильтоновых систем. Особое внимание уделено режиму, при котором управляющие параметры непостоянны. Для данного режима составлена линеаризованная гамильтонова система, относительно которой было сделано предположение о том, что она имеет четыре различных действительных собственных значения, причем два из них положительны, а два других отрицательны. Данное предположение позволяет судить о седловом характере положения равновесия. На основании результатов качественной теории дифференциальных уравнений [8] траектория нелинейной гамильтоновой системы стремится к стационарной точке по касательной к плоскости, образованной двумя собственными векторами, отвечающими отрицательным собственным значениям. Этот факт позволяет получить представление о темпах роста оптимальных траекторий и определить наличие уровня насыщения для относительных переменных.

Новизна предлагаемых в данной работе решений состоит в идее построения нелинейного стабилизатора, основанного на принципе обратной связи [9], который переводит систему из любого начального положения в положение, соответствующее стационарной точке.

В работе приведены результаты численного решения стабилизированной в окрестности положения равновесия гамильтоновой системы.

ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Построение модели. Рассмотрим задачу оптимального управления на бесконечном горизонте, основанную на модели экономического роста [2, 4, 12–14]. Предполагается, что ВВП страны $Y(t)$ в момент времени t определяется тремя производственными факторами, а именно основным капиталом страны $K(t)$, человеческим капиталом $L(t)$ и полезной работой $U(t)$. Все эти величины связаны соотношением $Y = F(K, L, U)$, где $F(K, L, U)$ — производственная функция, обладающая свойством положительной однородности первой степени, которое позволит в дальнейшем перейти к относительным переменным.

Введем переменную $P(t)$, отвечающую за численность населения в момент времени t . Исходя из модели Сандерсона [12] человеческий капитал можно определить из соотношения

$$L(t) = P(t)E(t), \quad (1)$$

где переменной $E(t)$ обозначена эффективность труда одного рабочего в момент времени t .

Рассмотрим относительные величины: $y(t)$ — функция, отвечающая за ВВП страны, приходящийся на одного рабочего, $k(t)$ — капитал страны на одного рабочего, $l(t)$ — человеческий капитал страны, отнесенный к численности работающего населения, и $u(t)$ — полезная работа, приходящаяся на одного рабочего, т.е.

$$y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{P(t)}, \quad l(t) = \frac{L(t)}{P(t)}, \quad u(t) = \frac{U(t)}{P(t)}.$$

Следует отметить, что переменная $l(t)$ совпадает с эффективностью труда, введенной в (1). В этих переменных производственная функция в силу свойства однородности принимает вид

$$y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)} = F\left(\frac{K(t)}{P(t)}, \frac{L(t)}{P(t)}, \frac{U(t)}{P(t)}\right) = F(k(t), l(t), u(t)).$$

Предполагается, что численность рабочей силы страны пропорциональна численности населения и подчиняется динамике

$$\dot{P}(t) = \rho P(t), \quad P(t_0) = P^0,$$

где постоянный положительный параметр ρ определяет степень роста численности рабочей силы.

Основываясь на классической модели, предложенной Солоу [14], будем считать, что изменение капитала равно сбережениям $S(t)$, т.е. инвестициям в капитал $S(t) = s(t)Y(t)$, уменьшенным на величину обесценивания капитала $\delta K(t)$. Таким образом, динамику изменения основного капитала страны можно представить в виде

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) = s(t)Y(t) - \delta K(t), \quad K(t_0) = K^0.$$

Здесь доля ВВП $s(t)$, инвестируемая в капитал, является управляющим параметром, удовлетворяющим ограничениям $0 \leq s(t) \leq a_s < 1$.

Предположим, что изменение квалифицированной рабочей силы $L(t)$ пропорционально вложениям в человеческий капитал страны $R(t) = r(t)Y(t)$, а именно

$$\dot{L}(t) = bR(t) = br(t)Y(t), \quad L(t_0) = L^0,$$

где параметр b , $b > 0$, определяет предельный эффект от инвестиций в человеческий капитал. Доля инвестиций в человеческий капитал $r(t)$ есть управляющий параметр, удовлетворяющий ограничениям $0 \leq r(t) \leq a_r < 1$.

В данной модели полезная работа $U(t)$ является экзогенным параметром. При этом считается, что в относительных величинах она постоянна, т.е. $u(t) = \hat{u}$, где в качестве $\hat{u}$ берется среднее значение полезной работы на душу работающего населения.

Построим динамику относительных переменных. Изменение основного капитала на душу работающего населения страны $k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{k}(t) = \left(\frac{K(t)}{P(t)} \right)' = s(t)y(t) - (\delta + \rho)k(t), \quad k(t_0) = k^0 = \frac{K^0}{P^0}.$$

Изменение эффективности труда l подчиняется динамике

$$\dot{l}(t) = \left(\frac{L(t)}{P(t)} \right)' = br(t)y(t) - \rho l(t), \quad l(t_0) = l^0 = \frac{L^0}{P^0}.$$

Окончательно производственная функция в переменных, отнесенных к численности работающего населения, принимает вид

$$f(k(t), l(t)) = F(k(t), l(t), \hat{u}).$$

Дополнительно предположим, что производственная функция является строго вогнутой по переменным k , l , т.е.

$$\frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0 \quad \forall k > 0, l > 0.$$

Функция полезности. Функцию полезности представим в виде интеграла от логарифмического индекса потребления, дисконтированного на бесконечном промежутке времени:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \ln c(t) dt. \quad (2)$$

Переменная $c(t)$ обозначает уровень потребления на душу работающего населения. В силу того что рассматривается замкнутая экономическая система, в которой прибыль $Y(t)$ тратится на потребление $C(t)$, сбережения $S(t)$ и инвестиции в повышение эффективности труда $R(t)$, получим соотношение $C(t) = Y(t) - S(t) - R(t)$. Вычисляя потребление на душу работающего населения $c(t)$, приходим к следующему балансовому уравнению:

$$c(t) = \frac{C(t)}{P(t)} = (1 - s(t) - r(t))f(k(t), l(t)). \quad (3)$$

Если допустить, что величина $s(t)r(t)$ имеет больший порядок малости, нежели слагаемые $s(t)$ и $r(t)$ по отдельности, то можно считать, что включение слагаемого $s(t)r(t)$ в (3) значительно не изменит значения потребления $c(t)$. В этом случае $c(t)$ можно вычислять по формуле

$$c(t) = (1 - r(t))(1 - s(t))f(k(t), l(t)). \quad (4)$$

Остается подставить найденное потребление (4) в функцию полезности J (2).

Задача оптимального управления. На основании описанной выше модели можно сформулировать задачу оптимального управления.

Задача. Максимизировать функционал

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\ln(1 - s(t)) + \ln(1 - r(t)) + \ln f(k(t), l(t))) dt \quad (5)$$

на траекториях $(k(\cdot), l(\cdot), s(\cdot), r(\cdot))$ динамической системы

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s(t)f(k(t), l(t)) - (\delta + \rho)k(t), \\ \dot{l}(t) = br(t)f(k(t), l(t)) - \rho l(t), \end{cases} \quad (6)$$

где управляющие воздействия $(s(\cdot), r(\cdot))$ подчиняются ограничениям

$$0 \leq s(t) \leq a_s < 1, \quad 0 \leq r(t) \leq a_r < 1, \quad 0 \leq a_s + a_r < 1, \quad (7)$$

а фазовые переменные $(k(\cdot), l(\cdot))$ удовлетворяют начальным условиям

$$k(t_0) = k^0, \quad l(t_0) = l^0. \quad (8)$$

Задача (5)–(8) может быть решена методами теории оптимального управления для задач с бесконечным горизонтом [1, 3].

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Гамильтониан задачи оптимального управления (5)–(8) задается соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, k, l; s, r; \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) = & e^{-\lambda t} (\ln(1 - s) + \ln(1 - r) + \ln f(k, l)) + \\ & + \tilde{\psi}_1 (sf(k, l) - (\delta + \rho)k) + \tilde{\psi}_2 (brf(k, l) - \rho l). \end{aligned}$$

Сопряженные переменные $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ определяют “теневую цену” капитала k и эффективности труда l соответственно.

Условия существования оптимального решения. Задача управления (5)–(8) удовлетворяет всем условиям теоремы существования [6]. Для нее можно сформулировать необходимые условия оптимальности, как для задач с бесконечным горизонтом в рамках принципа максимума Понтрягина [1].

Теорема 1. Пусть набор $(k^0, l^0; s^0, r^0)$ обозначает оптимальный процесс. Тогда существует вектор сопряженных переменных $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$, соответствующий процессу $(k^0, l^0; s^0, r^0)$ и удовлетворяющий сопряженным уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\psi}}_1 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial k}(t, k^0(t), l^0(t); s^0(t), r^0(t); \tilde{\psi}_1(t), \tilde{\psi}_2(t)), \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial l}(t, k^0(t), l^0(t); s^0(t), r^0(t); \tilde{\psi}_1(t), \tilde{\psi}_2(t)),\end{aligned}$$

такой, что

- 1) процесс $(k^0, l^0; s^0, r^0)$ удовлетворяет условиям принципа максимума Понтрягина вместе с сопряженными переменными $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$:

$$\tilde{H}(t, k^0, l^0; s^0, r^0; \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) = \max\{\tilde{H}(t, k^0, l^0; s, r; \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2); s \in [0, a_s], r \in [0, a_r]\};$$

- 2) процесс $(k^0, l^0; s^0, r^0)$ и сопряженные переменные удовлетворяют условию стационарности

$$\tilde{H}(t, k^0, l^0; s^0, r^0; \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) = \lambda \int_t^{+\infty} e^{-\lambda\tau} (\ln(1-s(\tau)) + \ln(1-r(\tau)) + \ln f(k(\tau), l(\tau))) d\tau;$$

- 3) $\tilde{\psi}_1(t) > 0$ и $\tilde{\psi}_2(t) > 0 \forall t \geq 0$;

- 4) сопряженные переменные удовлетворяют условию трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\psi}_1 k(t) + \tilde{\psi}_2 l(t)) = 0.$$

Свойства гамильтониана. Для дальнейшего анализа удобно сделать замену сопряженных переменных и гамильтониана

$$\hat{H} = \tilde{H}e^{\lambda t}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_1 e^{\lambda t}, \quad \psi_2 = \tilde{\psi}_2 e^{\lambda t}.$$

В новых переменных гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned}\hat{H}(k, l; s, r; \psi_1, \psi_2) &= \ln(1-s) + \ln(1-r) + \ln f(k, l) + \\ &+ \psi_1(s f(k, l) - (\delta + \rho)k) + \psi_2(b r f(k, l) - \rho l).\end{aligned}\tag{9}$$

Лемма 1. Гамильтониан $\hat{H}(k, l; s, r; \psi_1, \psi_2)$ (9) является строго вогнутой функцией по управляющим переменным s и r .

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно вычислить вторую производную от гамильтониана $\hat{H}(k, l; s, r; \psi_1, \psi_2)$ по управляющим переменным s и r . Итак,

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial s^2} = -\frac{1}{(1-s)^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial r^2} = -\frac{1}{(1-r)^2} < 0.$$

Лемма доказана.

Используя необходимое условие экстремума функции многих переменных

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial s} = -\frac{1}{1-s} + \psi_1 f(k, l) = 0, \quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} = -\frac{1}{1-r} + b\psi_2 f(k, l) = 0,$$

найдем значения управляющих переменных s и r , доставляющих локальный максимум гамильтониану в задаче без ограничений на управляющие воздействия:

$$s = 1 - \frac{1}{\psi_1 f(k, l)}, \quad r = 1 - \frac{1}{b\psi_2 f(k, l)}. \quad (10)$$

Для проверки достаточных условий локального максимума необходимо показать, что матрица вторых производных гамильтониана как функции управляющих переменных s и r в точке, определенной соотношениями (10), является отрицательно определенной. Матрица вторых производных имеет вид

$$\partial^2 \hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1-s)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1-r)^2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что главный минор первого порядка $-\frac{1}{(1-s)^2} < 0$ отрицательный, а главный минор второго порядка совпадает с определителем матрицы, равным $\frac{1}{((1-s)(1-r))^2} > 0$, следовательно, достаточное условие экстремума выполнено.

При учете ограничений (7) получим следующие значения управляющих переменных, максимизирующих гамильтониан $\hat{H}(k, l; s, r; \psi_1, \psi_2)$ (9):

$$s^0 = \begin{cases} 0, & \psi_1 f(k, l) \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{\psi_1 f(k, l)}, & 1 \leq \psi_1 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_s}, \\ a_s, & \psi_1 f(k, l) \geq \frac{1}{1-a_s}; \end{cases} \quad (11)$$

$$r^0 = \begin{cases} 0, & \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b}, \\ 1 - \frac{1}{b\psi_2 f(k, l)}, & \frac{1}{b} \leq \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b(1-a_r)}, \\ a_r, & \psi_2 f(k, l) \geq \frac{1}{b(1-a_r)}. \end{cases}$$

Области определения максимизированного гамильтониана. В силу найденных выражений для оптимальных управляющих воздействий s^0, r^0 (11) можно выписать области определения максимизированного гамильтониана

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = \max_{s, r} \hat{H}(k, l; s, r; \psi_1, \psi_2), \quad s \in [0, a_s], \quad r \in [0, a_r].$$

Динамика сопряженных переменных ψ_1, ψ_2 , вычисленная на основании принципа максимума Понтрягина, имеет вид

$$\dot{\psi}_1(t) = \lambda \psi_1(t) - \frac{\partial H}{\partial k}(k(t), l(t); \psi_1(t), \psi_2(t)),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \lambda \psi_2(t) - \frac{\partial H}{\partial l}(k(t), l(t); \psi_1(t), \psi_2(t)).$$

Опишем девять областей определения максимизированного гамильтониана $H(k, l; \psi_1, \psi_2)$.

1. Первая область D_{11} , определяемая как

$$D_{11} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : \psi_1 f(k, l) \leq 1 \wedge \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b} \right\},$$

задает область нулевых управлений $s^0 = 0, r^0 = 0$.

Максимизированный гамильтониан H в этой области записывается следующим образом:

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = H_{11}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \ln f(k, l) - (\delta + \rho)k\psi_1 - \rho l\psi_2.$$

Динамика фазовых и сопряженных переменных в области D_{11} принимает вид

$$\begin{cases} \dot{k} = -(\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = -\rho l, \\ \dot{\psi}_1 = (\lambda + \delta + \rho)\psi_1 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}, \\ \dot{\psi}_2 = (\lambda + \rho)\psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l}. \end{cases}$$

2. Вторая область D_{12} описывается неравенствами

$$D_{12} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2): \psi_1 f(k, l) \leq 1 \wedge \frac{1}{b} \leq \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b(1 - a_r)} \right\}$$

и определяет следующие оптимальные управляющие режимы:

$$s^0 = 0, \quad r^0 = 1 - \frac{1}{b\psi_2 f(k, l)}.$$

В этой области максимизированный гамильтониан H имеет вид

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = H_{12}(k, l; \psi_1, \psi_2) = b\psi_2 f(k, l) - \ln(b\psi_2) - (\delta + \rho)k\psi_1 - \rho l\psi_2 - 1.$$

Запишем гамильтонову систему в области D_{12}

$$\begin{cases} \dot{k} = -(\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = bf(k, l) - \rho l - \frac{1}{\psi_2}, \\ \dot{\psi}_1 = (\lambda + \delta + \rho)\psi_1 - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = \left(\lambda + \rho - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2. \end{cases}$$

3. Третья область D_{13} определяется ограничениями

$$D_{13} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2): \psi_1 f(k, l) \leq 1 \wedge \psi_2 f(k, l) \geq \frac{1}{b(1 - a_r)} \right\}.$$

В ней управляющий режим задается равенствами $s^0 = 0$, $r^0 = a_r$.

Максимизированный гамильтониан H запишется в виде

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = H_{13}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \ln(1 - a_r) + \ln f(k, l) - (\delta + \rho)k\psi_1 + (ba_r f(k, l) - \rho l)\psi_2.$$

Гамильтонова система в этой области принимает вид

$$\begin{cases} \dot{k} = -(\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = ba_r f(k, l) - \rho l, \\ \dot{\psi}_1 = (\lambda + \delta + \rho)\psi_1 - ba_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}, \\ \dot{\psi}_2 = \left(\lambda + \rho - ba_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l}. \end{cases}$$

4. Четвертая область D_{21} описывается неравенствами

$$D_{21} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : 1 \leq \psi_1 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_s} \wedge \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b} \right\}.$$

Оптимальные управления в этой области равны

$$s^0 = 1 - \frac{1}{\psi_1 f(k, l)}, \quad r^0 = 0.$$

Максимизированный гамильтониан здесь приобретает вид

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = H_{21}(k, l; \psi_1, \psi_2) = -\ln \psi_1 + \psi_1 f(k, l) - (\delta + \rho)k\psi_1 - \rho l\psi_2 - 1.$$

Динамика фазовых и сопряженных переменных в D_{21} задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k, l) - (\delta + \rho)k - \frac{1}{\psi_1}, \\ \dot{l} = -\rho l, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + (\lambda + \rho)\psi_2. \end{cases}$$

5. Область непостоянных управлений D_{22} описывается неравенствами

$$D_{22} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : 1 \leq \psi_1 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_s} \wedge \frac{1}{b} \leq \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b(1-a_r)} \right\}.$$

Управления здесь определяются соотношениями

$$s^0 = 1 - \frac{1}{\psi_1 f(k, l)}, \quad r^0 = 1 - \frac{1}{b\psi_2 f(k, l)}.$$

Максимизированный гамильтониан записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} H(k, l; \psi_1, \psi_2) &= H_{22}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \\ &= -\ln f(k, l) - \ln \psi_1 - \ln \psi_2 + (f(k, l) - (\delta + \rho)k)\psi_1 + (bf(k, l) - \rho l)\psi_2 - 2 - \ln b. \end{aligned}$$

Гамильтонова система в D_{22} приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k, l) - (\delta + \rho)k - \frac{1}{\psi_1}, \\ \dot{l} = bf(k, l) - \rho l - \frac{1}{\psi_2}, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1 - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2 + \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + \left(\lambda + \rho - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2 + \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l}. \end{cases}$$

6. Шестая область D_{23} задается ограничениями

$$D_{23} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : 1 \leq \psi_1 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_s} \wedge \psi_2 f(k, l) \geq \frac{1}{b(1-a_r)} \right\}$$

и порождена управляющим режимом

$$s^0 = 1 - \frac{1}{\psi_1 f(k, l)}, \quad r^0 = a_r.$$

Максимизированный гамильтониан H здесь принимает вид

$$\begin{aligned} H(k, l; \psi_1, \psi_2) &= H_{23}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \\ &= -\ln \psi_1 + \ln(1 - a_r) + (f(k, l) - (\delta + \rho)k)\psi_1 + (ba_r f(k, l) - \rho l)\psi_2 - 1. \end{aligned}$$

Динамика фазовых и сопряженных переменных в области D_{23} определяется дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k, l) - (\delta + \rho)k - \frac{1}{\psi_1}, \\ \dot{l} = ba_r f(k, l) - \rho l, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1 - ba_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + \left(\lambda + \rho - ba_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2. \end{cases}$$

7. Седьмая область D_{31} описывается неравенствами

$$D_{31} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : \psi_1 f(k, l) \geq \frac{1}{1 - a_s} \wedge \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b} \right\}$$

и определяет управляющий режим, при котором $s^0 = a_s$, $r^0 = 0$.

Максимизированный гамильтониан H в D_{31} принимает вид

$$H(k, l; \psi_1, \psi_2) = H_{31}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \ln f(k, l) + (a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k)\psi_1 - \rho l \psi_2 + \ln(1 - a_s).$$

Гамильтонова система в области D_{31} имеет вид

$$\begin{cases} \dot{k} = a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = -\rho l, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}, \\ \dot{\psi}_2 = -a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + (\lambda + \rho)\psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l}. \end{cases}$$

8. Восьмая область D_{32} определяется ограничениями

$$D_{32} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : \psi_1 f(k, l) \geq \frac{1}{1 - a_s} \wedge \frac{1}{b} \leq \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b(1 - a_r)} \right\}$$

и порождена управляющим режимом

$$s^0 = a_s, \quad r^0 = 1 - \frac{1}{b\psi_2 f(k, l)}.$$

Максимизированный гамильтониан H определяется соотношением

$$\begin{aligned} H(k, l; \psi_1, \psi_2) &= H_{32}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \\ &= -\ln \psi_2 + (a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k)\psi_1 + (bf(k, l) - \rho l)\psi_2 + \ln \frac{1 - a_s}{b} - 1. \end{aligned}$$

Динамика фазовых и сопряженных переменных в области D_{32} определяется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{k} = a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = b f(k, l) - \rho l - \frac{1}{\psi_2}, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1 - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + \left(\lambda + \rho - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2. \end{cases}$$

9. Область насыщенного управления D_{33} задается ограничениями

$$D_{33} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : \psi_1 f(k, l) \geq \frac{1}{1 - a_s} \wedge \psi_2 f(k, l) \geq \frac{1}{b(1 - a_r)} \right\}.$$

В этой области управления определяются их максимально возможными значениями $s^0 = a_s$, $r^0 = a_r$.

Максимизированный гамильтониан приобретает вид

$$\begin{aligned} H(k, l; \psi_1, \psi_2) &= H_{33}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \\ &= \ln f(k, l) + (a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k) \psi_1 + (b a_r f(k, l) - \rho l) \psi_2 + \ln(1 - a_s)(1 - a_r). \end{aligned}$$

В области D_{33} гамильтонова система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{k} = a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k, \\ \dot{l} = b a_r f(k, l) - \rho l, \\ \dot{\psi}_1 = \left(\lambda + \delta + \rho - a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right) \psi_1 - b a_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}, \\ \dot{\psi}_2 = -a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + \left(\lambda + \rho - b a_r \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right) \psi_2 - \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l}. \end{cases}$$

На рис. 1 изображены перечисленные выше области D_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, в системе фазовых координат k, l при фиксированных значениях сопряженных переменных ψ_1, ψ_2 .

Лемма 2. Максимизированный гамильтониан гладко склеивается из ветвей H_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$, по переменным k, l, ψ_1, ψ_2 на границах областей D_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$.

Доказательство. В силу того что граничных областей в данном случае 12, приведем доказательство для одной из них, так как гладкость гамильтониана на иных границах проверяется аналогично. Рассмотрим границу между областями D_{22} и D_{32} , которая определяется следующим образом:

$$D_{22} \cap D_{32} = \left\{ (k, l; \psi_1, \psi_2) : \psi_1 f(k, l) = \frac{1}{1 - a_s} \wedge \frac{1}{b} \leq \psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{b(1 - a_r)} \right\}.$$

Гамильтонианы в областях D_{22} и D_{32} имеют вид

$$H_{22}(k, l; \psi_1, \psi_2) = -2 - \ln b - \ln \psi_1 - \ln \psi_2 - \ln f(k, l) + (f(k, l) - (\delta + \rho)k) \psi_1 + (b f(k, l) - \rho l) \psi_2,$$

$$H_{32}(k, l; \psi_1, \psi_2) = \ln(1 - a_s) - 1 - \ln b - \ln \psi_2 + (a_s f(k, l) - (\delta + \rho)k) \psi_1 + (b f(k, l) - \rho l) \psi_2.$$

Рис. 1. Области определения максимизированного гамильтониана D_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$

Проверим непрерывность гамильтониана на границе $D_{22} \cap D_{32}$:

$$\begin{aligned} H_{22}|_{D_{22} \cap D_{32}} - H_{32}|_{D_{22} \cap D_{32}} &= -\ln \psi_1 - \ln f(k, l) + \psi_1 f(k, l) - 1 - a_s f(k, l) \psi_1 - \ln(1 - a_s)|_{D_{22} \cap D_{32}} = \\ &= -\ln((1 - a_s)f(k, l)\psi_1) + (1 - a_s)f(k, l)\psi_1 - 1|_{D_{22} \cap D_{32}} = 0. \end{aligned}$$

Теперь проверим равенство всех частных производных первого порядка на границе областей D_{22} и D_{32} .

Дифференцирование по переменной k дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{22}}{\partial k} - \frac{\partial H_{32}}{\partial k} \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} &= -\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} + \left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial k} - \delta - \rho \right) \psi_1 + \\ &+ b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2 - \left(a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} - \delta - \rho \right) \psi_1 - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \psi_2 \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = \\ &= \left(-\frac{1}{f(k, l)} + (1 - a_s)\psi_1 \right) \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = 0, \end{aligned}$$

так как выражение в скобке равно нулю на границе $D_{22} \cap D_{32}$.

Проверим равенство частных производных по второй переменной l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{22}}{\partial l} - \frac{\partial H_{32}}{\partial l} \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} &= -\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} + \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 + \\ &+ \left(b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} - \rho \right) \psi_2 - a_s \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \psi_1 - \left(b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} - \rho \right) \psi_2 \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = \\ &= \left(-\frac{1}{f(k, l)} + (1 - a_s)\psi_1 \right) \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = 0, \end{aligned}$$

так как выражение в скобках равно нулю на границе областей D_{22} и D_{32} .

Осталось проверить равенство частных производных по сопряженным переменным ψ_1 и ψ_2 :

$$\frac{\partial H_{22}}{\partial \psi_1} - \frac{\partial H_{32}}{\partial \psi_1} \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = -\frac{1}{\psi_1} + (1 - a_s)f(k, l) \Big|_{D_{22} \cap D_{32}} = 0,$$

так как из определения границы $D_{22} \cap D_{32}$ справедливо равенство $\psi_1 f(k, l) = \frac{1}{1-a_s}$. Совпадение частных производных по второй сопряженной переменной очевидно, поскольку ψ_2 входит в выражения H_{22} и H_{32} одинаково.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Максимизированный гамильтониан $H(k, l; \psi_1, \psi_2)$ является строго вогнутой функцией по переменным k и l в областях определения D_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$, при любых положительных значениях сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2 , если выполнены неравенства*

$$\left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + f(k, l) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + f(k, l) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.$$

Доказательство. Найдем чистые вторые частные производные от максимизированного гамильтониана по переменным k и l в каждой из областей его определения.

В области D_{11}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial k^2} &= - \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \\ \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial l^2} &= - \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0. \end{aligned}$$

В области D_{12}

$$\frac{\partial^2 H_{12}}{\partial k^2} = b\psi_2 \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial l^2} = b\psi_2 \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.$$

В области D_{13}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial k^2} &= - \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_r b\psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \\ \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial l^2} &= - \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_r b\psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0. \end{aligned}$$

В области D_{21}

$$\frac{\partial^2 H_{21}}{\partial k^2} = \psi_1 \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H_{21}}{\partial l^2} = \psi_1 \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.$$

Для проведения доказательства вогнутости гамильтониана в области D_{22} напомним ограничения, которыми она определяется:

$$1 \leq \psi_1 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_s}, \quad 1 \leq b\psi_2 f(k, l) \leq \frac{1}{1-a_r}.$$

Исходя из этих неравенств справедливо следующее:

$$\psi_1 f(k, l) - 1 + b\psi_2 f(k, l) \geq 1.$$

Итак, найдем вторые частные производные для переменных k и l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{22}}{\partial k^2} &= \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + \left(-\frac{1}{f(k, l)} + \psi_1 + b\psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} = \\ &= \frac{1}{f(k, l)^2} \left(\left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + f(k, l)(\psi_1 f(k, l) - 1 + b\psi_2 f(k, l)) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{f(k, l)^2} \left(\left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + f(k, l) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} \right) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_{22}}{\partial l^2} &= \left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + \left(-\frac{1}{f(k, l)} + \psi_1 + b\psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} = \\ &= \frac{1}{f(k, l)^2} \left(\left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + f(k, l)(\psi_1 f(k, l) - 1 + b\psi_2 f(k, l)) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{f(k, l)^2} \left(\left(\frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + f(k, l) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} \right) < 0.\end{aligned}$$

В области D_{23}

$$\frac{\partial^2 H_{23}}{\partial k^2} = (\psi_1 + a_r b \psi_2) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H_{23}}{\partial l^2} = (\psi_1 + a_r b \psi_2) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.$$

В области D_{31}

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_{31}}{\partial k^2} &= -\left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_s \psi_1 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \\ \frac{\partial^2 H_{31}}{\partial l^2} &= -\left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_s \psi_1 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.\end{aligned}$$

В области D_{32}

$$\frac{\partial^2 H_{32}}{\partial k^2} = (a_s \psi_1 + b \psi_2) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H_{32}}{\partial l^2} = (a_s \psi_1 + b \psi_2) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.$$

В области D_{33}

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_{33}}{\partial k^2} &= -\left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_s \psi_1 + a_r b \psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} < 0, \\ \frac{\partial^2 H_{33}}{\partial l^2} &= -\left(\frac{1}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{1}{f(k, l)} + a_s \psi_1 + a_r b \psi_2 \right) \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial l^2} < 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Достаточные условия оптимальности.

Теорема 2. В условиях, обеспечивающих гладкость по переменным $(k, l; \psi_1, \psi_2)$ и строгой вогнутость по переменным (k, l) максимизированного гамильтониана, принцип максимума Понтрягина дает достаточные условия оптимальности.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [3].

Точки равновесия гамильтоновой системы. Дальнейший анализ гамильтоновых систем удобно проводить в системе переменных $(k, l; z_1, z_2)$, где $z_1 = \psi_1 k$, $z_2 = \psi_2 l$.

Стационарные точки гамильтоновой системы могут существовать только в областях D_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$, порожденных ненулевыми управляющими режимами, а именно D_{22} , D_{23} , D_{32} , D_{33} . Рассмотрим возможное местоположение стационарных точек системы. Для удобства введем следующие обозначения:

$$a_k = \frac{f(k, l)}{k}, \quad a_l = b \frac{f(k, l)}{l}. \quad (12)$$

Здесь и далее будет рассматриваться производственная функция Кобба–Дугласа

$$f(k, l) = \mu k^\alpha l^\beta, \quad (13)$$

где μ — заданный положительный параметр, а величины α , β являются коэффициентами эластичности, удовлетворяющими условиям

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq 1. \quad (14)$$

Ограничения сверху на коэффициенты эластичности необходимы для выполнения условий леммы 3 о строгой вогнутости максимизированного гамильтониана по фазовым переменным.

Основываясь на определении производственной функции (13), можно выписать соотношения для частных производных, удобные для анализа положения равновесия, а также получить формулу, которая связывает введенные величины:

$$\frac{\partial f(k, l)}{\partial k} = \alpha a_k, \quad \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} = \frac{\beta}{b} a_l, \quad \frac{a_k}{a_l} = \frac{l}{bk}.$$

Координаты k^* и l^* стационарной точки могут быть легко найдены, если известны величины a_k , a_l .

Решим системы нелинейных уравнений, доставляющих координаты положения равновесия в областях D_{22} , D_{23} , D_{32} , D_{33} .

1. В области D_{22} , вообще говоря, могут существовать два положения равновесия. Первое определяется соотношением

$$a_k^* = \frac{\lambda(1-\beta)}{\alpha-1}, \quad a_l^* = \frac{\lambda(\alpha-1)}{1-\beta}, \quad z_1^* = \frac{1}{a_k^* - (\delta + \rho)}, \quad z_2^* = \frac{1}{a_l^* - \rho}.$$

Второе положение равновесия имеет аналогичные координаты сопряженных переменных, однако величины a_k^* и a_l^* вычисляются по формулам

$$a_k^* = \frac{(\lambda + (1-\beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho)}{\alpha(\lambda + \rho)}, \quad a_l^* = \frac{(\lambda + (1-\alpha)(\delta + \rho))(\lambda + \rho)}{\beta(\delta + \lambda + \rho)}.$$

Координаты стационарной точки в области D_{22} должны удовлетворять условиям

$$a_k^* > \delta + \rho > 0, \quad a_l^* > \rho > 0, \quad a_s \geq \frac{\delta + \rho}{a_k^*}, \quad a_r \geq \frac{\rho}{a_l^*}.$$

Оптимальные управляющие воздействия в стационарной точке принимают значения

$$s^* = \frac{\delta + \rho}{a_k^*} \leq a_s < 1, \quad r^* = \frac{\rho}{a_l^*} \leq a_r < 1.$$

2. В области D_{23} если существует, то существует единственное положение равновесия, координаты которого определяются следующим образом:

$$a_k^* = \frac{(\lambda + (1-\beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho)}{\alpha(\lambda + \rho)}, \quad a_l^* = \frac{\rho}{a_r},$$

$$z_1^* = \frac{1}{a_k^* - (\delta + \rho)}, \quad z_2^* = \frac{\beta(\delta + \lambda + \rho)}{(\lambda + (1-\beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho) - \alpha(\delta + \rho)(\lambda + \rho)}.$$

Ограничения на координаты стационарной точки в этой области запишутся в виде

$$a_k^* > \delta + \rho > 0, \quad z_2^* > 0, \quad a_s \geq \frac{\delta + \rho}{a_k^*}, \quad a_r \leq \frac{\rho z_2^*}{\rho z_2^* + 1}.$$

Оптимальные управления принимают в найденном положении равновесия значения

$$s^* = \frac{\delta + \rho}{a_k^*} \leq a_s < 1, \quad r^* = a_r.$$

3. В области D_{32} возможно только одно положение равновесия. Координаты равновесной точки определяются соотношениями

$$a_k^* = \frac{\delta + \rho}{a_s}, \quad a_l^* = \frac{(\delta + \lambda + \rho)(\lambda + \rho) - \alpha(\lambda + \rho)(\delta + \rho)}{\beta(\delta + \lambda + \rho)},$$

$$z_1^* = \frac{\alpha(\lambda + \rho)}{(\lambda + (1 - \beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho) - \alpha(\lambda + \rho)(\delta + \rho)}, \quad z_2^* = \frac{1}{a_l^* - \rho}$$

и должны удовлетворять ограничениям

$$a_l^* > \rho > 0, \quad z_1^* > 0, \quad a_s \leq \frac{(\delta + \rho)z_1^*}{(\delta + \rho)z_1^* + 1}, \quad a_r \geq \frac{\rho}{a_l^*}.$$

Управляющие воздействия в положении равновесия принимают значения

$$s^* = a_s, \quad r^* = \frac{\rho}{a_l^*} \leq a_r < 1.$$

4. В области D_{33} стационарная точка если есть, то единственна и ее координаты определяются соотношениями

$$a_k^* = \frac{\delta + \rho}{a_s}, \quad z_1^* = \frac{\alpha(\lambda + \rho)}{(\lambda + (1 - \beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho) - \alpha(\lambda + \rho)(\delta + \rho)},$$

$$a_l^* = \frac{\rho}{a_r}, \quad z_2^* = \frac{\beta(\delta + \lambda + \rho)}{(\lambda + (1 - \beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho) - \alpha(\delta + \rho)(\lambda + \rho)},$$

которые должны удовлетворять условиям

$$z_1^* > 0, \quad z_2^* > 0, \quad a_s \leq \frac{(\delta + \rho)z_1^*}{(\delta + \rho)z_1^* + 1}, \quad a_r \leq \frac{\rho z_2^*}{\rho z_2^* + 1}.$$

Значения управляющих воздействий в стационарном положении здесь определяются равенствами $s^* = a_s$, $r^* = a_r$.

Гамильтонова система в области непостоянных управлений. Область непостоянных управляющих режимов была обозначена выше D_{22} и определялась ограничениями

$$D_{22} = \left\{ (k, l; z_1, z_2) : k \leq z_1 f(k, l) \leq \frac{k}{1 - a_s} \wedge \frac{l}{b} \leq z_2 f(k, l) \leq \frac{l}{b(1 - a_r)} \right\}. \quad (15)$$

Управляющий режим задается здесь выражениями

$$s^0 = 1 - \frac{k}{z_1 f(k, l)}, \quad r^0 = 1 - \frac{l}{b z_2 f(k, l)}. \quad (16)$$

Гамильтонова система в этой области имеет вид

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k, l) - (\delta + \rho)k - \frac{k}{z_1} = H_1(k, l, z_1, z_2), \\ \dot{l} = b f(k, l) - \rho l - \frac{l}{z_2} = H_2(k, l, z_1, z_2), \\ \dot{z}_1 = \left(\lambda - \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} + \frac{f(k, l)}{k} \right) z_1 - b \frac{k}{l} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} z_2 + \frac{k}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} - 1 = H_3(k, l, z_1, z_2), \\ \dot{z}_2 = -\frac{l}{k} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} z_1 + \left(\lambda - b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} + b \frac{f(k, l)}{l} \right) z_2 + \frac{l}{f(k, l)} \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} - 1 = H_4(k, l, z_1, z_2). \end{cases} \quad (17)$$

Положение равновесия в этой области имеет координаты

$$\begin{aligned} a_k^* &= \frac{(\lambda + (1 - \beta)\rho)(\delta + \lambda + \rho)}{\alpha(\lambda + \rho)}, & a_l^* &= \frac{(\lambda + (1 - \alpha)(\delta + \rho))(\lambda + \rho)}{\beta(\delta + \lambda + \rho)}, \\ z_1^* &= \frac{1}{a_k^* - (\delta + \rho)}, & z_2^* &= \frac{1}{a_l^* - \rho}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя найденные величины a_k^* и a_l^* (18), вычислим координаты положения равновесия для фазовых переменных, так как в случае с производственной функцией Кобба–Дугласа (13) из соотношений (12) можно выразить фазовые переменные k и l :

$$k^* = \left(\frac{\mu}{a_k^*} \left(\frac{ba_k^*}{a_l^*} \right)^\beta \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \quad l^* = \left(\frac{\mu}{a_l^*} \left(\frac{ba_k^*}{a_l^*} \right)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Управляющие переменные определяются соотношениями

$$s^* = \frac{\delta + \rho}{a_k^*}, \quad r^* = \frac{\rho}{a_l^*}.$$

Линеаризованная в окрестности положения равновесия гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{k} = -(1 - \alpha)a_k^*(k - k^*) + \frac{\beta a_l^*}{b}(l - l^*) + k^*(a_k^* - \delta - \rho)^2(z_1 - z_1^*), \\ \dot{l} = \alpha b a_k^*(k - k^*) + (1 - \beta)a_l^*(l - l^*) + l^*(a_l^* - \rho)^2(z_2 - z_2^*), \\ \dot{z}_1 = -\frac{1}{k^*} \left(\frac{(1 - \alpha)^2 a_k^*}{a_k^* - \delta - \rho} + \frac{\alpha^2 a_l^*}{a_l^* - \rho} \right) (k - k^*) + \frac{1}{l^*} \left(\frac{(1 - \alpha)\beta a_k^*}{a_k^* - \delta - \rho} + \frac{\alpha(1 - \beta)a_l^*}{a_l^* - \rho} \right) (l - l^*) + \\ \quad + (\lambda + (1 - \alpha)a_k^*)(z_1 - z_1^*) - \alpha a_l^*(z_2 - z_2^*), \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{k^*} \left(\frac{(1 - \alpha)\beta a_k^*}{a_k^* - \delta - \rho} + \frac{\alpha(1 - \beta)a_l^*}{a_l^* - \rho} \right) (k - k^*) - \frac{1}{l^*} \left(\frac{\beta^2 a_k^*}{a_k^* - \delta - \rho} + \frac{(1 - \beta)^2 a_l^*}{a_l^* - \rho} \right) (l - l^*) - \\ \quad - \beta a_k^*(z_1 - z_1^*) + (\lambda + (1 - \beta)a_l^*)(z_2 - z_2^*). \end{cases} \quad (19)$$

Матрицу линеаризованной гамильтоновой системы будем обозначать символом I .

Аналитического представления для собственных значений линеаризованной гамильтоновой системы не получено. Они будут найдены численно.

РЕГУЛЯТОР ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Построение регулятора. Попытаемся построить такой регулятор в области непостоянных управлений D_{22} , который позволил бы, во-первых, исключить сопряженные переменные из гамильтоновой системы, во-вторых, сохранить стационарную точку и, в-третьих, стабилизировать систему в установившемся состоянии.

Относительно линеаризованной гамильтоновой системы предположим, что она имеет четыре различных действительных собственных значения, причем два из них отрицательны, обозначим их λ_1 и λ_2 , а два других λ_3 и λ_4 положительны. В численных экспериментах, проведенных на основании описанной выше модели, данное условие выполнялось.

Собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, обозначим соответственно h_1, h_2, h_3, h_4 . Координаты векторов будем обозначать h_{ij} , $i, j = \overline{1, 4}$, где i — номер собственного вектора, а j — номер координаты. Из линейной алгебры известно, что в случае, когда линейный оператор имеет различные действительные собственные значения, его собственные векторы образуют базис.

Попытаемся исключить сопряженные переменные из гамильтоновой системы.

Обозначим символом $\mathcal{I}$ оператор, соответствующий матрице I (19) и действующий в касательном пространстве к исходному пространству в стационарной точке $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$. Так как линеаризованная в окрестности положения равновесия гамильтонова система имеет четыре различных действительных собственных значения, то оператор $\mathcal{I}$ в базисе, состоящем из собственных векторов, имеет матрицу диагонального вида.

Рассмотрим подпространство π_{12} в касательном пространстве, натянутое на собственные векторы h_1 и h_2 , отвечающие отрицательным собственным значениям. Обозначим через $\bar{\mathcal{I}}$ сужение оператора $\mathcal{I}$ на подпространство π_{12} .

Обозначим символом $\tilde{\pi}_{12}$ плоскость в исходном пространстве, параллельную плоскости π_{12} в касательном пространстве и проходящую через стационарную точку $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$. Тогда координаты точек этой плоскости можно представить в виде

$$\begin{aligned} k - k^* &= \nu_1 h_{11} + \nu_2 h_{21}, \\ l - l^* &= \nu_1 h_{12} + \nu_2 h_{22}, \\ z_1 - z_1^* &= \nu_1 h_{13} + \nu_2 h_{23}, \\ z_2 - z_2^* &= \nu_1 h_{14} + \nu_2 h_{24}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из первых двух равенств (20) выразим ν_1 и ν_2 . Подставим их представления в последние два выражения (20), откуда получим уравнения плоскости в исходной системе координат:

$$\begin{aligned} z_1 - z_1^* &= \gamma_{11}(k - k^*) + \gamma_{12}(l - l^*), \\ z_2 - z_2^* &= \gamma_{21}(k - k^*) + \gamma_{22}(l - l^*), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\gamma_{11} = -\frac{\begin{vmatrix} h_{12} & h_{13} \\ h_{22} & h_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}}, \quad \gamma_{12} = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{21} & h_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}}, \quad \gamma_{21} = -\frac{\begin{vmatrix} h_{12} & h_{14} \\ h_{22} & h_{24} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{14} \\ h_{21} & h_{24} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}}.$$

Из уравнений (21), описывающих плоскость $\tilde{\pi}_{12}$, можно выразить z_1 и z_2 :

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1^* + \gamma_{11}(k - k^*) + \gamma_{12}(l - l^*) = z_1(k, l), \\ z_2 &= z_2^* + \gamma_{21}(k - k^*) + \gamma_{22}(l - l^*) = z_2(k, l). \end{aligned} \quad (22)$$

Полученное представление для сопряженных переменных подставим в формулы (16), определяющие оптимальное управление в области D_{22} :

$$\hat{s}(k, l) = 1 - \frac{k}{z_1(k, l)f(k, l)}, \quad \hat{r}(k, l) = 1 - \frac{l}{bz_2(k, l)f(k, l)}. \quad (23)$$

В качестве искомого регулятора предлагается взять построенные управления $\hat{s}(k, l)$, $\hat{r}(k, l)$ (23).

Стабилизированная гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k, l) - (\delta + \rho)k - \frac{k}{z_1(k, l)} = G_1(k, l), \\ \dot{l} = bf(k, l) - \rho l - \frac{l}{z_2(k, l)} = G_2(k, l). \end{cases} \quad (24)$$

Построенная динамика для фазовых переменных k, l обладает следующим свойством.

Лемма 4. *Построенный нелинейный регулятор порождает нелинейную систему, имеющую стационарную точку, координаты которой совпадают с положением равновесия фазовых переменных k и l исходной гамильтоновой системы.*

Доказательство. Необходимо проверить, что стабилизированная гамильтонова система (24) имеет положение равновесия в точке с координатами (k^*, l^*) , где $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$ — координаты стационарной точки исходной гамильтоновой системы. В силу определения $z_1(k, l)$ и $z_2(k, l)$ (22) очевидно, что $z_1(k^*, l^*) = z_1^*$ и $z_2(k^*, l^*) = z_2^*$. Тогда при подстановке в правые части системы (24) координат стационарной точки, учитывая соотношения (12) и (18), получим

$$\begin{aligned} f(k^*, l^*) - (\delta + \rho)k^* - \frac{k^*}{z_1(k^*, l^*)} &= k^* \left(\frac{f(k^*, l^*)}{k^*} - (\delta + \rho) + \frac{1}{z_1^*} \right) = 0, \\ bf(k^*, l^*) - \rho l^* - \frac{l^*}{z_2(k^*, l^*)} &= l^* \left(\frac{bf(k^*, l^*)}{l^*} - \rho + \frac{1}{z_2^*} \right) = 0. \end{aligned}$$

Значит, положение равновесия сохраняется.

Лемма доказана.

Будем описывать точки плоскости $\tilde{\pi}_{12}$ с помощью координат (k, l) . Тогда в этих координатах матрица оператора $\bar{\mathcal{I}}$ получается подстановкой соотношений (22) в первые два уравнения линеаризованной гамильтоновой системы (19) и имеет вид

$$\bar{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} -(1 - \alpha)a_k^* + \gamma_{11}k^*(a_k^* - \delta - \rho)^2 & \frac{\beta a_l^*}{b} + \gamma_{12}k^*(a_k^* - \delta - \rho)^2 \\ \alpha b a_k^* + \gamma_{21}l^*(a_l^* - \rho)^2 & (1 - \beta)a_l^* + \gamma_{22}l^*(a_l^* - \rho)^2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Лемма 5. *Матрица $\bar{\mathcal{I}}$ оператора $\bar{\mathcal{I}}$, полученного сужением исходного оператора $\mathcal{I}$ на подпространство, которое порождается собственными векторами h_1 и h_2 , отвечающими отрицательным собственным значениям, является матрицей линеаризованной стабилизированной гамильтоновой системы.*

Доказательство. Построим для стабилизированной гамильтоновой системы (24) соответствующую ей линеаризованную систему в окрестности стационарной точки с координатами (k^*, l^*) . Для этого найдем частные производные от функций $G_i(k, l)$, $i = 1, 2$, стоящих в правых частях системы, по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_1(k, l)}{\partial k} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} &= \left. \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} - (\delta + \rho) - \frac{1}{z_1(k, l)} + \frac{k}{z_1^2(k, l)} \frac{\partial z_1(k, l)}{\partial k} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \\ &= \alpha a_k^* - (\delta + \rho) - (a_k^* - (\delta + \rho)) + \frac{\gamma_{11}k^*}{(z_1^*)^2} = -(1 - \alpha)a_k^* + \gamma_{11}k^*(a_k^* - \delta - \rho)^2, \\ \left. \frac{\partial G_1(k, l)}{\partial l} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} &= \left. \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} + \frac{k}{z_1^2(k, l)} \frac{\partial z_1(k, l)}{\partial l} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \left. \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} + \frac{\gamma_{12}k}{z_1^2(k, l)} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \\ &= \frac{\beta}{b}a_l^* + \frac{\gamma_{12}k^*}{(z_1^*)^2} = \frac{\beta a_l^*}{b} + \gamma_{12}k^*(a_k^* - \delta - \rho)^2, \\ \left. \frac{\partial G_2(k, l)}{\partial k} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} &= \left. b \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} + \frac{l}{z_2^2(k, l)} \frac{\partial z_2(k, l)}{\partial k} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \left. b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} + \frac{\gamma_{21}l}{z_2^2(k, l)} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \\ &= \alpha b a_k^* + \frac{\gamma_{21}l^*}{(z_2^*)^2} = \alpha b a_k^* + \gamma_{21}l^*(a_l^* - \rho)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_2(k, l)}{\partial l} \right|_{(k, l) = (k^*, l^*)} &= b \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} - \rho - \frac{1}{z_2(k, l)} + \frac{l}{z_2^2(k, l)} \frac{\partial z_2(k, l)}{\partial l} \Big|_{(k, l) = (k^*, l^*)} = \\ &= \beta a_l^* - \rho - (a_l^* - \rho) + \frac{\gamma_{22} l^*}{(z_2^*)^2} = (1 - \beta) a_l^* + \gamma_{22} l^* (a_l^* - \rho)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица линеаризованной стабилизированной гамильтоновой системы совпадает с матрицей $\bar{I}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Построенный оператор $\bar{\mathcal{I}}$, действующий в подпространстве $\tilde{\pi}_{12}$, обладает следующими свойствами:

- 1) имеет два различных собственных значения, совпадающих с собственными значениями λ_1, λ_2 исходного оператора $\mathcal{I}$;
- 2) собственные векторы $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ оператора $\bar{\mathcal{I}}$ имеют соответственно координаты

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} + \gamma_{11}h_{13} + \gamma_{21}h_{14} \\ h_{12} + \gamma_{12}h_{13} + \gamma_{22}h_{14} \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{21} + \gamma_{11}h_{23} + \gamma_{21}h_{24} \\ h_{22} + \gamma_{12}h_{23} + \gamma_{22}h_{24} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Доказательство. 1. Так как оператор $\bar{\mathcal{I}}$ является сужением исходного оператора $\mathcal{I}$ на инвариантное подпространство, образованное собственными векторами, отвечающими собственным значениям λ_1 и λ_2 , то он имеет те же собственные значения.

2. Векторы h_1 и h_2 исходном базисе имеют вид

$$h_i = h_{i1}(k - k^*) + h_{i2}(l - l^*) + h_{i3}(z_1 - z_1^*) + h_{i4}(z_2 - z_2^*), \quad i = 1, 2.$$

Используя равенства (22), получим

$$h_i = (h_{i1} + \gamma_{11}h_{i3} + \gamma_{21}h_{i4})(k - k^*) + (h_{i2} + \gamma_{12}h_{i3} + \gamma_{22}h_{i4})(l - l^*), \quad i = 1, 2.$$

Лемма доказана.

Возвращаясь к задаче анализа построенного нелинейного регулятора (23), сформулируем теорему.

Теорема 3. Допустим, что линеаризованная в окрестности положения равновесия $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$ гамильтонова система, построенная в области непостоянных управлений D_{22} , удовлетворяет следующим условиям:

- 1) имеет четыре различных собственных значения, причем два из них λ_1 и λ_2 отрицательны, а два других λ_3 и λ_4 положительны;
- 2) координаты векторов жорданова базиса $h_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14})^T$, $h_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24})^T$, отвечающих отрицательным собственным значениям, удовлетворяют условию $h_{11}h_{22} \neq h_{12}h_{21}$.

Тогда для нее существует нелинейный регулятор вида (23), который

- 1) порождает систему, замкнутую относительно фазовых переменных k, l ;
- 2) обладает стационарной точкой (k^*, l^*) , координаты которой совпадают с фазовыми координатами стационарной точки $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$ исходной гамильтоновой системы;
- 3) стабилизирует систему в установившемся состоянии;
- 4) имеет собственные векторы вида (26).

Доказательство. 1. По построению нелинейного регулятора порождаемая им стабилизированная система (24) оказывается замкнутой относительно фазовых переменных. Второе условие теоремы позволяет выразить сопряженные переменные через фазовые (22).

2. Доказательство этого свойства приведено в лемме 4.

3, 4. Эти утверждения теоремы доказываются в лемме 6.

Теорема доказана.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вычисления проводились на основании данных об экономике США за период с 1900 по 2005 г., приведенных к значениям 1900 г. Калибровка параметров модели дала следующие значения параметров: $\mu = 2.19942$, $\alpha = 0.31$, $\beta = 0.09$, $\lambda = 0.03$, $\delta = 0.2$, $\rho = 0.013$, $b = 0.0155$, $a_s = 0.3$, $a_r = 0.2$, $k^0 = 1$, $l^0 = 1$.

Положение равновесия гамильтоновой системы имеет координаты $k^* = 5.75$, $l^* = 5.2$, $z_1^* = 1.8188$, $z_2^* = 2.9684$. Управляющие воздействия в точке равновесия принимают значения $s^* = 27.95$, $r^* = 3.79$.

Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов

Собственные числа матрицы I , вычисленной в точке положения равновесия $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$, являются различными действительными числами, причем два из них положительны, а два других отрицательны: $\lambda_1 = -0.5166$, $\lambda_2 = -0.2641$, $\lambda_3 = 0.5466$, $\lambda_4 = 0.2941$.

Траектории системы (24), порожденной нелинейным стабилизатором (23), найдены численным методом Рунге–Кутты.

На рис. 2, *а* показана модельная траектория капитала на душу населения $k(t)$. Как видно из графика, капитал на душу населения очень быстро достигает уровня насыщения и стабилизируется в стационарном положении.

На рис. 2, *б* показана эффективность труда $l(t)$, найденная из решения стабилизированной гамильтоновой системы. Кривая эффективности труда сначала показывает довольно быстрый рост, который почти прекращается при достижении уровня, соответствующего положению равновесия.

На рис. 2, *в* показаны рост ВВП $y(t)$ и рост потребления $c(t)$ на душу населения. График ВВП на душу населения достаточно быстро растет и, достигнув уровня насыщения, стабилизируется. Потребление на душу работающего населения также увеличивается до уровня, соответствующего положению равновесия c^* .

Графики на рис. 2, *г* показывают снижение уровня инвестиций в основной капитал страны $s(t)$ и эффективность труда $r(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжиский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
3. Красовский А.А., Тарасьев А.М. Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.
4. Arrow K.J. Applications of control theory to economic growth // Mathematics of the decision sciences. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1968. Part 2. P. 85–119.
5. Ayres R.U., Warr B. The economic growth engine: How energy and work drive material prosperity. Cheltenham: Edward Elgar Publ., 2009.
6. Balder E.J. An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. and Appl. 1983. V. 95. P. 195–213.
7. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and growth in the global economy. Cambridge (MA): MIT Press, 1993.
8. Hartman P. Ordinary differential equations. New York: J. Wiley and Sons, 1964.
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
11. Rockafellar R.T. Hamilton–Jacobi theory and parametric analysis in fully convex problems of optimal control // J. Global Optim. 2004. V. 28. P. 419–431.
12. Sanderson W. The SEDIM model: Version 0.1: IIASA Interim Rep. IR-04-041. Laxenburg (Austria), 2004.
13. Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical systems theory and economics. Berlin: Springer, 1969. V. 1. P. 241–292.
14. Solow R.M. Growth theory: An exposition. New York: Oxford Univ. Press, 1970.