В. А. Франке, Разные канонические формулировки теории гравитации Эйнштейна,
ТМФ, 2006, том 148, номер 1, 143–160

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 148, № 1
июль, 2006

В. А. Франке*

РАЗНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА

Описаны четыре наиболее известных варианта классического канонического формализма в теории гравитации Эйнштейна: формализмы Арновитта–Дезера–Мизнера, Фаддеева–Попова, реперный формализм в обычном виде и в виде, приспособленном к построению петлевой теории гравитации, которая разрабатывается в настоящее время. Приведены канонические преобразования, связывающие эти формализмы.

Ключевые слова: теория гравитации, канонический формализм.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее прямой путь к построению квантовой теории – квантование соответствующей классической теории, записанной в канонической форме. Разные эквивалентные канонические формулировки классической теории могут при этом приводить к не вполне эквивалентным вариантам квантовой теории. Поэтому в сложных случаях полезно до квантования представить классическую теорию в канонической форме многими способами. Это, в частности, относится к теории гравитации, окончательная квантовая форма которой пока не найдена. Не исключено, что, подобрав подходящую классическую каноническую формулировку, здесь можно приблизиться к удовлетворительному решению задачи квантования. Именно такой подход лежит в основе так называемой петлевой теории гравитации (см. обзор [1] и библиографию в нем), которая разрабатывается в настоящее время.

Данная статья, преследующая в основном педагогические цели, посвящена описанию нескольких известных эквивалентных классических канонических формулировок теории гравитации Эйнштейна и связей между этими формулировками. Сначала излагается формализм Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ) [2]. Затем с помощью канонического преобразования осуществляется переход к формализму Фаддеева–Попова (ФП) [3]. Далее посредством замены переменных вводится реперный формализм в обычном виде. Наконец, путем канонического преобразования этот формализм приводится к виду, лежащему в основе петлевой теории гравитации [1].

---

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: franke@pobox.spbu.ru

Мы не рассматриваем здесь проблемы квантования гравитации, ограничиваясь лишь отдельными замечаниями по этому поводу, но изложенные сведения могут быть полезны при работе над данной проблемой.

2. ФОРМАЛИЗМ АДМ

Остановимся, прежде всего, на классическом формализме АДМ [2]. Пусть x^μ – координаты в римановом пространстве-времени $(\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3)$. Координату $x^0 = t$ именуем временем (принимая $c = 1$, где c – скорость света). Считаем, что все гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ пространственноподобны. Пространственные координаты обозначаем через x^i $(i, k, \ldots = 1, 2, 3)$. Используем сигнатуру метрики $(-, +, +, +)$.

Фиксируем некоторую гиперповерхность $x^0 = \mathrm{const}$ и обозначим ее через Σ. В координатах x^i трехмерная метрика, индуцируемая на Σ, совпадает с трехмерной частью четырехмерной метрики. Обозначим эту трехмерную метрику через β_{ik} и определим β^{ik} условием

$$\beta_{ik}\beta^{kl} = \delta_i^l. \tag{1}$$

Тогда

$$\beta_{ik} = g_{ik}, \tag{2}$$

$$\beta^{ik} = g^{ik} - \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}}, \tag{3}$$

где $g_{\mu\nu}$ – четырехмерная метрика, $g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

Введем обозначения

$$g = \det g_{\mu\nu}, \qquad \beta = \det \beta_{ik}. \tag{4}$$

Как обычно,

$$R^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\beta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\delta\beta} - \Gamma^\alpha_{\delta\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\beta}, \tag{5}$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta,\alpha\delta}, \tag{6}$$

$$R = g^{\beta\delta}R_{\beta\delta}, \tag{7}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ – символы Кристоффеля, построенные из метрики $g_{\mu\nu}$ известным образом. Определим величины $\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{kl}$, $\overset{(3)}{R}{}^i{}_{k,lm}$, $\overset{(3)}{R}{}_{lm}$, $\overset{(3)}{R}$, образованные из β_{ik}, $\partial_l\beta_{ik}$, $\partial_m\partial_l\beta_{ik}$ точно так же, как $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $R^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta}$, $R_{\beta\delta}$, R построены из $g_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu}$. Введем ковариантную производную $\overset{(3)}{\nabla}{}_i$, действующую на Σ при помощи связности $\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{kl}$ так же, как производная ∇_μ действует на всем пространстве-времени с помощью связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Определим второй фундаментальный тензор K_{ik} гиперповерхности Σ:

$$K_{ik} = K_{ki} = -\nabla_i n_k\big|_\Sigma = n_0\Gamma^0_{ik}\big|_\Sigma = -\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\Gamma^0_{ik}\bigg|_\Sigma, \tag{8}$$

где поле $n_\mu(x)$ единичных нормалей к поверхностям $x^0 = \mathrm{const}$ задается равенствами

$$n_\mu n^\mu = -1, \qquad n_\mu = -\delta^0_\mu \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \qquad n^\mu = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}}. \tag{9}$$

Имеет место тождество

$$\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\big(\overset{(3)}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2\big) + 2\partial_\gamma\big(\sqrt{-g}(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma)\big). \tag{10}$$

Здесь $K^i_l = \beta^{ik} K_{kl}$. Достаточно простой вывод этого тождества основан на известной формуле Гаусса, связывающей тензор кривизны гиперповерхности с тензором кривизны объемлющего риманова пространства.

Рассматриваем только гравитационное поле, не взаимодействующее с другими полями, поскольку уже в этом случае видны все особенности задачи. Исходим из действия гравитационного поля

$$S = \int d^4x\,\mathfrak{L}, \tag{11}$$

где

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}\,\big(g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma}) - 2\Lambda\big). \tag{12}$$

Здесь $\varkappa = 8\pi\gamma$, γ – ньютонова гравитационная постоянная, Λ – космологическая постоянная. Иначе,

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \frac{1}{2\varkappa}\partial_\gamma\big(\sqrt{-g}(g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})\big). \tag{13}$$

С помощью тождества (10) находим отсюда, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}\big(\overset{(3)}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 - 2\Lambda\big) + \frac{1}{2\varkappa}\partial_\gamma\big(\sqrt{-g}(g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})\big) +\\ + 2\partial_\gamma\big(\sqrt{-g}(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma)\big).\end{aligned} \tag{14}$$

В случае замкнутой Вселенной здесь можно отбросить дивергенцию, а в случае островного расположения масс в асимптотически трехмерно-плоском пространстве-времени достаточно учесть лишь существенную часть дивергенции, равную

$$\frac{1}{2\varkappa}(\partial_k\partial_k\beta_{ll} - \partial_i\partial_k\beta_{ik}), \tag{15}$$

причем в последнем случае $\Lambda = 0$.

Далее мы часто для простоты отбрасываем дивергенцию, считая Вселенную замкнутой, а также нередко опускаем Λ-член.

В качестве независимых полевых переменных АДМ выбирают величины

$$\beta_{ik} \equiv g_{ik}, \qquad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \qquad N_i = g_{0i}. \tag{16}$$

В дальнейшем индексы $i, k, \dots$ поднимаются и опускаются с помощью трехмерных тензоров β^{ik} и β_{ik}.

Справедливы равенства

$$g_{ik} = \beta_{ik}, \qquad g^{ik} = \beta^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2}, \qquad g_{0k} = N_k, \qquad g^{0k} = \frac{N^k}{N^2}, \tag{17}$$

$$g_{00} = -N^2 + N_k N^k, \qquad g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \qquad \sqrt{-g} = N\sqrt{\beta}, \tag{18}$$

$$n_\mu = -\delta^0_\mu N, \qquad n^0 = \frac{1}{N}, \qquad n^i = -\frac{N^i}{N}, \tag{19}$$

$$K_{ik} = \frac{1}{2N}\big(\overset{(3)}{\nabla}_i N_k + \overset{(3)}{\nabla}_k N_i - \partial_0 \beta_{ik}\big). \tag{20}$$

В этих переменных плотность лагранжиана (14) с отброшенной дивергенцией принимает вид

$$\mathcal{L}^{(\text{АДМ})} = N\left\{2\mathcal{J}^{ij,kl} K_{ij} K_{kl} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\big(\overset{(3)}{R} - 2\Lambda\big)\right\}, \tag{21}$$

где

$$\mathcal{J}^{ij,kl} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)(\beta^{ik}\beta^{jl} + \beta^{il}\beta^{jk} - 2\beta^{ij}\beta^{kl}). \tag{22}$$

Удобно ввести символы

$$\delta^{ik}_{lm} \equiv \frac{1}{2}(\delta^i_l \delta^k_m + \delta^i_m \delta^k_l) \tag{23}$$

и определить величину $\mathcal{J}_{ij,kl}$ с помощью условия

$$\mathcal{J}^{ij,kl}\mathcal{J}_{kl,mn} = \delta^{ij}_{nm}. \tag{24}$$

При этом

$$\mathcal{J}_{ij,kl} = \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)(\beta_{ik}\beta_{jl} + \beta_{il}\beta_{jk} - \beta_{ij}\beta_{kl}), \qquad \mathcal{J}_{ij,kl} = \mathcal{J}_{kl,ij} = \mathcal{J}_{ji,kl} = \mathcal{J}_{ij,lk} \tag{25}$$

и аналогично для $\mathcal{J}^{ij,kl}$.

В выражении для $\mathcal{L}$ мы вновь отбросили возникающую несущественную добавку к дивергенции.

Полагая

$$L = \int_{x^0=\text{const}} d^3x\, \mathcal{L}^{(\text{АДМ})}, \tag{26}$$

определяем сопряженные импульсы:

$$P^{(N)}(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 N(x))}, \tag{27}$$

$$P^{(N_i)}(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 N_i(x))}, \tag{28}$$

$$P^{ik}(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \beta_{ik}(x))} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(\text{АДМ})}}{\partial(\partial_0 \beta_{ik}(x))}, \tag{29}$$

где $x \equiv (x^1, x^2, x^3)$, а $\delta/\delta(\dots)$ – трехмерная вариационная производная. Сразу же находим первичные связи:

$$P^{(N)}(x) = 0, \qquad P^{(N_i)}(x) = 0. \tag{30}$$

Эти связи учитываем явно, т.е. полагаем $P^{(N)}$ и $P^{(N_i)}$ равными нулю везде, где они встречаются.

Далее,

$$P^{ik}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}^{(\text{АДМ})}}{\partial K_{lm}} \frac{\partial K_{lm}}{\partial(\partial_0 \beta_{ik})} = -2\mathcal{J}^{ik,lm} K_{lm}, \tag{31}$$

откуда

$$K_{ik} = -\frac{1}{2}\mathcal{J}_{ik,lm} P^{lm}, \tag{32}$$

причем согласно (20)

$$\partial_0 \beta_{ik} = \overset{(3)}{\nabla}_i N_k + \overset{(3)}{\nabla}_k N_i - 2N K_{ik}. \tag{33}$$

Плотность обобщенного гамильтониана равна

$$\mathcal{H}^{(\text{gen})} = P^{ik} \partial_0 \beta_{ik} - \mathcal{L}^{(\text{АДМ})}. \tag{34}$$

Вновь отбрасывая несущественную добавку к дивергенции, находим, что

$$\mathcal{H}^{(\text{gen})} = N\mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i, \tag{35}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm} + \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)\bigl(-\overset{(3)}{R} + 2\Lambda\bigr), \tag{36}$$

$$\mathcal{H}_i = -2\beta_{is}\sqrt{\beta}\,\overset{(3)}{\nabla}_l \left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right). \tag{37}$$

Учтено, что $P^{ls}/\sqrt{\beta}$ есть тензор.

Плотность лагранжиана первого порядка равна

$$\mathcal{L}^{(\text{АДМ})}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - \mathcal{H}^{(\text{gen})} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i. \tag{38}$$

Добавляя существенную часть дивергенции, имеем для островного расположения масс в асимптотически трехмерно-плоском пространстве

$$\mathcal{L}^{(\text{АДМ})}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - \mathcal{H}^{(\text{gen})} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i - \frac{1}{2\varkappa}(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ii}). \tag{39}$$

Варьируя $\mathcal{L}^{(\text{АДМ})}_{(1)}$ по N и N^i, получаем вторичные связи:

$$\mathcal{H}_0(x) = 0, \qquad \mathcal{H}_i(x) = 0. \tag{40}$$

В случае островного расположения масс полная энергия сводится к поверхностному интегралу

$$H^{(\text{полн})} = \frac{1}{2\varkappa}\int d^3x\,(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ii}), \tag{41}$$

причем теперь

$$\mathcal{H}^{(\mathrm{gen})} = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i + \frac{1}{2\varkappa}(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ii}). \tag{42}$$

В случае замкнутой Вселенной полная энергия равна нулю.

Вводим скобки Пуассона. Если F_1 и F_2 – два трехмерных функционала от β_{ik}, P^{ik}, то

$$\{F_1, F_2\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F_1}{\delta\beta_{ik}(x)}\frac{\delta F_2}{\delta P^{ik}(x)} - \frac{\delta F_2}{\delta\beta_{ik}(x)}\frac{\delta F_1}{\delta P^{ik}(x)}\right), \tag{43}$$

где $\delta/\delta(\dots)$ – трехмерная вариационная производная. Очевидно,

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}, \tag{44}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0, \tag{45}$$

$$\{F_1, F_2F_3\} = \{F_1, F_2\}F_3 + F_2\{F_1, F_3\}. \tag{46}$$

Далее применяем обозначения

$$f \equiv f(x), \qquad \underset{\sim}{f} \equiv f(\tilde{x}). \tag{47}$$

В этих обозначениях

$$\{\beta_{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}\} = \delta_{ik}^{lm}\,\delta^3(x-\tilde{x}), \tag{48}$$

$$\{\beta_{ik}, \underset{\sim}{\beta}_{lm}\} = 0, \qquad \{P^{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}\} = 0. \tag{49}$$

Справедливы соотношения

$$\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\} = \mathcal{H}_k\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\mathcal{H}}_i\underset{\sim}{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}), \tag{50}$$

$$\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = \mathcal{H}_0\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}), \tag{51}$$

$$\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = \beta^{ik}\mathcal{H}_k\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\beta}^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}), \tag{52}$$

где $\underset{\sim}{\partial}_i = \partial/\partial\tilde{x}^i$. Видно, что в классике все связи первого рода. Никаких новых связей не возникает.

Связи $\mathcal{H}_i$ являются генераторами трехмерных преобразований координат на поверхности Σ. Действительно, при замене координат

$$x^i \to x'^{\,i} + \xi^i(x), \tag{53}$$

где $\xi^i(x)$ бесконечно малы, имеем

$$\delta\beta_{ik} \equiv \beta'_{ik}(x) - \beta_{ik}(x) = -\overset{(3)}{\nabla}_i\xi_k - \overset{(3)}{\nabla}_k\xi_i, \tag{54}$$

$$\delta P^{ik} \equiv P'^{\,ik}(x) - P^{ik}(x) = (\partial_l\xi^i)P^{lk} + P^{il}\partial_l\xi^k - \partial_l(P^{ik}\xi^l). \tag{55}$$

Можно непосредственно проверить, что

$$\left\{\int d^3x\,\mathcal{H}_i\xi^i, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\} = \delta\underset{\sim}{\beta}_{kl}, \qquad \left\{\int d^3x\,\mathcal{H}_i\xi^i, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} = \delta\underset{\sim}{P}^{kl}. \tag{56}$$

Соответственно связь $\mathcal{H}_0$ генерирует сдвиги точек поверхности Σ вдоль нормалей к Σ. Изменения величин β_{ik} и P^{ik} при этом соответствуют решениям уравнений Эйнштейна.

Сделаем лишь отдельные замечания относительно квантования описанной теории.

При квантовании переменные β_{ik}, P^{ik} заменяются операторами, подчиненными условиям

$$[\beta_{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}] = i\delta_{ik}^{lm}\delta^3(x-\tilde{x}), \tag{57}$$

$$[\beta_{ik}, \underset{\sim}{\beta}_{lm}] = [P^{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}] = 0. \tag{58}$$

Поскольку связи (36), (37) слишком сложны, чтобы их можно было решить явно, эти связи обычно налагают на вектор состояния. Возникающая теория оказывается корректной только при условии, что коммутаторы связей друг с другом равны линейным комбинациям этих связей с коэффициентами, стоящими слева от них. После квантования связи удовлетворяют коммутационным соотношениям вида (50)–(52) с заменой скобок $\{\ \}$ на $-i[\ ]$. Однако теперь играет роль выбранный порядок множителей β_{ik} и P^{ik} в выражениях для связей. Может случиться, что результат коммутирования связей содержит эти множители не в том порядке, который был принят в связях первоначально, а коэффициенты при связях могут возникать не только слева от них. Легко убедиться, что в квантовых аналогах соотношений (50), (51) этого не происходит, и указанные соотношения после квантования сохраняют свой вид (с точностью до замены $\{\ \} \to -i[\ ]$). Последнее, в частности, обусловлено отмеченным геометрическим смыслом связей $\mathcal{H}_i$ как генераторов преобразований трехмерных координат. Этот смысл полностью сохраняется после квантования.

Иначе обстоит дело с квантовым аналогом соотношения (52). Если операторы в связях $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$ расположены так, что эти связи эрмитовы, то величина $-i[\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0]$, в которую превращается $\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\}$, тоже будет эрмитовой. Значит, справа в аналоге равенства (52) не могут возникнуть неэрмитовы выражения $\beta^{ik}\mathcal{H}_k$ (мы учитываем, что β^{ik} и $\mathcal{H}_k$ не коммутируют). Самое большее, что можно получить для коммутатора $-i[\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0]$, подбирая порядок множителей в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_k$ без нарушения эрмитовости, – это выражение вида

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\beta^{ik}\mathcal{H}_k + \mathcal{H}_k\beta^{ki})\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta}^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k + \underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\underset{\sim}{\beta}^{ki}\right)\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}) = \\ &\quad = \beta^{ik}\mathcal{H}_k\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\beta}^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}) + \\ &\qquad + \delta^3(0)(\dots)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \delta^3(0)\underset{\sim}{(\dots)}\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}), \end{aligned} \tag{59}$$

где $(\dots)$, $\underset{\sim}{(\dots)}$ – некоторые операторнозначные функции, не равные нулю. Символы $\delta^3(0)$ возникают из-за коммутирования операторов β^{ik}, $\mathcal{H}_k$ или $\underset{\sim}{\beta}^{ik}$, $\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k$, взятых в одной точке.

Ясно, что выражение вида (59), содержащее произведение $\delta^3(0)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})$, бессмысленно. Придать ему смысл можно только путем регуляризации. Вопрос заключается в том, можно ли так выбрать регуляризацию, чтобы лишние члены в выражении (59) обратились в нуль, а после снятия регуляризации восстановилась общековариантность теории. Однозначный ответ на этот вопрос до сих пор не получен. В ряде имеющихся работ проблема регуляризации и ее снятия изучена недостаточно строго. Такое положение обусловлено тем, что методы регуляризации подробно разработаны только в рамках теории возмущений. Здесь же задача поставлена вне этих рамок.

Несмотря на неясность, сохраняющуюся в данном вопросе, было проведено квантование теории гравитации методом континуального интеграла по аналогии с квантованием неабелевых калибровочных теорий (см. работу [3] и библиографию в ней, а также книгу [4]). Если бы таким путем была получена удовлетворительная теория возмущений, то ее корректность можно было бы проверить непосредственно в рамках диаграммного формализма Фейнмана, и этого было бы достаточно. Но оказалось, что построенная теория возмущений неперенормируема. В связи с этим сейчас разрабатываются другие подходы к построению квантовой теории гравитации, наиболее известные из которых – теория суперструн (см., например, книгу [5]) и так называемая петлевая теория гравитации [1].

Заметим также, что отмеченные трудности с замыканием алгебры связей после квантования характерны и для других вариантов канонического формализма в теории гравитации, описанных ниже.

3. ФОРМАЛИЗМ ФП

Остановимся теперь на классическом каноническом формализме ФП [3]. Прежде всего, вводятся величины

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}, \tag{60}$$

в терминах которых дополнительное гармоническое координатное условие записывается особенно просто: $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$. В качестве исходных переменных выбираются функции

$$q^{ik} \equiv h^{0i}h^{k0} - h^{00}h^{ik}, \tag{61}$$

причем далее $q \equiv \det q^{ik}$. Кроме того, сохраняются функции N и N^i, имевшиеся в формализме АДМ.

Следующее каноническое преобразование связывает формализмы АДМ и ФП:

$$\begin{cases} q^{ik} = \beta\beta^{ik} = \dfrac{1}{2}\varepsilon^{ilm}\varepsilon^{knp}\beta_{ln}\beta_{mp}, \\ \pi_{ik} = -\dfrac{1}{(2\varkappa)2\sqrt{\beta}}\mathcal{J}_{ik,lm}P^{lm} = \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\beta_{ik}\beta_{lm} - \beta_{il}\beta_{km}\right)P^{lm}, \end{cases} \tag{62}$$

$$\begin{cases} \beta_{ik} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{knp}q^{ln}q^{mp}, \\ P^{lm} = -\dfrac{1}{\sqrt{q}}(q^{ik}q^{lm} - q^{li}q^{mk})\pi_{ik}, \end{cases} \tag{63}$$

где π_{ik} – импульсы, сопряженные обобщенным координатам q^{ik}, ε_{ikl} – вполне антисимметричный символ, $\varepsilon_{123} = 1$. При этом

$$\pi_{ik}\partial_0 q^{ik} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik}, \tag{64}$$

$$\{q^{ik}, \underset{\sim}{\pi}_{lm}\} = \delta^{ik}_{lm}\delta^3(x - \tilde{x}) \tag{65}$$

$$\{q^{ik}, \underset{\sim}{q}^{lm}\} = 0, \qquad \{\pi_{ik}, \underset{\sim}{\pi}_{lm}\} = 0. \tag{66}$$

В формализме ФП плотность лагранжиана первого порядка имеет вид

$$\mathcal{L}_1^{(\text{ФП})} = \pi_{ik}\partial_0 q^{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i + \frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}, \tag{67}$$

где выписана часть дивергенции, существенная в случае островного расположения масс в асимптотически трехмерно-плоском пространстве-времени. Теперь

$$\mathcal{H}_0 = \frac{2\varkappa}{q^{1/4}}(q^{lp}q^{mq} - q^{lm}q^{pq})\pi_{lm}\pi_{pq} - \frac{q^{1/4}}{2\varkappa}\big(\overset{(3)}{R} - 2\Lambda\big), \tag{68}$$

$$\mathcal{H}_i = \frac{2}{q^{1/4}}q^{kl}\big(\overset{(3)}{\nabla}_k(q^{1/4}\pi_{il}) - \overset{(3)}{\nabla}_i(q^{1/4}\pi_{kl})\big), \tag{69}$$

где в $\overset{(3)}{R}$ нужно выразить β_{ik} через q^{lm} согласно (63).

Величины $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$ по-прежнему удовлетворяют соотношениям (50)–(52), причем геометрический смысл этих величин сохраняется.

4. ОБЫЧНЫЙ РЕПЕРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Обратимся теперь к реперному формализму. Введем в каждой точке пространства-времени четыре взаимно псевдоортогональных нормированных вектора $e^\mu_A(x)$, где индекс A нумерует векторы $(A, B, \ldots = 0, 1, 2, 3)$, а индекс μ – их компоненты в координатном базисе $(\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3)$, причем $x \equiv \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$. Предполагается, что

$$e^\mu_A(x)g_{\mu\nu}e^\nu_B(x) = \eta_{AB}, \tag{70}$$

где $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Определим также величины $e^A_\mu(x)$ равенством

$$e^A_\mu e^\nu_A = \delta^\nu_\mu. \tag{71}$$

Из соотношений (70), (71) следует, что

$$g_{\mu\nu}(x) = e^A_\mu\eta_{AB}e^B_\nu. \tag{72}$$

Подставим это выражение в приведенное ранее действие гравитационного поля (11), (12) и будем рассматривать далее $e^A_\mu(x)$ как функции, описывающие это поле. Возникнет теория, инвариантная относительно двух групп преобразований: общих преобразований координат и лоренцевых локальных преобразований величин $e^A_\mu(x)$. Последние преобразования имеют вид

$$e'^A_\mu(x) = \omega^A{}_B(x)e^B_\mu(x), \tag{73}$$

причем
$$\eta_{AB}\omega^{A}{}_{D}(x)\omega^{B}{}_{E}(x)=\eta_{DE}. \tag{74}$$

Равенство (74) обеспечивает неизменность метрики $g_{\mu\nu}(x)$ при таких преобразованиях. Величины e^A_μ, e^μ_A именуем далее реперными параметрами.

Каждому вектору, отнесенному к координатному базису, сопоставляется вектор, отнесенный к реперному, по правилу
$$a^A=e^A_\mu a^\mu, \qquad a_A=e^\mu_A a_\mu. \tag{75}$$

Аналогично можно определить тензоры $T^{\mu,\dots,A,\dots}_{\nu,\dots,B,\dots}$, которые при замене координат изменяются обычным образом, по индексам $\mu,\dots,\nu,\dots$, а при замене параметров $e^A\mu$ согласно равенству (73) преобразуются лоренцевыми матрицами по индексам $A,\dots$, $B,\dots$. Индексы $A,\dots,B,\dots$ у тензоров поднимаются и опускаются с помощью величин η^{AB} и η_{AB}.

Как обычно, определяются ковариантные производные
$$\nabla_\mu a^\nu=\partial_\mu a^\nu+\Gamma^\nu_{\mu\alpha}a^\alpha, \qquad \nabla_\mu a_\nu=\partial_\mu a_\nu-a_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \tag{76}$$
$$\nabla_\mu a^A=\partial_\mu a^A+A_\mu{}^A{}_B\,a^B, \qquad \nabla_\mu a_A=\partial_\mu a_A-a_B A_\mu{}^B{}_A \tag{77}$$

(и аналогично для тензоров). Требуя выполнения равенств
$$\nabla_\mu e^A_\nu=0, \qquad \nabla_\mu e^\nu_A=0, \qquad \nabla_\mu\eta^{AB}=0, \tag{78}$$

устанавливаем связь между $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ и $A_\mu{}^A{}_B$:
$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu}=e^\mu_A A_\alpha{}^A{}_B\,e^B_\nu+e^\mu_A\partial_\alpha e^A_\nu, \tag{79}$$
$$A_\alpha{}^A{}_B=e^A_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\nu}e^\nu_B+e^A_\mu\partial_\alpha e^\mu_B. \tag{80}$$

Именуем $A_\alpha{}^A{}_B$ реперной связностью, а $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ – координатной связностью.

Реперная связность аналогична калибровочному полю со структурной группой Лоренца. Поэтому
$$A_\alpha{}^A{}_B=A_\alpha{}^{AD}\eta_{DB}, \tag{81}$$

где $A_\alpha{}^{AD}=-A_\alpha{}^{DA}$. Понимая под A_α матрицу $A_\alpha{}^A{}_B$, можем составить аналог напряженности поля
$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+A_\mu A_\nu-A_\nu A_\mu, \tag{82}$$

причем
$$R^\alpha{}_{\beta,\mu\nu}=e^\alpha_A F_{\mu\nu,}{}^A{}_B\,e^B_\beta. \tag{83}$$

Реперный формализм нужно обязательно применять, описывая спиноры в римановом пространстве-времени, так как спинорные представления группы Лоренца не могут быть расширены до представлений полной линейной группы. Поэтому спиноры нельзя отнести к координатному локальному базису, а лишь к псевдоортогональному реперному базису. Но ниже реперный формализм применяется для другой цели. Считаем, как и ранее, что гравитационное поле не взаимодействует с другими полями.

Чтобы полностью устранить калибровочный произвол, нужно наложить четыре координатных и шесть реперных дополнительных условий. Воспользуемся этой возможностью и устраним лишь часть реперного произвола с помощью трех условий

$$e^{\mu}_{(0)}(x) = n^{\mu}, \tag{84}$$

где $n^{\mu}(x)$ – нормированная нормаль к поверхности $x^0 = \text{const}$, проходящей через точку x (см. равенства (9)). Здесь и далее реперные индексы берем в скобки, если они записываются в виде чисел, а координатные индексы в этом случае пишем без скобок. Равенство (84) содержит только три условия, так как векторы n^{μ} и $e^{\mu}_{(0)}$ нормированы. После введения условий (84) теория остается инвариантной относительно полупрямого произведения группы общих преобразований координат на группу трехмерных ортогональных преобразований (т.е. преобразований Лоренца, не изменяющих вектор $e^{\mu}_{(0)}(x) = n^{\mu}(x)$).

На каждой поверхности $x^0 = \text{const}$ вводим переменные АДМ $\beta_{ik} \equiv g_{ik}$, N и N^i. Далее, $i, k, \ldots$ – трехмерные координатные индексы $(i, k, \ldots = 1, 2, 3)$, $a, b, \ldots$ – трехмерные реперные индексы $(a, b, \ldots = 1, 2, 3)$. В силу условия (84) реперные параметры e^{μ}_{A} и e^{A}_{μ} выражаются через e^{i}_{a}, e^{a}_{i}, N и N^i следующим образом:

$$e^{0}_{(0)} = \frac{1}{N}, \qquad e^{0}_{a} = 0, \qquad e^{i}_{(0)} = -\frac{N^i}{N}, \qquad e^{(0)}_{0} = N, \qquad e^{(0)}_{i} = 0, \qquad e^{a}_{0} = e^{a}_{i} N^i. \tag{85}$$

При этом не только

$$e^{A}_{\mu} e^{\nu}_{A} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{86}$$

но и

$$e^{a}_{i} e^{k}_{a} = \delta^{i}_{k}, \qquad g_{ik} = \beta_{ik} = e^{a}_{i} e^{a}_{k}, \qquad \beta^{ik} = e^{i}_{a} e^{k}_{a}. \tag{87}$$

Полагаем

$$e \equiv \det e^{a}_{i}, \tag{88}$$

причем

$$\beta = e^2. \tag{89}$$

Имея в виду возможное применение к петлевой теории гравитации, выберем в качестве основных переменных функции

$$Q^{i}_{a} \equiv e e^{i}_{a} = \sqrt{\beta} e^{i}_{a}, \quad N, \quad N_i. \tag{90}$$

Положим

$$Q \equiv \det Q^{i}_{a}, \tag{91}$$

причем

$$Q = \beta, \tag{92}$$

и определим величины Q_i^a равенствами

$$Q_i^a Q_a^k = \delta_i^k. \tag{93}$$

Векторы Q_a^i (равно как и e_a^i) касаются поверхности $x^0 = \mathrm{const}$. Из соотношений (87) видно, что индексы $a, b, \ldots$ можно поднимать и опускать с помощью символов δ^{ab} и δ_{ab}. Поэтому нет различия между верхними и нижними индексами a, b, и их можно писать, где удобно.

Разовьем канонический формализм на гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ в терминах трехмерных переменных Q_a^i, N, N^i, обозначая эту гиперповерхность по-прежнему через Σ. Проще всего можно прийти к цели, начав с формализма ФП (см. раздел 3). Согласно формулам (62), (87) и (90)

$$q^{ik} = \beta\beta^{ik} = \beta e_a^i e_a^k = Q_a^i Q_a^k. \tag{94}$$

Подставим это выражение в лагранжиан ФП (67) и будем сначала считать π_{ik} и Q_a^i независимыми. Найдем, что

$$\pi_{ik}\partial_0 q^{ik} = 2\pi_{ik} Q_a^k \partial_0 Q_a^i, \tag{95}$$

поэтому переменным Q_a^i отвечают сопряженные импульсы

$$\mathcal{P}_i^a = 2\pi_{ik} Q_a^k, \tag{96}$$

откуда

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} Q_k^a \mathcal{P}_i^a. \tag{97}$$

Но $\pi_{ik} = \pi_{ki}$, так что возникают новые связи

$$Q_k^a \mathcal{P}_i^a - Q_i^a \mathcal{P}_k^a = 0. \tag{98}$$

В силу равенств (93) это эквивалентно трем связям

$$\Phi^a \equiv \varepsilon^{abc} Q^{ib} \mathcal{P}_i^c = 0, \tag{99}$$

где ε^{abc} вполне антисимметрично, $\varepsilon^{123} = 1$.

Действие реперного формализма можно записать теперь в следующей канонической форме:

$$S_{(1)}^{(\text{реп})} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{(1)}^{(\text{реп})}, \tag{100}$$

$$\mathcal{L}_{(1)}^{(\text{реп})} = \mathcal{P}_i^a \partial_0 Q_a^i - N\mathcal{H}_0 - N^i \mathcal{H}_i - \lambda^a \Phi^a, \tag{101}$$

где мы учли новые связи с помощью множителей Лагранжа λ^a. Предполагается, что в формулах ФП (68), (69) для $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_i$ величины q^{ik}, π_{ik} выражены через $\mathcal{P}_i^a$, Q_a^i

согласно (94), (97). Здесь и далее мы для простоты не пишем в $\mathcal{L}_{(1)}^{(\text{реп})}$ дивергенции, считая, что Вселенная замкнута. При этом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{Q}}\right)(Q_b^k Q_b^l \mathcal{P}_k^c \mathcal{P}_l^c - (Q_b^k \mathcal{P}_k^b)^2) - \left(\frac{\sqrt{Q}}{2\varkappa}\right)\big(\overset{(3)}{R} - 2\Lambda\big), \tag{102}$$

$$\mathcal{H}_i = Q_a^k\big(\overset{(3)}{\nabla}_k \mathcal{P}_i^a - \overset{(3)}{\nabla}_i \mathcal{P}_k^a\big), \tag{103}$$

где, как и ранее, $\overset{(3)}{\nabla}_k$ – ковариантная производная на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, содержащая коэффициенты связности $\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{kl}$ и $\overset{(3)}{A}{}_i{}^a{}_b$, выраженные через Q_a^k и Q_k^a.

Коэффициенты $\overset{(3)}{A}{}_i{}^a{}_b$ определяются по аналогии с формулой (80) равенствами

$$\overset{(3)}{A}{}_k{}^a{}_b = e_i^a \overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{kl} e_b^l - e_i^a \partial_k e_b^i. \tag{104}$$

Можно проверить, что в силу условия (84)

$$\overset{(3)}{A}{}_k{}^a{}_b = A_k{}^a{}_b, \tag{105}$$

где $A_k{}^a{}_b$ – трехмерная часть четырехмерной связности $A_\mu{}^A{}_B$. Величины $A_k{}^a{}_b$ образуют $SO(3)$-связность. Поэтому

$$A_k{}^a{}_b = A_k{}^{ab} = -A_k{}^{ba} = \varepsilon^{abc} A_k^c, \tag{106}$$

где

$$A_k^c = \frac{1}{2}\varepsilon^{cab} A_k{}^{ab}. \tag{107}$$

Из формул (90), (92) следует, что

$$e_a^i = Q^{-1/2} Q_a^i, \qquad e_i^a = Q^{1/2} Q_i^a. \tag{108}$$

Подставляя это в равенства (104) и учитывая выражения (105), (107), находим, что

$$\begin{aligned} A_i^c &= \frac{1}{2}\varepsilon^{cab}\big((\partial_k Q_i^a - \partial_i Q_k^a) Q_b^k - Q_a^l (\partial_l Q_m^d) Q_b^m Q_i^d + Q_i^b Q_a^k Q_d^l \partial_k Q_l^d\big) = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{cab}\big(Q_k^a \partial_i Q^{kb} + Q_i^d Q^{ka}(Q_l^b \partial_k Q^{ld} + Q_l^d \partial_k Q^{lb}) + Q_i^a Q^{kb} Q_l^d \partial_k Q^{ld}\big). \end{aligned} \tag{109}$$

Обозначая через A_k матрицу $A_k{}^{ab}$, можно определить трехмерную напряженность поля

$$\overset{(3)}{F}{}_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i + A_i A_k - A_k A_i, \tag{110}$$

причем будут справедливы равенства

$$\overset{(3)}{F}{}_{ik}{}^{ab} = \varepsilon^{abc} \overset{(3)}{F}{}_{ik}{}^c, \qquad \overset{(3)}{R}{}^i_{k,lm} = e_a^i \overset{(3)}{F}{}_{lm}{}^{ab} e_k^b. \tag{111}$$

Канонические переменные подчиняются теперь соотношениям

$$\{Q^i_a, \underset{\sim}{\mathcal{P}}{}^b_k\} = \delta^i_k \delta^a_b \delta^3(x - \tilde{x}), \qquad \{Q^i_a, \underset{\sim}{Q}{}^k_b\} = 0, \qquad \{\mathcal{P}^b_i, \underset{\sim}{\mathcal{P}}{}^a_k\} = 0. \tag{112}$$

Условие симметрии $\pi_{ik} = \pi_{ki}$ в рамках формализма, рассмотренного в данном разделе, имеет место в силу связей (99), в то время как в разделе 3 оно выполнялось по определению. Поэтому скобки Пуассона между π_{ik} и $\underset{\sim}{\pi}_{lm}$ отличаются от приведенных в разделе 3. Теперь

$$\{q^{ik}, \underset{\sim}{q}{}^{lm}\} = 0, \qquad \{q^{ik}, \underset{\sim}{\pi}_{lm}\} = \delta^{ik}_{lm} \delta^3(x - \tilde{x}), \tag{113}$$

но

$$\{\pi_{ik}, \underset{\sim}{\pi}_{lm}\} = \frac{1}{4} Q^b_k Q^b_m Q^d_i Q^c_l \varepsilon^{cda} \Phi^a \delta^3(x - \tilde{x}). \tag{114}$$

Поэтому в соотношениях со скобками Пуассона (50)–(52) справа появляются новые члены, но все они пропорциональны связям Φ^a. Кроме того,

$$\{\Phi^a, \underset{\sim}{\Phi}{}^b\} = \varepsilon^{abc} \Phi^c \delta^3(x - \tilde{x}), \qquad \{\Phi^a, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = 0, \qquad \{\Phi^a, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_i\} = 0. \tag{115}$$

Таким образом, классическая алгебра связей замыкается, и все связи $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$ и Φ^a первого рода.

Вместо связей $\mathcal{H}_i$ удобно ввести связи

$$\mathcal{H}'_i \equiv \mathcal{H}_i + A_i{}^c \Phi^c \equiv Q^{bk}(\partial_k \mathcal{P}^b_i - \partial_i \mathcal{P}^b_k) + (\partial_k Q^{kb}) \mathcal{P}^b_i = 0. \tag{116}$$

Можно проверить, что величины $\mathcal{H}'_i$ генерируют преобразования трехмерных координат без изменения реперов как геометрических объектов, а Φ^a – повороты реперов без изменения координат.

Алгебра связей в терминах величин $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}'_i$, Φ^a имеет вид

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}'_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}}'_k\} = \mathcal{H}'_k \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}) - \underset{\sim}{\mathcal{H}}'_i \underset{\sim}{\partial}_k \delta^3(x - \tilde{x}),\\
&\{\mathcal{H}'_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = \mathcal{H}_0 \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}),\\
&\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = Q^i_a Q^k_a \mathcal{H}'_k \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}) - \underset{\sim}{Q}{}^i_a \underset{\sim}{Q}{}^k_a \underset{\sim}{\mathcal{H}}'_i \underset{\sim}{\partial}_k \delta^3(x - \tilde{x}) + (\ldots)^a \Phi^a - \underset{\sim}{(\ldots)}{}^a \underset{\sim}{\Phi}{}^a,\\
&\{\Phi^a, \underset{\sim}{\Phi}{}^b\} = \varepsilon^{abc} \Phi^c \delta^3(x - \tilde{x}),\\
&\{\Phi^b, \underset{\sim}{\mathcal{H}}'_i\} = -\Phi^b \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}),\\
&\{\Phi^a, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\} = 0,
\end{aligned} \tag{117}$$

где $(\ldots)^a$ – некоторые выражения, составленные из Q^i_a и $\mathcal{P}^a_i$.

5. ФОРМАЛИЗМ, ПРИМЕНЯЕМЫЙ В ПЕТЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Перейдем теперь к каноническому формализму, который лежит в основе петлевой теории гравитации. Можно непосредственно проверить, что трехмерная реперная связность (109) допускает представление

$$A_i^a = \frac{\delta F}{\delta Q_a^i(x)}, \tag{118}$$

где

$$F = \frac{1}{2}\int_{x^0=\mathrm{const}} d^3x\, \varepsilon^{abc} Q_a^l Q_k^b \partial_l Q^{kc}. \tag{119}$$

Здесь $x \equiv (x^1, x^2, x^3)$, а $\delta/\delta Q_a^i$ – трехмерная вариационная производная. Поскольку

$$\{\mathcal{P}_i^a(x), f[Q_b^k]\} = -\frac{\delta f[Q_b^k]}{\delta Q_a^i(x)}, \tag{120}$$

где $f[Q_b^k]$ – любой функционал от функций $Q_a^k(x)$, то

$$\{\mathcal{P}_m^f, \underset{\sim}{A_i^c}\} = \{\underset{\sim}{\mathcal{P}_i^c}, A_m^f\}. \tag{121}$$

Это позволяет совершить каноническое преобразование

$$Q_a^i \longrightarrow Q_a^i, \qquad \mathcal{P}_i^a \longrightarrow \mathcal{P}_i'^a = \mathcal{P}_i^a + bA_i^a, \tag{122}$$

где b – число, именуемое параметром Барберо–Иммирзи. Этому параметру можно придать любое значение. В силу (121) будет выполняться условие

$$\{\mathcal{P}_i'^a, \mathcal{P}_k'^b\} = 0. \tag{123}$$

Так как A_i^a зависит лишь от Q_i^a, то будет верным также равенство

$$\{Q_a^i, \underset{\sim}{\mathcal{P}_k'^b}\} = \delta_k^i \delta_a^b\, \delta^3(x - \tilde{x}). \tag{124}$$

Вслед за (122) можно выполнить еще одну каноническую замену переменных:

$$\begin{aligned} &Q_a^i \longrightarrow B_i^a = \frac{1}{b}\mathcal{P}_i'^a = A_i^a + \frac{1}{b}\mathcal{P}_i^a, \\ &\mathcal{P}_i'^a \longrightarrow \Pi_a^i = -bQ_a^i. \end{aligned} \tag{125}$$

Величина B_i^a преобразуется при замене трехмерных координат на гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ и реперов, подчиненных все время условию (84), как реперная связность A_i^a. Поэтому контурный интеграл

$$\mathrm{tr}\, W(C) = \mathrm{tr}\, P \exp\biggl(-\oint_C dx^i\, B_i\biggr), \tag{126}$$

где B_i – матрица с элементами $B_i^{ab} = \varepsilon^{abc} B_i^c$, а интегрирование ведется по замкнутому контуру, лежащему на гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$, инвариантен относительно реперных $SO(3)$-преобразований, генерируемых связями Φ^a. Это обстоятельство лежит в основе петлевой теории гравитации, в которой в качестве канонических переменных используются величины B_i^a и Π_a^i.

Из формул (125) следует, что

$$Q_a^i = -\frac{1}{b}\Pi_a^i, \qquad \mathcal{P}_i^a = b(B_i^a - A_i^a), \tag{127}$$

где

$$A_i^a \equiv A_i^a\big|_{Q_a^i=-b^{-1}\Pi_a^i}. \tag{128}$$

Подставив это в действие (101) и учитывая (102) и (103), можно записать результат в двух формах:

$$S_1 = \int d^4x\ \mathcal{L}_1, \tag{129}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \Pi_a^i\partial_0 B_i^a - N'\mathcal{H}_0' - N'^i\mathcal{H}_i' - \lambda'^a\Phi^a = \\ &= \Pi_a^i\partial_0 B_i^a - N''\mathcal{H}_0'' - N''^i\mathcal{H}_i'' - \lambda''^a\Phi^a,\end{aligned} \tag{130}$$

где

$$\Phi^a = -\left(\partial_i\Pi_a^i + \varepsilon^{abc}B_i^c\Pi_b^i\right) = -\sqrt{\Pi}\,\overset{(3B)}{\nabla}_i\left(\frac{\Pi_a^i}{\sqrt{\Pi}}\right) \equiv -D_i\Pi_a^i, \tag{131}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k' &= \mathcal{H}_k + A_k^a\Phi^a = -\Pi_c^i\overset{(3)}{F}{}_{ik}(B) + B_k^b\Phi^b, \\ \mathcal{H}_0' &= \Pi_a^i\Pi_b^k\varepsilon^{abc}\overset{(3)}{F}{}^c_{ik}(B) + 4b^{-3}\frac{1}{(2\varkappa)^2}\Pi\big((1+\varkappa^2b^2)\overset{(3)}{R} - 2\Lambda\big),\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k'' &= \Pi_c^i\overset{(3)}{F}{}^c_{ik}(B), \\ \mathcal{H}_0'' &= \Pi_a^i\Pi_b^k\varepsilon^{abc}\overset{(3)}{F}{}^c_{ik}(B) + \\ &\quad + (1+\varkappa^2b^2)\Big(\Pi_b^k\Pi_b^l(B_k^c - A_k^c)(B_l^c - A_l^c) - \big(\Pi_b^k(B_k^b - A_k^b)\big)^2\Big) + 2b^{-1}\Lambda\Pi.\end{aligned} \tag{133}$$

Здесь

$$\begin{aligned}N' &= \frac{N}{4}\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{Q}}\right), \qquad N'^k = N^k, \\ \lambda'^a &= \lambda^a - \frac{N}{4}\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{Q}}\right)Q^{kd}\mathcal{P}_k^b\varepsilon^{dba} - N^kA_k^b + b\varkappa e_a^i\partial_i N, \\ N'' &= -\frac{N}{(2\varkappa)b^2\sqrt{Q}}, \qquad N_k'' = -N_k, \\ \lambda''^a &= \lambda^a + \frac{1}{2}N^k\mathcal{P}_k^a - N\left((2\varkappa)b^2\sqrt{Q}\right)^{-1}Q_d^k\mathcal{P}_k^f\varepsilon^{dfa} + 2\left((2\varkappa)b\right)^{-1}e_a^i\partial_i N, \\ \Pi &= \det\Pi_a^i, \qquad A_k^a = A_k^a(Q_a^i)\big|_{Q_a^i=-b^{-1}\Pi_a^i}, \qquad \overset{(3)}{R} = \overset{(3)}{R}(Q_b^i)\Big|_{Q_b^i=-b^{-1}\Pi_b^i}, \\ F_{ik}^{(3)}(B) &= \partial_i B_k - \partial_k B_i + B_iB_k - B_kB_i,\end{aligned} \tag{134}$$

B_i, $\overset{(3)}{F}{}_{ik}$ – матрицы с элементами

$$B_i^{ab} = \varepsilon^{abc}B_i^c, \qquad \overset{(3)}{F}{}^{ab}_{ik} = \varepsilon^{abc}\overset{(3)}{F}{}^c_{ik}, \tag{135}$$

а $\overset{(3B)}{\nabla}_i$ – трехмерная ковариантная производная со связностью B_i^{ab}.

Видно, что выражения для $\mathcal{H}_0'$ и $\mathcal{H}_0''$ резко упрощаются и становятся равными, если продолжить теорию в комплексную область и положить

$$b = \mp i\varkappa. \tag{136}$$

Тогда согласно (125)

$$B_i^c = A_i^c \pm i\varkappa \mathcal{P}_i^c. \tag{137}$$

Но в реперном базисе, в котором $e_{(0)}^{\mu} = n^{\mu}$, справедливы равенства

$$A_i^{(0)c} = N\Gamma_{ik}^0 e_c^k = -K_{ik} e_c^k, \tag{138}$$

причем

$$\pi_{ik} = \frac{1}{(2\varkappa)\sqrt{\beta}} K_{ik}, \qquad \mathcal{P}_i^a = 2\pi_{ik} Q_a^k = \frac{1}{\varkappa} K_{ik} e_a^k = -\frac{1}{\varkappa} A_i^{(0)c}, \tag{139}$$

вследствие чего равенство (137) принимает вид

$$B_i^c = A_i^c \mp i A_i^{(0)c}, \tag{140}$$

т.е.

$$B_i^{ab} = A_i^{ab} \mp i\varepsilon^{abc} A_i^{(0)c}. \tag{141}$$

Можно ввести поля

$$A_\mu^{AB(\pm)} = A_\mu^{AB} \mp \frac{i}{2} \eta^{AD} \eta^{BE} \varepsilon_{DEFH} A_\mu^{FH}, \tag{142}$$

откуда

$$A_i^{ab(\pm)} = A_i^{ab} \mp i\varepsilon^{abc} A_i^{(0)c}. \tag{143}$$

Поля $A_\mu^{AB(\pm)}$ удовлетворяют условиям самодуальности (антисамодуальности)

$$A_\mu^{AB(\pm)} = \mp \frac{i}{2} \eta^{AD} \eta^{BE} \varepsilon_{DEFH} A_\mu^{FH(\pm)}, \tag{144}$$

причем

$$A_\mu^{AB} = A_\mu^{AB(+)} + A_\mu^{AB(-)}. \tag{145}$$

Таким образом, выражения для $\mathcal{H}_0'$, $\mathcal{H}_0''$ упрощаются, если

$$B_\mu^{ab} = A_\mu^{ab(+)} \tag{146}$$

или

$$B_\mu^{ab} = A_\mu^{ab(-)}. \tag{147}$$

В этом случае все связи полиномиально зависят от переменных B_i^a, Π_a^i. Но для возвращения в вещественную область нужно удовлетворить сложному условию

$$B_i^a + B_i^{a*} = 2A(Q)\big|_{Q_a^i = -b^{-1}\Pi_a^i}, \tag{148}$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение в классическом случае и эрмитово сопряжение после квантования. Из-за сложности условия (148) в настоящее время предпочитают строить петлевую теорию гравитации при вещественном значении параметра b, когда связь $\mathcal{H}_0'$ (или $\mathcal{H}_0''$) весьма сложна.

Изложенные выше классические канонические формулировки теории гравитации нашли и продолжают находить применение при работе над проблемой квантования этой теории.

Благодарности. Автор выражает благодарность региональному бюро ЮНЕСКО по научному сотрудничеству в Европе за поддержку Международной школы физики им. В. А. Фока.

Список литературы

[1] A. Ashtekar, J. Lewandowski, *Class. Q. Grav.*, **21** (2004), R53; gr-qc/0404018.
[2] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, "The Dynamics of General Relativity", *Gravitation: an introduction to current research*, ed. L. Witten, Wiley, N.Y., 1962, Ch. 7, p. 227; gr-qc/0405109.
[3] В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев, *УФН*, **111** (1973), 427.
[4] Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, *Калибровочные поля*, УРСС, М., 2000.
[5] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, т. 1, 2, Мир, М., 1990.

Поступила в редакцию 10.08.2005