Е. А. Иванов, Суперсимметризация моделей Ландау,
ТМФ, 2008, том 154, номер 3, 409–423

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 154, № 3
март, 2008

Е. А. Иванов[*]

СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЛАНДАУ

Дан обзор последних работ, посвященных построению и изучению суперрасширений задачи Ландау о квантовой частице на плоскости в однородном магнитном поле, а также обобщения этой задачи на случай сферы S^2, сделанного Хэлдейном. Основное внимание уделено планарным суперсимметричным моделям Ландау, которые инвариантны относительно неоднородной супергруппы $ISU(1\,|\,1)$, контракции супергруппы $SU(2\,|\,1)$, и представляют собой минимальные суперрасширения исходной модели Ландау. Их общее существенное свойство – наличие скрытой динамической $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии на мировой линии, которая присутствует как на классическом, так и на квантовом уровнях и наиболее естественно обнаруживается при переходе к новому инвариантному внутреннему произведению в пространстве квантовых состояний, что необходимо для обеспечения положительности всех норм. Для одной из планарных моделей – модели Ландау на суперплоскости – представлена формулировка вне массовой поверхности в терминах суперполей на мировой линии, позволяющая сделать $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию явной.

Ключевые слова: суперсимметрия, суперполе, супергруппа, частица.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Ландау [1] описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к плоскости. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна [2]) описывает заряженную частицу на сфере $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака, помещенного в центр. Эти модели имеют много приложений, в частности, в квантовом эффекте Холла (КЭХ) [3].

Суперсимметричные расширения модели Ландау, о которых пойдет речь в настоящей работе, представляют собой модели нерелятивистских суперчастиц, движущихся на супермногообразиях. Изучение таких моделей может прояснить вопрос о возможных проявлениях суперсимметрии в различных версиях КЭХ (включая так называемый спиновый КЭХ) и других реалистических моделях конденсированных сред. В математическом аспекте модель Ландау и ее суперрасширения тесно связаны с некоммутативной (супер)геометрией: после квантования в них возникает взаимно однозначное соответствие между нижними уровнями Ландау (УЛ) и

---

[*] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

не(анти)коммутативными (супер)многообразиями, которые представлены соответствующими координатными операторами.

Задачи Ландау на суперсфере $SU(2\,|\,1)/U(1\,|\,1)$ размерности $(2\,|\,2)$ и суперфлаге $SU(2\,|\,1)/[U(1)\times U(1)]$ размерности $(2\,|\,4)$, т.е. минимальные суперрасширения модели Хэлдейна на S^2, рассмотрены в работах [4], [5] (см. также работу [6]). Для лучшего понимания общих особенностей суперсимметричных моделей Ландау оказалось полезным изучить планарные пределы таких суперобобщений. Планарные модели должны получаться из своих криволинейных прототипов в пределе большого радиуса сферы S^2 (пределе контракции). Такие модели были построены и исследованы в работах [7], [8], а также [9]. Модель, полученная из $SU(2\,|\,1)/U(1\,|\,1)$-модели, называется *моделью Ландау на суперплоскости*, а модель, возникающая из $SU(2\,|\,1)/[U(1)\times U(1)]$-модели, носит название *модель Ландау на планарном суперфлаге.*

Данная работа представляет собой обзор суперсимметричных моделей Ландау [4], [5], [7], [8] с упором на их планарные варианты и присутствие в последних скрытой $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии на мировой линии, что, по-видимому, является общим свойством планарных моделей [8], [9]. Для модели Ландау на суперплоскости в качестве существенно нового результата развит $\mathcal{N}=2$ суперполевой формализм, позволяющий сделать явной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию на мировой линии. Кроме того, обсуждается проблема присутствия состояний с отрицательной нормой [7] в квантовых планарных моделях Ландау; показано, что во всех случаях эту трудность можно преодолеть за счет введения нетривиальной метрики на пространстве состояний в духе работ [10], [11].

2. ПРЕАМБУЛА: БОЗОННЫЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ

2.1. Бозонные модели Ландау как $d=1$ сигма-модели ВЗВ-типа.

2.1.1. *Определения.* Стандартная планарная модель Ландау описывается следующим лагранжианом:

$$L_{\mathrm{b}}=|\dot z|^2-i\kappa(\dot z\bar z-\dot{\bar z}z)=|\dot z|^2+(A_z\dot z+A_{\bar z}\dot{\bar z}). \tag{2.1}$$

Здесь $z(t)$, $\bar z(t)$ – комплексные координаты двумерной евклидовой плоскости, 2κ – напряженность внешнего однородного магнитного поля,

$$A_z=-i\kappa\bar z,\qquad A_{\bar z}=i\kappa z,\qquad \partial_{\bar z}A_z-\partial_z A_{\bar z}=-2i\kappa. \tag{2.2}$$

Второй член в (2.1) – простейший пример члена Весса–Зумино (ВЗ).

Соответствующий канонический гамильтониан представляется в виде

$$H=\frac{1}{2}(a^\dagger a+aa^\dagger)=a^\dagger a+\kappa, \tag{2.3}$$

где

$$a=i(\partial_{\bar z}+\kappa z),\qquad a^\dagger i(\partial_z-\kappa\bar z),\qquad [a,a^\dagger]=2\kappa. \tag{2.4}$$

Он коммутирует со следующими операторами, которые, таким образом, определяют инвариантности данной теории (см., например, работу [12]):

$$\begin{gathered} P_z = -i(\partial_z + \kappa\bar{z}), \qquad P_{\bar{z}} = -i(\partial_{\bar{z}} - \kappa z), \\ [P_z, P_{\bar{z}}] = 2\kappa, \qquad F_{\mathrm{b}} = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \\ [H, P_z] = [H, P_{\bar{z}}] = [H, F_{\mathrm{b}}] = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Операторы P_z, $P_{\bar{z}}$ и F_{b} генерируют соответственно "магнитные трансляции" и вращения в $2D$-мерном "пространстве отображения". Эти операторы суть квантовые аналоги нетёровских зарядов, связанных с инвариантностью относительно трансляций $z' = z + a$, $\bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}$ и $U(1)$-вращений $z' = e^{i\alpha}z$, $\bar{z}' = e^{-i\alpha}\bar{z}$.

2.1.2. *Волновые функции.* Волновая функция Ψ_0, соответствующая низшему УЛ, $H\Psi_{(0)} = \kappa\Psi_{(0)}$, определяется уравнением

$$a\Psi_{(0)}(z, \bar{z}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\partial_{\bar{z}} + \kappa z)\Psi_{(0)} = 0 \Longrightarrow \Psi_{(0)} = e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(0)}(z), \tag{2.6}$$

т.е. сводится к голоморфной функции.

Волновая функция, отвечающая n-му УЛ, строится как

$$\Psi_{(n)}(z, \bar{z}) = [i(\partial_z - \kappa\bar{z})]^n e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(n)}(z), \qquad H\Psi_{(n)} = \kappa(2n + 1)\Psi_{(n)}, \tag{2.7}$$

т.е. также выражается через голоморфную функцию. Каждый УЛ бесконечно вырожден вследствие $(P_z, P_{\bar{z}})$-инвариантности. На каждом УЛ волновые функции образуют бесконечномерные представления этой группы с базисом z^m, $m > 0$ [12].

Инвариантная норма определяется как интеграл

$$\|\Psi_{(n)}\|^2 = \int dz\, d\bar{z}\, \bar{\Psi}_{(n)}(z, \bar{z})\Psi_{(n)}(z, \bar{z}) \sim \int dz\, d\bar{z}\, e^{-2\kappa|z|^2}\overline{\psi}_{(n)}(\bar{z})\psi_{(n)}(z) < \infty. \tag{2.8}$$

Он сходится для любого монома $\psi_{(n)}(z) \sim z^m$.

2.1.3. *Планарная модель Ландау как ВЗВ-модель.* Будем считать 2κ в $[P_z, P_{\bar{z}}] = 2\kappa$ независимым генератором ("центральным зарядом") и построим нелинейную реализацию этой неабелевой группы магнитных трансляций в фактор-пространстве по одномерной подгруппе, порождаемой 2κ. Выбирая экспоненциальную параметризацию для соответствующих элементов фактор-пространства, получаем

$$\begin{gathered} g(z, \bar{z}) = e^{i(zP_z + \bar{z}P_{\bar{z}})}, \qquad g^{-1}\, dg = i\omega_z P_z + i\omega_{\bar{z}} P_{\bar{z}} + i\omega_\kappa 2\kappa, \\ \omega_z = dz, \qquad \omega_{\bar{z}} = d\bar{z}, \qquad \omega_\kappa = \frac{1}{2i}(z\, d\bar{z} - \bar{z}\, dz). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Мы видим, что ВЗ-член в L_{b} есть не что иное, как 1-форма Картана, связанная с генератором 2κ. В этой геометрической постановке операторы рождения и уничтожения $a^\dagger$ и a возникают как ковариантные производные:

$$\nabla_z = \partial_z - \kappa\bar{z}, \qquad \nabla_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} + \kappa z, \tag{2.10}$$

в то время как волновая функция, отвечающая низшему УЛ, определяется ковариантным условием Коши–Римана:

$$\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0, \quad \Psi'_{(n)}(z', \bar{z}') = e^{-\kappa(a\bar{z} - \bar{a}z)}\Psi_{(n)}(z, \bar{z}), \quad z' = z + a, \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{a}. \tag{2.11}$$

2.1.4. *Обобщение на S^2.* Аналог планарного лагранжиана Ландау $L_{\rm b}$ на сфере S^2 (т.е. лагранжиан модели Хэлдейна) записывается в виде

$$\widetilde{L}_{\rm b} = \frac{1}{(1+r^2|z|^2)^2}|\dot{z}|^2 - is\frac{1}{1+r^2|z|^2}(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z). \tag{2.12}$$

Первый член здесь – это ($d = 1$)-проекция квадрата инвариантного интервала на S^2, второй член – ($d = 1$)-член ВЗ на фактор-пространстве $S^2 \sim SU(2)/U(1)$, r – “обратный” радиус S^2.

После квантования унитарные волновые функции на каждом уровне образуют конечномерные неприводимые представления группы $SU(2)$ со “спинами” $s, s+1/2, s+1, \ldots$. Таким образом, каждый УЛ имеет конечное вырождение (в этом состоит важное отличие от планарного случая, и связано оно с тем фактом, что $SU(2)$ является компактной группой, в то время как ее контракция, группа магнитных трансляций, не компактна). Волновая функция низшего УЛ определяется ковариантным условием аналитичности на S^2:

$$\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0, \qquad \nabla_{\bar{z}} = (1+r^2|z|^2)\partial_{\bar{z}} + U(1)\text{-связность}. \tag{2.13}$$

Можно показать, что эта волновая функция сводится к голоморфной функции z, компоненты которой образуют неприводимый $SU(2)$-мультиплет со спином s. Волновые функции, отвечающие высшим УЛ, строятся во многом подобно планарному случаю и выражаются через голоморфные функции, описывающие неприводимые $SU(2)$-мультиплеты со спинами $s+1/2, s+1, \ldots$. В пределе $r \to 0$ воспроизводится планарная модель Ландау.

2.2. Низший УЛ и пространственная некоммутативность. Вернемся к случаю планарной модели Ландау. Разность энергий низшего и первого УЛ есть $E_1 - E_0 = \kappa$, и она стремится к бесконечности с ростом κ. В этом пределе выживает только низший УЛ, который описывается ВЗ-членом. Условие аналитичности $\nabla_{\bar{z}}\Psi_{(0)} = 0$ теперь возникает как квантовая версия соответствующей связи в фазовом пространстве. Стандартный оператор координаты $Z = z$ не коммутирует с этой связью и поэтому должен быть подходящим образом модифицирован:

$$Z = z - \frac{1}{\kappa}\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{i\kappa}P_{\bar{z}}, \qquad \overline{Z} = \frac{i}{\kappa}P_z, \qquad [\overline{Z}, Z] = \frac{2}{\kappa}. \tag{2.14}$$

Новые операторы Z, $\overline{Z}$ параметризуют некоммутативную плоскость.

Подобная ситуация имеет место и в S^2-случае: в пределе низшего УЛ выживает только ВЗ-член, и соответствующие операторы координат, коммутирующие с гамильтоновыми связями, параметризуют некоммутативную (“размытую”) версию S^2 [13].

3. СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЛАНДАУ: ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Под суперсимметричными моделями Ландау мы будем понимать квантово-механические модели заряженной частицы на однородном суперпространстве такие, что в бозонном пределе они сводятся либо к исходной модели Ландау для заряженной частицы, движущейся на плоскости в однородном магнитном поле, либо к ее сферической версии, разработанной Хэлдейном.

3.1. Суперсимметрия мировой линии и суперсимметрия в пространстве отображения. Один из путей суперсимметризации моделей Ландау состоит в том, что вводится суперсимметрия на мировой линии

$$t \quad \Rightarrow \quad (t,\theta,\bar\theta), \qquad z,\bar z \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}(t,\theta,\bar\theta),\, \overline{\mathcal{Z}}(t,\theta,\bar\theta), \tag{3.1}$$

$z,\bar z \Rightarrow (z,\bar z,\psi,\bar\psi,\dots)$ – супермультиплет на мировой линии. Здесь $\mathcal{Z}$ – некоторые $(d=1)$-суперполя. Соответствующие модели отвечают той или иной версии суперсимметричной квантовой механики [14] (см., например, работу [15]). В этом варианте суперсимметризации фермионные поля не имеют непосредственной геометрической интерпретации в отличие от бозонных полей z, $\bar z$, которые, как мы видели, являются параметрами фактор-пространства.

Другой способ суперрасширения моделей Ландау состоит во введении суперсимметрии в пространстве отображения. Простейшая возможность – расширить группу магнитных трансляций до супергруппы, включающей генераторы “магнитных супертрансляций” Π_ζ, $\Pi_{\bar\zeta}$ и фермионный аналог $U(1)$-генератора F_{b}:

$$\begin{gathered}
\text{групповое многообразие: } (z,\bar z) \quad \Rightarrow \quad \text{супергрупповое многообразие : } (z,\bar z,\zeta,\bar\zeta),\\
(P_z,P_{\bar z},F_{\mathrm{b}},\kappa) \quad \Rightarrow \quad (P_z,P_{\bar z},\Pi_\zeta,\Pi_{\bar\zeta},F_{\mathrm{b}},F_{\mathrm{f}},\kappa,\dots),\\
\Pi_\zeta = \partial_\zeta + \kappa\bar\zeta, \qquad \Pi_{\bar\zeta} = \partial_{\bar\zeta} + \kappa\zeta, \qquad F_{\mathrm{f}} = \zeta\partial_\zeta - \bar\zeta\partial_{\bar\zeta}, \qquad \{\Pi_\zeta,\Pi_{\bar\zeta}\} = 2\kappa.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

В этом случае фермионные поля имеют ясный геометрический смысл: это грассмановы координаты, расширяющие двумерную плоскость до $(2\,|\,2)$-мерной суперплоскости.

Примечательно, что две планарные суперсимметричные модели Ландау, построенные с привлечением второго подхода (см. разделы 4 и 5), вдобавок обладают еще и скрытой $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией на мировой линии.

3.2. “Фермионная модель Ландау”. Прежде чем перейти к обсуждению суперсимметризаций моделей Ландау, стоит рассмотреть упрощенную “фермионную модель Ландау”, в которой бозонные $2D$-координаты z, $\bar z$ заменены фермионными ζ, $\bar\zeta$.

Соответствующие лагранжиан и гамильтониан записываются в виде

$$\begin{gathered}
L_{\mathrm{f}} = \dot\zeta\dot{\bar\zeta} - i\kappa(\dot\zeta\bar\zeta + \dot{\bar\zeta}\zeta), \qquad H_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}[\alpha,\alpha^\dagger] = -\alpha^\dagger\alpha - \kappa,\\
\alpha = \partial_{\bar\zeta} - \kappa\zeta, \qquad \alpha^\dagger = \partial_\zeta - \kappa\bar\zeta, \qquad \{\alpha,\alpha^\dagger\} = -2\kappa.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Инвариантности порождаются генераторами Π_ζ, $\Pi_{\bar\zeta}$ и F_{f}, определенными в (3.2),

$$[H_{\mathrm{f}},\Pi_\zeta] = [H_{\mathrm{f}},\Pi_{\bar\zeta}] = [H_{\mathrm{f}},F_{\mathrm{f}}] = 0. \tag{3.4}$$

Квантовое “гильбертово пространство” модели включает основное состояние и единственное возбужденное состояние:

$$\begin{gathered}
\psi^{(0)} = e^{-\kappa\zeta\bar\zeta}\psi_0(\zeta), \qquad \psi^{(1)} = e^{\kappa\zeta\bar\zeta}\psi_1(\bar\zeta), \qquad \alpha\psi^{(0)} = \alpha^\dagger\psi^{(1)} = 0,\\
\psi_0 = A_0 + \zeta B_0, \qquad \psi_1 = A_1 + \bar\zeta B_1.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Пары (A_0, B_0), (A_1, B_1) образуют два неприводимых мультиплета группы магнитных супертрансляций с энергиями $-\kappa$ и κ.

Уже в этом простейшем примере мы сталкиваемся с проблемой, которая присутствует также и в суперрасширениях модели Ландау, рассмотренных в следующих разделах. Это появление духов и необходимость их “изгнания”.

При естественном инвариантном выборе внутреннего произведения,

$$\langle\phi\,|\,\psi\rangle = \int d\zeta\, d\bar\zeta\, \overline{\phi(\zeta,\bar\zeta)}\psi(\zeta,\bar\zeta), \tag{3.6}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \langle\psi^{(0)}\,|\,\psi^{(1)}\rangle &= 0, \\ \langle\psi^{(0)}|\psi^{(0)}\rangle &= 2\kappa\bar A_0 A_0 + \overline{B}_0 B_0, \\ \langle\psi^{(1)}\,|\,\psi^{(1)}\rangle &= -2\kappa\bar A_1 A_1 - \overline{B}_1 B_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Состояния A_1, B_1 имеют отрицательную норму, т.е. они представляют собой духи[1]. Как обычно, присутствие духов должно рассматриваться как нежелательное свойство, поскольку оно может привести к нарушению унитарности[2]. В данном случае эту трудность можно преодолеть путем введения нетривиальной метрики на “гильбертовом пространстве”:

$$\langle\langle\phi\,|\,\psi\rangle\rangle := \langle G\phi\,|\,\psi\rangle, \qquad G\big(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}\big) = \psi^{(0)} - \psi^{(1)}, \qquad G = -\kappa^{-1}H_{\rm f}. \tag{3.8}$$

Характерные черты этой процедуры сводятся к следующим.

1. Генераторы симметрий Π_ζ, $\Pi_{\bar\zeta}$ и $F_{\rm f}$ коммутируют с метрикой G, поэтому новое внутреннее произведение остается инвариантным. Однако свойства эрмитова сопряжения операторов, которые не коммутируют с G, изменяются, например

$$\alpha^\ddagger = -\alpha^\dagger \Rightarrow H_{\rm f} = \alpha^\ddagger\alpha - \kappa, \qquad \{\alpha, \alpha^\ddagger\} = 2\kappa.$$

2. Относительно нового произведения импульс, канонически сопряженный координате, оказывается также и эрмитово сопряженным той же координате:

$$\zeta^\ddagger = \frac{1}{\kappa}\,\partial_\zeta, \qquad (\bar\zeta)^\ddagger = \frac{1}{\kappa}\,\partial_{\bar\zeta}, \qquad (\partial_\zeta)^\ddagger = \kappa\zeta, \qquad (\partial_{\bar\zeta})^\ddagger = \kappa\bar\zeta.$$

На этом мы закончим обсуждение упрощенной модели.

4. МОДЕЛЬ ЛАНДАУ НА СУПЕРПЛОСКОСТИ

4.1. Лагранжиан, гамильтониан и симметрии. Модель Ландау на суперплоскости может рассматриваться как “гибрид” бозонной и фермионной моделей Ландау. Она описывается следующим лагранжианом:

$$L = L_{\rm f} + L_{\rm b} = |\dot z|^2 + \dot\zeta\dot{\bar\zeta} - i\kappa(\dot z\bar z - \dot{\bar z}z + \dot\zeta\bar\zeta + \dot{\bar\zeta}\zeta). \tag{4.1}$$

---

[1] Появление духов в $(d = 1)$-суперсимметричных моделях с кинетическими членами второго порядка для фермионов было отмечено в работе [16].

[2] См., однако, работу [17].

Соответствующий квантовый гамильтониан имеет вид

$$H = a^\dagger a - \alpha^\dagger \alpha = \partial_{\bar\zeta}\partial_\zeta - \partial_z\partial_{\bar z} + \kappa(\bar z\partial_{\bar z} + \bar\zeta\partial_{\bar\zeta} - z\partial_z - \zeta\partial_\zeta) + \kappa^2(z\bar z + \zeta\bar\zeta). \tag{4.2}$$

Полный набор симметрий помимо тех, что порождены генераторами P_z, $P_{\bar z}$ и Π_ζ, $\Pi_{\bar\zeta}$, включает также новые симметрии с генераторами

$$Q = z\partial_\zeta - \bar\zeta\partial_{\bar z}, \qquad Q^\dagger = \bar z\partial_{\bar\zeta} + \zeta\partial_z, \qquad C = F_{\mathrm{b}} + F_{\mathrm{f}} = z\partial_z + \zeta\partial_\zeta - \bar z\partial_{\bar z} - \bar\zeta\partial_{\bar\zeta}, \tag{4.3}$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = [H, C] = 0. \tag{4.4}$$

Эти генераторы порождают супералгебру $ISU(1\,|\,1)$, являющуюся контракцией $SU(2\,|\,1)$:

$$\{Q, Q^\dagger\} = C, \qquad [C, Q] = [C, Q^\dagger] = 0, \qquad [Q, P_z] = i\Pi_\zeta, \qquad \{Q^\dagger, \Pi_\zeta\} = iP_z. \tag{4.5}$$

4.2. Состояния и вырождение. По определению волновая функция низшего УЛ $\psi^{(0)}$ обращается в нуль под действием как бозонных, так и фермионных операторов уничтожения a и α:

$$\begin{gathered}(\partial_{\bar z} + \kappa z)\psi^{(0)} = (\partial_{\bar\zeta} - \kappa\zeta)\psi^{(0)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi^{(0)} = e^{-\kappa K_2}\psi^{(0)}_{\mathrm{an}}(z, \zeta), \qquad K_2 = |z|^2 + \zeta\bar\zeta, \qquad H\psi^{(0)} = 0,\end{gathered} \tag{4.6}$$

т.е. она имеет дополнительное двукратное вырождение, $\psi^{(0)}_{\mathrm{an}}(z, \zeta) = A^{(0)}(z) + \zeta B^{(0)}(z)$.

Гильбертово пространство для N-го УЛ определяется волновой функцией

$$\begin{gathered}\psi^{(N)} \sim (a^\dagger)^N e^{-\kappa K_2}\psi^{(N)}_+(z, \zeta) + (a^\dagger)^{N-1}\alpha^\dagger e^{-\kappa K_2}\psi^{(N)}_-(z, \zeta), \\ H\psi^{(N)} = 2\kappa N\psi^{(N)},\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\psi^{(N)}_\pm(z, \zeta) = A^{(N)}_\pm(z) + \zeta B^{(N)}_\pm(z)$. Каждый УЛ с $N > 0$ четырехкратно вырожден.

Естественное $ISU(1\,|\,1)$-инвариантное внутреннее произведение

$$\langle\phi\,|\,\psi\rangle = \int d\mu\,\overline{\phi(z, \bar z; \zeta, \bar\zeta)}\psi(z, \bar z; \zeta, \bar\zeta), \qquad d\mu = dz\,d\bar z\,d\zeta\,d\bar\zeta, \tag{4.8}$$

приводит к отрицательным нормам для некоторых состояний, как и в упрощенной фермионной модели. Однако все нормы можно сделать положительными, вводя ту же самую метрику на гильбертовом пространстве:

$$G = -\kappa^{-1}H_{\mathrm{f}} = \frac{1}{\kappa}\big[\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta} + \kappa^2\bar\zeta\zeta + \kappa(\zeta\partial_\zeta - \bar\zeta\partial_{\bar\zeta})\big]. \tag{4.9}$$

Метрика G коммутирует с генераторами всех симметрий за исключением Q, $Q^\dagger$. Следовательно, по отношению к новому произведению $\langle G\phi\,|\,\psi\rangle$ оператор, сопряженный к Q, не совпадает с $Q^\dagger$. Новый сопряженный оператор $Q^\ddagger$ легко вычисляется:

$$Q^\ddagger = Q^\dagger - \frac{i}{\kappa}S, \qquad S = i(\partial_z\partial_{\bar\zeta} + \kappa^2\bar z\zeta - \kappa\bar z\partial_{\bar\zeta} - \kappa\zeta\partial_z). \tag{4.10}$$

Поскольку оба оператора $Q^\dagger$ и $Q^\ddagger$ коммутируют с полным гамильтонианом H (так как $[H, G] = 0$), их разность S также коммутирует с ним, $[H, S] = [H, S^\ddagger] = 0$, и, следовательно, порождает новую (скрытую) симметрию модели.

4.3. Скрытая $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия мировой линии. Операторы S, $S^\ddagger$ выражаются в виде

$$S = a^\dagger \alpha, \qquad S^\ddagger = a\alpha^\ddagger \tag{4.11}$$

и, как легко проверить, генерируют $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию на мировой линии:

$$[H, S] = [H, S^\ddagger] = 0, \qquad \{S, S^\ddagger\} = 2\kappa H, \qquad \{S, S\} = 0 = \{S^\ddagger, S^\ddagger\}. \tag{4.12}$$

Другими словами, $(2\kappa)^{-1/2}S$, $(2\kappa)^{-1/2}S^\ddagger$ и H образуют $\mathcal{N}=2$, $d=1$ суперsuccалгебру Пуанкаре.

Генераторы S, $S^\ddagger$ аннигилируют основное состояние, соответствующее низшему УЛ:

$$S\psi^{(0)} = S^\ddagger\psi^{(0)} = 0, \tag{4.13}$$

поэтому основное состояние является синглетом $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии. Следовательно, $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия не нарушена, и волновые функции, отвечающие высшим УЛ, образуют ее неприводимые мультиплеты. Каждое такое состояние состоит из двух неприводимых мультиплетов супергруппы $ISU(1\,|\,1)$, чем объясняется четырехкратное вырождение УЛ с $N>0$. Интересно, что для $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии существует следующий конечномерный аналог модельно-независимого представления Сугавары в терминах $ISU(1\,|\,1)$-зарядов:

$$S = 2i\kappa Q^\ddagger + P\Pi^\ddagger, \qquad S^\ddagger = -2i\kappa Q + P^\ddagger\Pi, \qquad H = P^\ddagger P + \Pi^\ddagger\Pi - 2\kappa C, \tag{4.14}$$

т.е. S, $S^\ddagger$, H принадлежат обертывающей алгебре супералгебры $ISU(1\,|\,1)$.

На классическом уровне скрытая суперсимметрия мировой линии реализуется следующими преобразованиями полей z, ζ и сопряженных к ним:

$$\delta z = \epsilon\dot{\zeta}, \qquad \delta\zeta = -\dot{z}\bar{\epsilon}. \tag{4.15}$$

Как и должно быть, на массовой поверхности они замыкаются на производную полей по времени, если учесть уравнения движения $\ddot{z} = 2i\kappa\dot{z}$, $\ddot{\zeta} = 2i\kappa\dot{\zeta}$. $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия существует только при $\kappa \neq 0$, т.е. она представляет собой род динамической суперсимметрии.

В разделе 6 будет показано, как воспроизвести эту реализацию исходя из явно $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного суперполевого подхода вне массовой оболочки.

5. МОДЕЛЬ ПЛАНАРНОГО СУПЕРФЛАГА

В этом разделе мы рассмотрим основные черты еще одной $ISU(1\,|\,1)$-инвариантной модели, обобщающей модель Ландау: модели Ландау на планарном суперфлаге [7].

5.1. Классическая и квантовая структуры модели.

5.1.1. *Определения.* Модель Ландау на суперфлаге [5] описывает заряженную частицу на фактор-суперпространстве $SU(2\,|\,1)/[U(1)\times U(1)]$. Один из двух ВЗ-членов на подгруппе $U(1)\times U(1)$ есть лоренцев член взаимодействия с однородным магнитным полем напряженности 2κ на S^2. Второй ВЗ-член является чисто фермионным, с постоянным коэффициентом M.

В планарном пределе, когда $SU(2\,|\,1)$ переходит в $ISU(1\,|\,1)$ и S^2 – в евклидову двумерную плоскость, действие, полученное в работе [5], переходит в следующее действие [7]:

$$L=(1+\bar\xi\xi)|\dot z|^2+(\bar\xi\dot{\bar z}\dot\zeta-\xi\dot z\dot{\bar\zeta})+\bar\xi\xi\dot\zeta\dot{\bar\zeta}-i\kappa(\dot z\bar z-\dot{\bar z}z+\dot\zeta\bar\zeta+\dot{\bar\zeta}\zeta)+iM(\bar\xi\dot\xi+\xi\dot{\bar\xi}). \tag{5.1}$$

Основное отличие этой модели от модели Ландау на суперплоскости состоит в том, что в (5.1) фигурирует дополнительная фермионная переменная $\xi(t)$, $\bar\xi(t)$. Ее можно интерпретировать как поле Намбу–Голдстоуна, связанное с $ISU(1\,|\,1)$-генераторами Q, $Q^\dagger$. Благодаря этой дополнительной переменной удается построить второй ВЗ-член и одновременно избежать появления нестандартного кинетического члена второго порядка для ζ, $\bar\zeta$. Несмотря на эти привлекательные свойства в квантовой теории при естественном определении внутреннего произведения все еще присутствуют отрицательные нормы.

5.1.2. *Квантование.* В теории имеются связи на фазовом пространстве (из-за фермионных членов первого порядка в (5.1)). Решая эти связи, можно найти общую структуру волновой функции:

$$\Psi=K_1^M e^{-\kappa K_2}\Psi_{\mathrm{ch}}(z,\bar z_{\mathrm{sh}},\zeta,\xi),\qquad K_1=1+\bar\xi\xi,\qquad \bar z_{\mathrm{sh}}=\bar z-\xi\bar\zeta. \tag{5.2}$$

Операторный гамильтониан в применении к этим “физическим” волновым функциям записывается в виде

$$\begin{gathered}H=\hat a^\dagger\hat a,\qquad [\hat a,\hat a^\dagger]=2\kappa,\\ \hat a=i\sqrt{K_1}(\partial_{\bar z}+\kappa z_{\mathrm{sh}}-\bar\xi\partial_{\bar\zeta}),\qquad \hat a^\dagger=i\sqrt{K_1}(\partial_z-\kappa\bar z_{\mathrm{sh}}-\xi\partial_\zeta).\end{gathered} \tag{5.3}$$

На N-м УЛ физическая киральная волновая функция имеет специальный вид: она выражается через *аналитическую* функцию от (z,ζ,ξ) согласно формуле

$$\Psi^{(N)}_{\mathrm{ch}}=\widetilde\nabla_z^N\Psi^{(N)}_{\mathrm{an}}(z,\zeta,\xi),\qquad \widetilde\nabla_z=\partial_z-2\kappa\bar z_{\mathrm{sh}}-\xi\partial_\zeta,\qquad H\Psi^{(N)}_{\mathrm{ch}}=2\kappa N\Psi^{(N)}_{\mathrm{ch}}. \tag{5.4}$$

$ISU(1\,|\,1)$-инвариантное внутреннее произведение определяется как

$$\langle\Phi\,|\,\Psi\rangle=\int d\mu\int d\xi\,d\bar\xi\,\bar\Phi\Psi=\int d\mu\,e^{-2\kappa K_2}\int d\xi\,d\bar\xi\,K_1^{2M}\overline{\Phi_{\mathrm{ch}}}\Psi_{\mathrm{ch}}, \tag{5.5}$$

где $d\mu=dz\,d\bar z\,d\zeta\,d\bar\zeta$ – мера интегрирования модели на суперплоскости. Записав разложение

$$\Psi^{(N)}_{\mathrm{an}}=A^{(N)}(z)+\zeta B^{(N)}(z)+\xi C^{(N)}(z)+\zeta\xi B^{(N)}(z), \tag{5.6}$$

можно показать, что

$$\|\Psi\|^2\propto\int dz\,d\bar z\,e^{-2\kappa|z|^2}\big[(2M-N)(2\kappa A^\dagger A+B^\dagger B)+2\kappa C^\dagger C+D^\dagger D\big]. \tag{5.7}$$

Таким образом, при $N > 2M > 0$ и $M < 0$ появляются отрицательные нормы. При $N = 2M$ присутствуют нулевые нормы.

Как и в предыдущих случаях, можно переопределить внутреннее произведение путем введения нетривиального метрического оператора на пространстве состояний. На аналитических функциях этот оператор задается выражением

$$G_{\mathrm{an}} = [\xi, \partial_\xi] = -1 + 2\xi\,\partial_\xi. \tag{5.8}$$

После такого переопределения квадрат нормы (под знаком интеграла) приобретает вид

$$\propto \big[(N - 2M)(2\kappa A^\dagger A + B^\dagger B) + 2\kappa C^\dagger C + D^\dagger D\big]. \tag{5.9}$$

Теперь при $M < 0$ все состояния обладают положительной нормой. Это справедливо и при $M = 0$ с тем исключением, что половина состояний с $N = 0$ имеет нулевую норму. Естественно определить (супер)пространство физических состояний как фактор по подпространству состояний с нулевыми нормами. В результате состояния с нулевыми нормами не дают вклада в физический спектр. Получаем, что при $M = 0$ модель на планарном суперфлаге имеет точно такой же спектр, включая вырождение, как и модель на суперплоскости, и, следовательно, эквивалентна последней. При $M > 0$ остаются отрицательные нормы для значений $N < 2M$, так что в этом интервале параметров необходимо сохранить “наивное” определение нормы.

5.2. Скрытая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия. Как и в модели на суперплоскости, переход к новому определению нормы меняет правило эрмитова сопряжения $ISU(1\,|\,1)$-суперзаряда Q, в результате чего естественным путем появляются новые сохраняющиеся суперзаряды. В применении к аналитическим волновым функциям эти суперзаряды даются выражениями

$$S_{\mathrm{an}} = 2i\kappa\xi(2M - N_{\mathrm{an}}), \qquad S^\ddagger_{\mathrm{an}} = 2i\kappa\,\partial_\xi, \qquad \{S_{\mathrm{an}}, S^\ddagger_{\mathrm{an}}\} = 2\kappa(H_{\mathrm{an}} - 4\kappa M). \tag{5.10}$$

Эта квантовая суперсимметрия на мировой линии существует при $M \leqslant 0$, поскольку невозможно достичь положительной определенности антикоммутатора в (5.10) при $M > 0$ во всей области изменения параметров и на каждом УЛ.

При $M = 0$ оба оператора S и $S^\ddagger$ аннигилируют основное состояние ($N = 0$) по модулю состояний с нулевой нормой. В этом случае мировая суперсимметрия не нарушена, основное состояние является $\mathcal{N} = 2$ синглетом и обладает только двукратным вырождением, которое связано с $ISU(1\,|\,1)$-инвариантностью. При $N > 0$ волновые функции образуют нетривиальные мультиплеты $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, причем каждый такой мультиплет состоит из двух неприводимых $ISU(1\,|\,1)$-мультиплетов, благодаря чему возникает четырехкратное вырождение. При $M = 0$ планарный суперфлаг эквивалентен модели Ландау на суперплоскости. При $M < 0$ основное состояние не инвариантно относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, которая, таким образом, спонтанно нарушена в этом случае.

Как и в модели Ландау на суперплоскости, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия на массовой поверхности имеет реализацию в терминах исходных $d = 1$ переменных:

$$\delta z = -\epsilon\xi(\dot z + \bar\xi\dot\zeta), \qquad \delta\zeta = -[(1 + \bar\xi\xi)\dot z + \bar\xi\dot\zeta]\bar\epsilon, \qquad \delta\xi = -2i\kappa\bar\epsilon \tag{5.11}$$

(реализация на $\bar z$, $\bar\zeta$, $\bar\xi$ может быть получена путем комплексного сопряжения). С учетом уравнений движения эти преобразования на каждом поле замыкаются на производную по времени. В частности, правильное замыкание на ξ получается благодаря тому, что $\dot\xi = 0$ на массовой оболочке. Замыкание пропорционально κ, поэтому $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия существует только при $\kappa \neq 0$, т.е., как и в модели Ландау на суперплоскости, она носит динамический характер. Было бы интересно вывести эту реализацию и действие (5.1) из подходящего $\mathcal{N} = 2$ суперполевого формализма вне массовой оболочки, как это сделано в следующем разделе для модели на суперплоскости.

6. ЯВНАЯ $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЯ

В этом разделе модель Ландау на суперплоскости (см. раздел 4) переформулирована в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперполей мировой линии.

6.1. Суперполевое действие модели на суперплоскости.

6.1.1. *Определения.* Основные объекты суть $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ киральные бозонное и фермионное суперполя Φ и Ψ одинаковой размерности.

Вещественное $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ суперпространство параметризовано координатами

$$(\tau, \theta, \bar\theta). \tag{6.1}$$

Левое и правое киральные суперпространства определяются как

$$(t_{\mathrm{L}}, \theta), \quad (t_{\mathrm{R}}, \bar\theta), \quad t_{\mathrm{L}} = \tau - i\theta\bar\theta, \quad t_{\mathrm{R}} = \tau + i\theta\bar\theta = t_{\mathrm{L}} + 2i\theta\bar\theta. \tag{6.2}$$

Удобно работать в левом (киральном) базисе, поэтому для краткости будем использовать обозначение $t_{\mathrm{L}} \equiv t$, $t_{\mathrm{R}} = t + 2i\theta\bar\theta$. В этом базисе $\mathcal{N} = 2$ ковариантные спинорные производные имеют вид

$$\overline{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta}, \qquad D = \frac{\partial}{\partial\theta} - 2i\bar\theta\partial_t, \qquad \{D, \overline{D}\} = 2i\partial_t, \qquad D^2 = \overline{D}^2 = 0. \tag{6.3}$$

Киральные суперполя Φ и Ψ подчиняются связям

$$\overline{D}\Phi = \overline{D}\Psi = 0 \tag{6.4}$$

и в левокиральном базисе имеют следующее компонентное разложение:

$$\Phi(t, \theta) = z(t) + \theta\chi(t), \qquad \Psi(t, \theta) = \psi(t) + \theta h(t), \tag{6.5}$$

где комплексные поля $z(t)$, $h(t)$ представляют собой бозоны и $\chi(t)$, $\psi(t)$ – фермионы. Разложение сопряженных суперполей в том же левокиральном базисе записывается как

$$\bar\Phi = \bar z - \bar\theta\bar\chi + 2i\theta\bar\theta\dot{\bar z}, \qquad \bar\Psi = \bar\psi + \bar\theta\bar h + 2i\theta\bar\theta\dot{\bar\psi}. \tag{6.6}$$

Нам также потребуется компонентная структура следующих суперполей:

$$\begin{aligned} D\Phi &= \chi - 2i\bar\theta\dot z + 2i\theta\bar\theta\dot\chi, & \overline{D}\bar\Phi &= (D\Phi)^\dagger = \bar\chi + 2i\theta\dot{\bar z}, \\ D\Psi &= h - 2i\bar\theta\dot\psi + 2i\theta\bar\theta\dot h, & \overline{D}\bar\Psi &= -(D\Psi)^\dagger = -\bar h + 2i\theta\dot{\bar\psi}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Интеграл Березина нормирован условием

$$\int d^2\theta\,(\theta\bar\theta) = 1. \tag{6.8}$$

6.1.2. *Суперполевое действие.* Суперполевое действие, приводящее в компонентах к действию модели Ландау на суперплоскости (4.1), имеет вид

$$S = -\int dt\, d^2\theta \left\{\Phi\bar\Phi + \Psi\bar\Psi + \rho[\Phi D\Psi - \bar\Phi\overline{D}\bar\Psi]\right\} \equiv \int dt\, d^2\theta\, \{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}. \tag{6.9}$$

Здесь ρ – вещественный параметр. Проводя интегрирование по грассмановым переменным, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\Rightarrow -2i(z\dot{\bar{z}} + \psi\dot{\bar{\psi}}) - \left(\chi\bar\chi + h\bar h\right), \\ \mathcal{L}_2 &\Rightarrow -2i\rho(z\dot h + \chi\dot\psi + \dot{\bar{z}}\bar h + \bar\chi\dot{\bar{\psi}}). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Поля h и χ являются вспомогательными и могут быть исключены с помощью их уравнений движения:

$$\chi = 2i\rho\dot{\bar{\psi}}, \qquad h = -2i\rho\dot{\bar{z}}. \tag{6.11}$$

После подстановки этих выражений в (6.10) получаем

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \Rightarrow -2i(z\dot{\bar{z}} + \psi\dot{\bar{\psi}}) + 4\rho^2(\dot z\dot{\bar{z}} + \dot{\bar{\psi}}\dot\psi) \equiv \widetilde{\mathcal{L}}. \tag{6.12}$$

Сделав переобозначения

$$\bar\psi = \zeta, \qquad \psi = \bar\zeta, \qquad 4\rho^2 \equiv \frac{1}{\kappa} \tag{6.13}$$

и интегрируя по частям, лагранжиан (6.12) можно привести к виду

$$\widehat{\mathcal{L}} = -i(z\dot{\bar{z}} - \bar z\dot z + \zeta\dot{\bar{\zeta}} - \dot\zeta\bar\zeta) + \frac{1}{\kappa}(\dot z\dot{\bar{z}} + \dot\zeta\dot{\bar{\zeta}}). \tag{6.14}$$

Он совпадает с лагранжианом модели на суперплоскости (4.1) с точностью до обращения времени $t \to -t$ и общего коэффициента $-\kappa$ перед действием.

6.2. Симметрии.

6.2.1. *Суперсимметрия.* По построению суперполевое действие (6.9) обладает явной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией. $\mathcal{N} = 2$ преобразования компонентных полей могут быть найдены из суперполевых вариаций

$$\delta\Phi = -[\epsilon Q - \bar\epsilon\overline{Q}]\Phi, \qquad \delta\Psi = -[\epsilon Q - \bar\epsilon\overline{Q}]\Psi, \tag{6.15}$$

где в левокиральном базисе

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \overline{Q} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - 2i\theta\partial_t, \qquad \{Q, \overline{Q}\} = -2i\partial_t = 2P_0. \tag{6.16}$$

Из (6.15), (6.16) следует, что вне массовой оболочки

$$\delta z = -\epsilon\chi, \qquad \delta\chi = 2i\bar\epsilon\dot z, \qquad \delta\psi = -\epsilon h, \qquad \delta h = 2i\bar\epsilon\dot\psi. \tag{6.17}$$

После подстановки выражений (6.11) для вспомогательных полей и с учетом переобозначений (6.13) эти преобразования принимают вид

$$\delta z = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\epsilon\dot\zeta, \qquad \delta\zeta = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\bar\epsilon\dot z. \tag{6.18}$$

Они совпадают с (4.15) (с точностью до перенормировки параметров ϵ, $\bar\epsilon$).

6.2.2. *Две $ISU(1\,|\,1)$-симметрии.* Суперполевые $ISU(1\,|\,1)$-преобразования имеют несколько более сложный вид. Главное требование к ним – совместность с условиями киральности (6.4). В то время как супертрансляции в пространстве отображения действуют как сдвиги Φ и Ψ:

$$\delta_{\mathrm{b}}\Phi = b, \qquad \delta_{\beta}\Psi = \nu, \tag{6.19}$$

где b и ν – комплексные константные бозонные и фермионные параметры, нечетные $SU(1\,|\,1)$-преобразования вне массовой оболочки содержат в явном виде θ и $\bar\theta$:

$$\begin{aligned}
&\delta\Phi = \overline{D}\left(\omega\bar\theta\bar\Psi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\overline{\omega}\theta D\Phi\right), \qquad \delta\Psi = \overline{D}\left(\omega\bar\theta\bar\Phi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\overline{\omega}\theta D\Psi\right),\\
&\delta\bar\Phi = D\left(\overline{\omega}\theta\Psi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\omega\bar\theta\overline{D}\bar\Phi\right), \qquad \delta\bar\Psi = -D\left(\overline{\omega}\theta\Phi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\omega\bar\theta\overline{D}\bar\Psi\right),
\end{aligned} \tag{6.20}$$

где ω, $\overline{\omega}$ – соответствующие грассмановы параметры преобразований. Эти преобразования согласованы с киральностью и антикиральностью суперполевых вариаций благодаря присутствию проекторов $\overline{D}$ и D в их правых частях. Преобразования компонентных полей имеют вид

$$\delta z = \omega\bar\psi, \qquad \delta\chi = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\overline{\omega}\dot z, \qquad \delta\psi = \omega\bar z, \qquad \delta h = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\overline{\omega}\dot\psi \tag{6.21}$$

(надо добавить и комплексно-сопряженные к ним). Они замыкаются на C-преобразования, реализованные как

$$\delta_{\mathrm{c}} z = i\alpha z, \qquad \delta_{\mathrm{c}}\psi = -i\alpha\psi, \qquad \delta_{\mathrm{c}}\chi = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\alpha\dot{\bar\psi}, \qquad \delta_{\mathrm{c}} h = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\alpha\dot{\bar z} \tag{6.22}$$

(плюс комплексно-сопряженные вариации), где α – параметр преобразования. Выражения для вспомогательных полей на массовой оболочке (6.9) совместимы с преобразованиями (6.21), (6.22). Имеется полное соответствие между преобразованиями (6.21), (6.22) и $ISU(1\,|\,1)$-генераторами (4.3).

Из-за явного присутствия θ в (6.20) эти $SU(1\,|\,1)$-преобразования не коммутируют с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией мировой линии. Любопытно, что существует и другой тип "внутренних" нечетных преобразований, которые по построению коммутируют с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией:

$$\delta\Phi = \lambda\left(\Psi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\overline{D}\bar\Phi\right), \qquad \delta\Psi = \bar\lambda\left(\Phi - \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\overline{D}\bar\Psi\right), \tag{6.23}$$

где λ – соответствующий грассманов параметр. На компонентных полях вариации (6.23) порождают следующие переобразования:

$$\delta z = \lambda\left(\psi + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar\chi\right) \Rightarrow \lambda\left(\psi - \frac{i}{2\kappa}\dot\psi\right), \tag{6.24}$$

$$\delta\psi = \bar\lambda\left(z + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\bar h\right) \Rightarrow \bar\lambda\left(z + \frac{i}{2\kappa}\dot z\right), \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
&\delta\chi = -\lambda\left(h + \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\dot{\bar z}\right) \Rightarrow 0,\\
&\delta h = -\bar\lambda\left(\chi - \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\dot{\bar\psi}\right) \Rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Здесь стрелка означает переход к вариации на массовой поверхности (со вспомогательными полями, исключенными в соответствии с (6.11)). Легко проверить инвариантность (6.12) и (6.14) относительно (6.24), (6.25). Преобразования (6.23) порождают $SU(1\,|\,1)$-супергруппу, отличающуюся от “стандартной” (6.20)–(6.22). Вычисляя скобку Ли двух преобразований (6.26), находим явную суперполевую реализацию соответствующего $\widetilde{C}$-преобразования:

$$\delta_{\tilde{c}}\Phi = i\beta\left(\Phi + \frac{i}{2\kappa}\dot{\Phi}\right), \qquad \delta_{\tilde{c}}\Psi = i\beta\left(\Psi + \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\overline{D}\bar{\Phi} + \frac{i}{2\kappa}\dot{\Psi}\right). \tag{6.27}$$

Как и следовало ожидать, эти преобразования коммутируют с (6.23). Вместе с супертрансляциями (6.19) $SU(1\,|\,1)$-преобразования (6.23) и (6.27) образуют еще одну супергруппу $ISU(1\,|\,1)$. Эта супергруппа не коммутирует со “стандартной” (хотя обе имеют общий супертрансляционный сектор): замыкание этих двух супергрупп содержит некоторые новые преобразования, которые, по-видимому, порождают бесконечномерную группу симплектических диффеоморфизмов суперпространства отображения (присутствие скрытых симметрий такого типа в действии (6.12) на массовой поверхности отмечено в работе [7]).

Остается построить $\mathcal{N} = 2$ суперполевую формулировку модели планарного суперфлага. Ее основными элементами должны быть те же суперполя Φ и Ψ, дополненные новым голдстоуновским киральным спинорным суперполем $\Omega = \xi(t) + \theta g(t)$. Формулировка компонентного действия (5.1) в формализме первого порядка [7] может стать подходящей отправной точкой для такого построения. Одной из интересных проблем для дальнейших исследований является построение моделей, подобных модели на суперфлаге, исходя из $\mathcal{N} = 2$ суперполевого формализма. Отметим также, что подход, изложенный в этом разделе, по-видимому, может быть использован для построения обобщений моделей на суперплоскости и суперфлаге со скрытой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией на мировой линии (и, возможно, суперсимметриями с $\mathcal{N} > 4$).

7. РЕЗЮМЕ

Кратко суммируем содержание работы.

Самосогласованные суперрасширения бозонной модели Ландау существуют [4]–[9] и могут интерпретироваться как сигма-модели ВЗВ-типа на соответствующих градуированных расширениях группы “магнитных трансляций”, лежащей в основе исходной модели Ландау.

Несмотря на появление нежелательных отрицательных норм при “естественном” выборе инвариантного внутреннего произведения эту трудность можно обойти, переопределив внутреннее произведение в духе работ [10], [11].

Интригующей общей чертой планарных суперрасширений модели Ландау является наличие скрытой динамической $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии [8], [9]. Сохраняется ли это свойство в моделях Ландау на суперсфере и суперфлаге? Возможно ли во всех случаях воспроизвести его исходя из альтернативного суперполевого формализма, как в модели на суперплоскости? Существуют ли обобщения на высшие $\mathcal{N}$? Желательно иметь ответы на эти вопросы.

Что касается физических применений, то прежде всего хотелось бы полностью осознать, какие явления описываются суперсимметричными версиями КЭХ и каков физический смысл дополнительных фермионных переменных.

Благодарности. Я благодарен организаторам семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы”, пригласившим меня сделать доклад, ставший основой этой статьи. Большинство представленных результатов получено в сотрудничестве с Т. Картрайтом, Л. Мезинческу и П. К. Таунсендом, которым я выражаю свою глубокую признательность. Работа поддержана РФФИ (грант № 06-02-16684), INTAS (грант № 05-7928) и Программой Гейзенберг–Ландау. Я благодарен Laboratoire de Physique Ecole Normale Supérieure (Lyon, France) за гостеприимство на последних этапах этой работы и Ф. Дельдуку за полезные замечания.

Список литературы

[1] L. Landau, *Z. Phys.*, **64** (1930), 629–637.
[2] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 605–608.
[3] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics*, World Scientific, Singapore, 2000.
[4] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *Fuzzy* $CP^{(n\,|\,m)}$ *as a quantum superspace*, `arXiv: hep-th/0311159`.
[5] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *A super-flag Landau model*, `arXiv: hep-th/0404108`.
[6] K. Hasebe, Y. Kimura, *Nucl. Phys. B*, **709** (2005), 94–114; `arXiv: hep-th/0409230`; K. Hasebe, *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 206802; `arXiv: hep-th/0411137`.
[7] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *JHEP*, **01** (2006), 143; `arXiv: hep-th/0510019`.
[8] T. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *JHEP*, **04** (2007), 020; `arXiv: hep-th/0612300`.
[9] K. Hasebe, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 105017; `arXiv: hep-th/0503162`.
[10] C. M. Bender, *Contemp. Phys.*, **46** (2005), 277–292; `arXiv: quant-ph/0501052`; *Making sense of non-Hermitian Hamiltonians*, `arXiv: hep-th/0703096`.
[11] T. Curtright, L. Mezincescu, *Biorthogonal quantum systems*, `arXiv: quant-ph/0507015`.
[12] H. Elvang, J. Polchinski, *The Quantum Hall effect on* R^4, `arXiv: hep-th/0209104`.
[13] J. Madore, *Classical Quantum Gravity*, **9** (1992), 69–87.
[14] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **188**:3 (1981), 513–554.
[15] В. П. Акулов, А. И. Пашнев, *ТМФ*, **65** (1985), 84–92.
[16] Д. В. Волков, А. И. Пашнев, *ТМФ*, **44**:3 (1980), 321–326.
[17] D. Robert, A. V. Smilga, *Supersymmetry vs ghosts*, `arXiv: math-ph/0611023`.