И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, Алгебраический метод классификации S-интегрируемых дискретных моделей, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 3, 407–419

https://www.mathnet.ru/tmf6650

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 167, № 3
июнь, 2011

 И. Т. Хабибуллин[*], Е. В. Гудкова[†]

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ S-ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Обсуждается метод классификации интегрируемых уравнений на квад-графах, основанный на алгебраических идеях. Уравнению сопоставляется кольцо Ли и исследуется функция, описывающая размерность линейного пространства, линейно порожденного кратными коммутаторами генераторов кольца. В общем случае эта функция растет экспоненциально. Примеры показывают, что для интегрируемых уравнений она растет медленнее. Предложена схема классификации, основанная на этом наблюдении.

Ключевые слова: уравнения на квад-графах, классификация, характеристические векторные поля, кольцо Ли, условия интегрируемости, дискретное уравнение Кортевега–де Фриза.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время дискретные модели (уравнения на квад-графах) вида

$$u_{1,1} = f(u, u_1, \bar{u}_1) \tag{1}$$

интенсивно изучаются в связи с их широким применением в физике, геометрии, биологии и т. д. Поясним обозначения, использованные в (1): неизвестной является функция $u = u(m,n)$ двух независимых дискретных переменных. Нижние индексы и черта обозначают сдвиги аргументов: $u_k = u(m+k, n)$, $\bar{u}_k = u(m, n+k)$, $u_{1,1} = u(m+1, n+1)$. Функция f предполагается локально аналитической; она, вообще говоря, зависит от всех трех аргументов. Другими словами, уравнение (1) можно переписать в любом из следующих видов:

$$u_{1,-1} = f^{1,-1}(u, u_1, \bar{u}_{-1}), \quad u_{-1,1} = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \bar{u}_1), \quad u_{-1,-1} = f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \bar{u}_{-1}).$$

Известны различные подходы к изучению интегрируемых дискретных уравнений. В работах [1]–[4] в качестве критерия интегрируемости для разностных уравнений на четырехугольных решетках было предложено свойство согласованности по

[*]Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: habibullinismagil@gmail.com

[†]Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия.
E-mail: elena.gudkova79@mail.ru

ребрам куба. Симметрийный подход к классификации интегрируемых систем был приспособлен к дискретному случаю [5]–[9]. Еще одно характеристическое свойство интегрируемого уравнения заключается в обращении в ноль его алгебраической энтропии [10]. Альтернативные методы использовались в работах [11]–[13]. В настоящей работе мы предлагаем новую схему классификации интегрируемых дискретных моделей.

Около двадцати лет назад было замечено, что характеристические алгебры Ли, введенные в работе [14], в случае интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, таких как уравнения синус-Гордон и Цицейки–Жибера–Шабата, обладают весьма специальным свойством. Размерность линейного пространства, натянутого на кратные коммутаторы генераторов, растет, как правило, медленнее, чем в общем случае [15]. В работе [16] обсуждалась задача строгой формализации понятия медленного роста и была высказана гипотеза, проверенная на примере классификации интегрируемых уравнений вида $u_{x,y} = f(u, u_x)$.

В настоящей работе мы рассматриваем другую формализацию этого свойства характеристических векторных полей и проверяем его, взяв в качестве пробного камня частный случай уравнения на квад-графах (1).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 вводятся характеристические векторные поля и определяется пробное кольцо Ли. Выдвигается гипотеза, что имеется связь между интегрируемостью и пробным кольцом. В разделе 3 представлено описание пробного кольца для дискретного потенциированного уравнения КдФ. В разделе 4 исследована задача классификации для модели вида $u_{1,1}-u = g(u_1-\bar{u}_1)$. Результат классификации обобщен в теореме 5.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ

Определим характеристические векторные поля для уравнения (1). Начнем с очень частного случая, когда уравнение допускает n-интеграл, т. е. такую функцию $I = I(u_{-j}, u_{-j+1}, \dots, u_k)$, что выполнено уравнение $\overline{D}I = I$, где $\overline{D}$ – оператор сдвига: $\overline{D}h(m, n) = h(m, n+1)$. Это означает, что для любого решения $u = u(m, n)$ уравнения (1) значение функции I не зависит от переменной n. В координатном представлении условие $\overline{D}I = I$ означает, что

$$I(r_{-j+1}, r_{-j+2}, \dots, r, \bar{u}, f, f_1, \dots, f_{k-1}) = I(u_{-j}, u_{-j+1}, \dots, u_k), \tag{2}$$

где $r = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \bar{u}_1)$. Очевидно, правая часть равенства (2) не зависит от $\bar{u}_1$, а потому выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}\overline{D}I = 0, \qquad YI = 0, \quad Y := \overline{D}^{-1}\,\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}\overline{D}.$$

С учетом формулы

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{u}_1} = \frac{1}{D^{-1}(\partial f/\partial \bar{u}_1)},$$

где D – сдвиг по m, $Dh(m, n) = h(m+1, n)$, находим (см. также [17])

$$Y = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{x_{-1}}\frac{\partial}{\partial u_{-1}} + xx_1\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{1}{x_{-1}x_{-2}}\frac{\partial}{\partial u_{-2}} + \cdots, \tag{3}$$

где

$$x = \overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f(u, u_1, \bar{u}_1)}{\partial \bar{u}_1}\right) = -\frac{\partial f^{1,-1}(u, u_1, \bar{u}_{-1})/\partial u}{\partial f^{1,-1}(u, u_1, \bar{u}_{-1})/\partial u_1}.$$

Назовем Y характеристическим векторным полем. Теперь вернемся к общему случаю и определим характеристическое векторное поле Y для цепочки (1) как формальный ряд, задаваемый формулой (3).

Обозначим через T множество векторных полей, полученых взятием всех возможных кратных коммутаторов и линейных комбинаций операторов $X := \partial/\partial\bar{u}_{-1}$ и Y с коэффициентами, зависящими от конечного числа динамических переменных $\bar{u}_{-1}$, u, $u_{\pm 1}$, $u_{\pm 2}, \dots$. Ясно, что, множество T имеет структуру кольца Ли. Назовем его пробным кольцом уравнения (1) в направлении n. Аналогично можно определить пробное кольцо $\overline{T}$ в направлении m.

Заметим, что для интегрируемых по Дарбу уравнений вида (17) как T, так и $\overline{T}$ – кольца конечной размерности. В действительности пробное кольцо является подмножеством характеристического кольца Ли [17].

Обозначим через V_j линейное пространство над полем локально аналитических функций, натянутое на X, Y и все кратные коммутаторы функций X и Y порядка меньше или равного j, так что

$$V_0 = \{X, Y\}, \qquad V_1 = \{X, Y, [X, Y]\}, \qquad \dots .$$

Введем функцию $\Delta(k) = \dim V_{k+1} - \dim V_k$. Следующая гипотеза подтверждается многочисленными примерами.

Гипотеза (алгебраический тест). *Любая интегрируемая модель вида* (1) *удовлетворяет следующему условию*: *найдется последовательность натуральных чисел* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, *для которой* $\Delta(t_k) \leqslant 1$.

Кольцо T допускает автоморфизм, порожденный оператором сдвига D,

$$T \ni Z \overset{\mathrm{Aut}}{\to} DZD^{-1} \in T, \tag{4}$$

который играет ключевую роль в наших дальнейших рассуждениях. Важно, что X и Y, рассматриваемые как операторы на множестве функций, зависящих от переменных $\bar{u}_{-1}, u, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \dots$, удовлетворяют соотношениям сопряжения

$$DXD^{-1} = pX, \qquad DYD^{-1} = \frac{1}{x}Y, \tag{5}$$

где

$$p = D\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \bar{u}_{-1})}{\partial \bar{u}_{-1}}\right) = \frac{1}{\partial f^{1,-1}(u, u_1, \bar{u}_{-1})/\partial \bar{u}_{-1}}.$$

Действительно, определим коэффициенты оператора $DXD^{-1} = \sum a_i\, \partial/\partial u_i + p\, \partial/\partial \bar{u}_{-1}$, применяя его к динамическим переменным, и найдем, что $a_i = DXD^{-1}u_i = 0$ для любого целого i. Более того,

$$p = DXD^{-1}\bar{u}_{-1} = DXf^{-1,-1}(u, u_{-1}, \bar{u}_{-1}) = D\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \bar{u}_{-1})}{\partial \bar{u}_{-1}}\right).$$

Аналогично можно доказать вторую формулу. В самом деле, применим оператор $DYD^{-1} = \sum c_i\,\partial/\partial u_i + d\,\partial/\partial\bar u_{-1}$ к u_i и найдем $c_j = D(Yu_{j-1}) = Yu_j$. Затем вычислим

$$d = DYD^{-1}\bar u_{-1} = f_u^{-1,-1} + \frac{1}{x_{-1}} f_{u_{-1}}^{-1,-1}.$$

Поскольку $u_{-1,-1} = f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \bar u_{-1})$, получаем $u = f^{-1,-1}(f(u, u_1, \bar u_1), u_1, \bar u_1)$. Продифференцируем последнее уравнение по $\bar u_1$ и найдем, что

$$D\overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial \bar u_1} + D\overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}\right) = 0$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u} + \frac{1}{D^{-1}\overline{D}^{-1}(\partial f/\partial \bar u_1)}\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}} = 0.$$

Теперь в силу равенства $x = \overline{D}^{-1}(\partial f/\partial \bar u_1)$, получаем, что $d = 0$.

Лемма 1. *Предположим, что $Z = \sum_{-\infty}^{\infty} b_j\,\partial/\partial u_j \in T$ удовлетворяет следующим двум условиям: $DZD^{-1} = cZ$ для некоторой функции c и $b_{j_0} \equiv 0$ для некоторого фиксированного значения $j = j_0$. Тогда $T = 0$.*

Доказательство. Имеем

$$DZD^{-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} D(b_{j-1})\,\frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_{-\infty}^{\infty} cb_j\,\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Если $c = 0$, то $D(b_{j-1}) = 0$ для любого j, и лемма доказана. Если $c \neq 0$, то положим $b_{j_0-k} = cD^{-k}b_{j_0}$ и $b_{j_0+k} = D^k b_{j_0}/c$ при $k > 0$, что завершает доказательство.

3. ДИСКРЕТНОЕ ПОТЕНЦИИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КДФ

В данном разделе дается полное описание пробного кольца Ли T для дискретного потенциированного уравнения КдФ [18]

$$u_{1,1} = u + \frac{1}{u_1 - \bar u_1}, \tag{6}$$

которое представляет собой очень хорошо известный пример интегрируемой модели вида (1). В силу инвариантности уравнения относительно замены $m \leftrightarrow n$ ко́льца T и $\overline{T}$ должны быть изоморфны. Для этого уравнения множители x и p в формуле (5) одинаковые: $p = x = (u_1 - \bar u_{-1})^2$. Определим последовательность векторных полей

$$\begin{aligned} R_1 &= [X, Y], & P_1 &= [X, R_1], & Q_1 &= [Y, R_1], \\ R_{k+1} &= [X, Q_k], & P_k &= [X, R_k], & Q_k &= [Y, R_k], \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1. *Последовательность $X, Y, R_1, P_1, Q_1, R_2, P_2, Q_2, \ldots$ образует базис характеристического кольца T уравнения (6).*

Доказательство. Нетрудно проверить, что $Xx = -2\sqrt{x}$, $Yx = 2x\sqrt{x}$, $Xy = -2y\sqrt{y}$, $Yy = 2\sqrt{y}$, где $y := D^{-1}x = x_{-1}$. Используя соотношения $DXD^{-1} = xX$ и $D(yY)D^{-1} = Y$, можно вывести уравнения

$$\begin{aligned} D(R_1 - 2\sqrt{y}\,Y)D^{-1} &= R_1 - 2\sqrt{x}X,\\ D(P_1 - 2\sqrt{y}\,R_1 + 2yY)D^{-1} &= x(P_1 + 2X),\\ D\big(y(Q_1 - 2Y)\big)D^{-1} &= Q_1 + 2\sqrt{x}R_1 - 2xX. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы для R_2, P_2 и Q_2 имеют вид

$$\begin{aligned} D(R_2 - 2\sqrt{y}Q_1)D^{-1} &= R_2 + 2\sqrt{x}P_1,\\ D(P_2 + 2\sqrt{y}R_2 - 2yQ_1)D^{-1} &= x(P_2 - 2P_1),\\ D\big(y(Q_2 - 2Q_1)\big)D^{-1} &= Q_2 + 2\sqrt{x}R_2 + 2xP_1. \end{aligned}$$

Можно доказать по индукции, что при любом $j > 1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} D(R_j - 2\sqrt{y}Q_{j-1})D^{-1} &= R_j + 2\sqrt{x}P_{j-1},\\ D\big(P_j + 2(-1)^j\sqrt{y}R_j + 2(-1)^{j-1}yQ_{j-1}\big)D^{-1} &= x(P_j - 2P_{j-1}),\\ D\big(y(Q_j - 2Q_{j-1})\big)D^{-1} &= Q_j + 2\sqrt{x}R_j - 2xP_{j-1}X. \end{aligned}$$

Тогда $[X, P_j] = 0$, $[Y, Q_j] = 0$, $[Y, P_j] = [X, Q_j]$, $[R_j, P_k] = P_{k+j}$, $[R_j, Q_k] = -Q_{k+j}$, $[R_j, R_k] = 0$, $[P_j, Q_k] = -R_{k+j+1}$, $[P_j, P_k] = 0$, $[Q_j, Q_k] = 0$.

Зададим матричное представление алгебры Ли, порожденной теми же операторами X, Y. Пусть $X \to \lambda\sigma_+$, $Y \to \lambda\sigma_-$, $R_1 \to \lambda^2\sigma_3$, тогда

$$P_k \to -2^k\lambda^{2k+1}\sigma_+, \qquad Q_k \to 2^k\lambda^{2k+1}\sigma_-, \qquad R_k \to 2^{k-1}\lambda^{2k}\sigma_3.$$

Здесь

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для уравнения (6) функция $\Delta = \Delta(k)$ является периодической с периодом 2: $\Delta(2k) = 1$, $\Delta(2k+1) = 2$.

4. УРАВНЕНИЯ ВИДА $u_{1,1} = u + g(u_1 - \bar{u}_1)$

Применим сформулированную выше гипотезу (алгебраический тест) к следующему частному классу дискретных моделей (1):

$$u_{1,1} = u + g(u_1 - \bar{u}_1). \tag{8}$$

Здесь g – функция, подлежащая определению.

Схема классификации. Рассмотрим следующие четыре различных случая уравнения (8) по отдельности:

$$\Delta(0) < \Delta_{\max}(0) = 1; \tag{9а}$$

$$\Delta(0) = \Delta_{\max}(0), \qquad \Delta(1) < \Delta_{\max}(1) = 2; \tag{9б}$$

$$\Delta(0) = \Delta_{\max}(0), \qquad \Delta(1) = \Delta_{\max}(1), \qquad \Delta(2) < \Delta_{\max}(2) = 3; \tag{9в}$$

$$\Delta(0) = \Delta_{\max}(0), \qquad \Delta(1) = \Delta_{\max}(1), \qquad \Delta(2) = \Delta_{\max}(2),$$
$$\Delta(k) \leqslant 1 \qquad \text{при некотором} \quad k > 2. \tag{9г}$$

Здесь $\Delta_{\max}(k)$ обозначает наибольшее значение функции $\Delta(k)$ для уравнения (1), когда $f(u, u_1, \bar{u}_1)$ пробегает класс произвольных функций.

Удивительно, что для уравнения (8) исследование первых трех частных случаев (9а)–(9в) позволяет выделить весьма короткий список уравнений, для которых можно ожидать, что они будут интегрируемыми. Этот список исчерпывающий, поскольку случай (9г) никогда не реализуется (см. ниже следствия 1 и 2 из теорем 2 и 3 соответственно).

Введем векторные поля R_1, P_1, Q_1 и R_2 по формулам (7), а также поля $W = [Y, Q_1]$, $Z = [X, P_1]$. Используя их, можно в дополнение к V_0 и V_1 ввести еще два линейных пространства

$$V_2 = V_1 + \{P_1, Q_1\}, \qquad V_3 = V_2 + \{W, Z, R_2\}.$$

Чтобы вычислить $\Delta(k)$, будем использовать автоморфизм (4). Определим множители x и p в формуле (5) в случае модели (8): $x = p = -g'(g^{-1}(u_1 - \bar{u}_{-1}))$, где функция $\beta = g^{-1}(\alpha)$ является обратной к функции $\alpha = g(\beta)$. Наоборот, зная $x = x(u_1 - \bar{u}_{-1})$, можно воспроизвести $g(\beta)$, используя уравнение

$$\beta = g^{-1}(\alpha) = \int (g^{-1}(\alpha))'\,d\alpha = \int \frac{d\alpha}{g'(g^{-1}(\alpha))} = -\int \frac{d\alpha}{x(\alpha)}. \tag{10}$$

Определим действие операторов X и Y на переменную x. Очевидно, $Xx = -x'$, $Yx = xx'$. Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned}
&DR_1D^{-1} = R_1 + \frac{x'}{x}Y - x'X,\\
&DP_1D^{-1} = xP_1 + x'R_1 - rY + xrX, \qquad r = x'' - \frac{(x')^2}{x},\\
&DQ_1D^{-1} = \frac{1}{x}Q_1 + \frac{x'}{x}R_1 + \frac{x''}{x}Y - x''X,\\
&DWD^{-1} = \frac{1}{x^2}W + \left(\frac{2x''}{x} - \frac{(x')^2}{x^2}\right)R_1 + \frac{x'''}{x}Y - x'''X,\\
&DZD^{-1} = x^2 Z + \big((x')^2 - 2xx''\big)R_1 + qY - xqX, \qquad q = xx''' - 2x'x'' + \frac{(x')^3}{x},\\
&DR_2D^{-1} = R_2 + \frac{x'}{x}Q_1 + x'P_1 + \frac{(x')^2}{x}R_1 - sY + xsX, \qquad s = x''' - \frac{x'x''}{x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Исследуем множество G всех кратных коммутаторов X и Y.

Лемма 2. *Коэффициенты любого оператора из множества G являются функциями от конечного числа переменных x, $x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots$.*

Доказательство. Поскольку $x = x(u_1 - \bar{u}_{-1})$, можно записать $x' = \phi(x)$ для некоторой функции ϕ. Тогда $X(x) = -\phi(x)$ и $Y(x) = x\phi(x) =: \psi(x)$. Используя соотношения сопряжения $DXD^{-1} = xX$ и $DYD^{-1} = (1/x)Y$, получаем равенства $X(x_j) = \phi^j(x, x_1, \ldots, x_j)$ и $Y(x_j) = \psi^j(x, x_1, \ldots, x_j)$. Аналогично, имеем равенства

$X(x_{-j}) = \phi^{-j}(x, x_{-1}, \dots, x_{-j})$ и $Y(x_{-j}) = \psi^{-j}(x, x_{-1}, \dots, x_{-j})$. Теперь очевидно, что функция

$$R_1 = X(x)\,\frac{\partial}{\partial u_1} + X\biggl(\frac{1}{x_{-1}}\biggr)\frac{\partial}{\partial u_{-1}} + X(xx_1)\,\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots$$

удовлетворяет утверждению леммы. Из формул $R_1(x) = X(x)x'$ и $DR_1D^{-1} = R_1 + (x'/x)Y - x'X$ получаем $R_1(x_j) = \rho^j(x, x_1, \dots, x_j)$. Ясно, что дальнейшее доказательство леммы можно провести по индукции.

Теорема 2. *Если цепочка вида* (8) *удовлетворяет одному из условий* (9а)–(9в) *в схеме классификации, то функция $x = x(\alpha)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения*

$$(x')^2 = (x^2 + 1)\gamma + x\nu, \qquad \gamma, \nu = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Доказательство. Начнем со случая (9а) и предположим, что $\Delta(0) = 0$; тогда имеем $R_1 = \lambda X + \mu Y$. Очевидно, что $R_1 = X(x)\,\partial/\partial u_1 + \cdots$, поэтому $\lambda = \mu = 0$, откуда следует, что $R_1 = 0$. Применяя указанный выше автоморфизм к обеим частям уравнения (12), получаем $(x'/x)Y - x'X = 0$. Поскольку X и Y линейно независимы, отсюда имеем уравнение $x' = 0$, которое представляет собой частный случай уравнения (12). Очевидно, его решением является $x = c$, и с учетом (10) мы получаем $\beta = g^{-1}(\alpha) = -(1/c)\alpha + c_1$. Таким образом, наше уравнение $\alpha = g(\beta)$ (см. формулу (8)) является линейным, $u_{1,1} - u = -c(u_1 - \bar{u}_1 + c_1)$. При этом $\dim T = 2$, так что $\Delta(k) = 0$ при $k \geqslant 0$.

Аналогично проверяем, что условие (9б) приводит к уравнению (12). Действительно, предположим, что $\Delta(0) = 1$ и $\Delta(1) < 2$. Тогда имеем

$$P_1 = \nu Q_1 + \epsilon R_1. \tag{13}$$

Здесь в силу леммы 2 функции ν и ϵ могут зависеть только от $x, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \dots$. Применим автоморфизм (4) к обеим частям уравнения (13) и затем упростим с учетом уравнений (11):

$$\begin{aligned} &x(\nu Q_1 + \epsilon R_1) + x'R_1 - rY + xrX = \\ &\qquad = D(\nu)\biggl(\frac{1}{x}Q_1 + \frac{x'}{x}R_1 + \frac{x''}{x}Y - x''X\biggr) + D(\epsilon)\biggl(R_1 + \frac{x'}{x}Y - x'X\biggr). \end{aligned}$$

Из сравнения коэффициентов перед линейно независимыми операторами получаем условия

$$\begin{aligned} Q_1\colon &\quad x\nu = \frac{1}{x}D(\nu), \\ R_1\colon &\quad x' + x\epsilon = \frac{x'}{x}D(\nu) + D(\epsilon), \\ Y\colon &\quad r = \frac{x'}{x}D(\epsilon) + \frac{x''}{x}D(\nu), \\ X\colon &\quad xr = -x'D(\epsilon) - x''D(\nu). \end{aligned}$$

Анализируя эти равенства, приходим к выводу, что уравнение (13) выполнено, если и только если справедливы следующие три условия: $\nu = 0$, $\epsilon = \mathrm{const}$, $x' = \epsilon(1-x)$. Действительно, при этих условиях два последних уравнения выполняются автоматически. Аналогично можно проверить, что $Q_1 = \nu P_1 - \epsilon R_1$ эквивалентно тем же трем условиям. Таким образом, если $\Delta(1) < 2$, то $\Delta(1) = 0$, и поэтому $\Delta(k) = 0$ для любого натурального $k \geqslant 1$. В этом случае $\dim T = 3$.

Теперь предположим, что $\Delta(0) = 1$, $\Delta(1) = 2$ и $\Delta(2) \leqslant 2$, что соответствует случаю (9в). Пусть Z линейно выражается через другие векторные поля из V_3:

$$Z = \alpha X + \beta Y + \gamma R_1 + \delta P_1 + \epsilon Q_1 + \phi R_2 + \psi W. \tag{14}$$

Очевидно, $\alpha = \beta = 0$, поскольку $X = \partial/\partial \bar{u}_{-1}$ и $Y = \partial/\partial u + x\partial/\partial u_1 + \cdots$, а Z не содержит членов $\partial/\partial \bar{u}_{-1}$ и $\partial/\partial u$.

Применяя автоморфизм к обеим частям равенства (14) и сравнивая коэффициенты перед линейно независимыми операторами, находим

$$\begin{aligned}
&W\colon && x^2\psi = D(\psi)\frac{1}{x^2},\\
&R_2\colon && x^2\phi = D(\phi),\\
&Q_1\colon && x^2\epsilon = D(\epsilon)\frac{1}{x} + \frac{x'}{x}\phi,\\
&P_1\colon && x^2\delta = D(\delta)x + x'\phi,\\
&R_1\colon && x^2\gamma + (x')^2 - 2xx'' = D(\delta)x' + D(\gamma).
\end{aligned}$$

Поскольку $x = x(u_1 - \bar{u}_{-1})$, имеем $\psi = 0$, $\phi = 0$, $\epsilon = 0$, $\delta = 0$, $\gamma = \mathrm{const}$. Сравнение коэффициентов при X и Y дает еще одно уравнение $xq = \gamma x'$. Наконец, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для x:

$$x^2 x''' - 2xx'x'' + (x')^3 = \gamma x', \qquad (x^2-1)\gamma + (x')^2 - 2xx'' = 0.$$

Условие совместности этих уравнений эквивалентно уравнению (12). В этом случае $Z = \gamma R_1$. Замечательно, что x есть решение уравнения (12), если и только если W линейно выражается через другие элементы из V_3, и тогда $W = \gamma R_1$. И последняя возможность – поле R_2 линейно выражается через X, Y, R_1, P_1, Q_1, W и Z. В этом случае x является решением уравнения $x' = 0$. Доказательство теоремы завершено.

Чтобы найти $x = x(\alpha)$, вычислим интеграл

$$H(x) := \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)\gamma + x\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln\bigl(2\sqrt{(x^2+1)\gamma + x\nu} + 2x + b\bigr). \tag{15}$$

Теперь найдем x, решая уравнение $H(x) = \alpha - \alpha_0$:

$$x(\alpha) = \frac{1}{4}e^{\sqrt{\gamma}\,(\alpha-\alpha_0)} - \frac{\nu}{2\gamma} - \left(1 - \frac{\nu^2}{4\gamma^2}\right)e^{-\sqrt{\gamma}\,(\alpha-\alpha_0)}.$$

Чтобы получить соответствующее уравнение (8) на квад-графе, проинтегрируем еще раз:

$$\beta = g^{-1}(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{x(\alpha)}. \tag{16}$$

Тогда искомое уравнение будет иметь вид (8). Наша гипотеза состоит в том, что если уравнение (8) является S-интегрируемым, то g получается из соотношений (15), (16). Вычислив интеграл (16), находим список требуемых уравнений.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если для цепочки* (8) *выполнено одно из условий* (9а)–(9в), *то цепочка имеет один из следующих видов*:

$$u_{1,1} - u = c(u_1 - \bar{u}_1 - \beta_0) \qquad \textit{при} \quad \gamma = \nu = 0; \tag{17}$$

$$ae^{\sqrt{\gamma}\,(u_{1,1}-u)} = b + ce^{-\sqrt{\gamma}(u_1-\bar{u}_1)} \qquad \textit{при} \quad \nu = -2\gamma; \tag{18}$$

$$(u_{1,1} - u - \alpha_0)(u_1 - \bar{u}_1 - \beta_0) = \frac{1}{4\nu} \qquad \textit{при} \quad \gamma = 0, \quad \nu \neq 0; \tag{19а}$$

$$ae^{\sqrt{\gamma}\,(u_{1,1}-u)} = b + ce^{\sqrt{\gamma}\,(u_1-\bar{u}_1)} \qquad \textit{при} \quad \nu = 2\gamma; \tag{19б}$$

$$\left(4 - \frac{\nu^2}{\gamma^2}\right)e^{\sqrt{\gamma}\,(u_{1,1}-u-\alpha_0)} + \frac{\nu}{\gamma} = 2\,\mathrm{th}\,\frac{\sqrt{\gamma}\,(u_1 - \bar{u}_1) - \beta_0}{2} \qquad \textit{при} \quad \gamma \neq 0, \quad \nu \neq \pm 2\gamma, \tag{19в}$$

где a, b, c, α_0, β_0 – *константы.*

Уравнение (19а) есть не что иное, как хорошо известное дискретное потенцированное уравнение КдФ (6). Уравнения (18) и (19б) сводятся одно к другому простой заменой независимых переменных $m \leftrightarrow n$. Сделав замену переменных $u = (1/\sqrt{\gamma})\ln v$, мы приводим два последних уравнения (19б) и (19в) к билинейному виду

$$a\bar{v}_1 v_{1,1} = bv\bar{v}_1 + cvv_1, \tag{20а}$$

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \bar{v}_1)v_{1,1} + v(\alpha_3 v_1 + \alpha_4 \bar{v}_1) = 0, \tag{20б}$$

где

$$\alpha_1 = \left(2 - \frac{\nu^2}{2\gamma^2}\right)e^{-\sqrt{\gamma}\,\alpha_0 - \beta_0} \neq 0, \qquad \alpha_2 = \left(2 - \frac{\nu^2}{2\gamma^2}\right)e^{-\sqrt{\gamma}\,\alpha_0} \neq 0,$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{\nu}{2\gamma} - 1\right)e^{-\beta_0} \neq 0, \qquad \alpha_4 = \left(\frac{\nu}{2\gamma} + 1\right) \neq 0.$$

Уравнение (20а) было введено в работе [11], а недавно было доказано, что оно допускает бесконечный ряд высших симметрий [19]. Уравнение (20б) представляет собой частный случай уравнения Хиетаринта–Виалле [20]

$$c_1 u\bar{u}_1 + c_2 u_1 u_{1,1} + c_3 uu_1 + c_4 \bar{u}_1 u_{1,1} + c_5(uu_{1,1} + u_1\bar{u}_1) = 0$$

при $c_5 = 0$. Недавно было доказано, что это уравнение проходит симметрийный тест [21].

Исследуем множество G, состоящее из полей X, Y и всех их кратных коммутаторов. Определим порядок $\operatorname{ord} Z$ элемента $Z \in G$ как число входящих в него X и Y минус единица. Например, $\operatorname{ord}[X,Y] = 1$, $\operatorname{ord}[X,[X,Y]] = 2$ и т. д. Определим степень $\deg Z$ элемента Z как показатель k в соотношении сопряжения $DZD^{-1} =$

$x^k Z + \cdots$, где многоточием обозначена линейная комбинация элементов с порядком, меньшим чем $\operatorname{ord} Z$. Обозначим через $G_{i,j}$ подмножество в G, содержащее элементы с порядком i и степенью j. Рассмотрим объединение $G_i = \bigcup_j G_{i,j}$. Очевидно, что множество $G_{i,i-1}$ (множество $G_{i,-i+1}$) содержит единственный элемент $Z_{i,i-1} = \operatorname{ad}_X^i(Y)$ с точностью до множителя -1 (соответственно единственный элемент $Z_{i,-i+1} = \operatorname{ad}_Y^i(X)$ с точностью до множителя -1). Здесь оператор ad определяется как $\operatorname{ad}_X(Y) = [X, Y]$.

Теорема 3. *Пусть операторы $Z_{k,k-1}$ (операторы $Z_{k,-k+1}$) лежат в базисе линейного пространства $V_k \supset G_k$ при всех k, $3 \leqslant k < N$, а оператор $Z_{N,N-1}$ (соответственно $Z_{N,-N+1}$) линейно выражается через другие операторы в V_N. Тогда функция $x = x(u_1 - \bar{u}_{-1})$ является решением уравнения вида $x' = \epsilon(x-1)$ с постоянным коэффициентом ϵ.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 3. *При любом $k \geqslant 3$ справедливо равенство*

$$DZ_{k+1,k}D^{-1} = x^k Z_{k+1,k} - c_k x' x^{k-1} Z_{k,k-1} + \cdots,$$

где $c_k \geqslant 0$ (причем $c_k > 0$ при $k > 3$), а многоточием обозначена линейная комбинация операторов порядка меньше k.

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Из уравнений (11) получаем для $Z = Z_{3,2}$ и $R_1 = Z_{1,0}$ представление

$$DZ_{3,2}D^{-1} = x^2 Z_{3,2} + \big((x')^2 - 2xx''\big)Z_{1,0} + qY - xqX, \qquad q = xx''' - 2x'x'' + \frac{(x')^3}{x},$$

показывающее, что утверждение верно при $k = 3$. Теперь предположим, что

$$DZ_{k,k-1}D^{-1} = x^{k-1} Z_{k,k-1} - c_{k-1} x' x^{k-2} Z_{k-1,k-2} + \cdots,$$

и вычислим $DZ_{k+1,k}D^{-1}$:

$$\begin{aligned} DZ_{k+1,k}D^{-1} &= [xX, x^{k-1} Z_{k,k-1} - c_{k-1} x' x^{k-2} Z_{k-1,k-2} + \cdots] = \\ &= x^k Z_{k+1,k} - c_k x' x^{k-1} Z_{k,k-1} + \cdots, \end{aligned}$$

где $c_k = c_{k-1} + k - 1 > c_{k-1} > 0$. Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что

$$Z_{N,N-1} = \sum_{\operatorname{ord} Z_\nu = N} a_\nu Z_\nu + \sum_{\operatorname{ord} Z_\mu = N-1} b_\mu Z_\mu + \cdots, \tag{21}$$

где Z_ν и Z_μ – базис в V_N, а многоточием обозначена линейная комбинация операторов меньшего порядка. Применим автоморфизм $D(\,\cdot\,)D^{-1}$ (см. формулу (4)) к обеим частям равенства (21):

$$\begin{aligned} x^{N-1}\Bigg(\sum_{\operatorname{ord} Z_\nu = N} a_\nu Z_\nu + \sum_{\operatorname{ord} Z_\mu = N-1} b_\mu Z_\mu + \cdots\Bigg) - x^{N-2} x' c_{N-1} Z_{N-1,N-2} + \cdots = \\ = \sum_{\operatorname{ord} Z_\nu = N} D(a_\nu)(x^{k_\nu} Z_\nu + \cdots) + \sum_{\operatorname{ord} Z_\mu = N-1} D(b_\mu)(x^{k_\mu} Z_\mu + \cdots). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты перед Z_ν, получаем

$$x^{N-1}a_\nu = x^{k_\nu}D(a_\nu), \qquad k_\nu \neq N-1. \tag{22}$$

В силу леммы 2 функции a_ν и b_μ зависят от переменной x и ее сдвигов. С другой стороны, из формулы (22) следует, что функции a_ν не могут зависеть от $x, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \dots$. Поэтому единственной возможностью является $a_\nu = 0$. Теперь, сравнивая коэффициенты перед $Z_{N-1,N-2}$, находим

$$x^{N-1}b - c_{N-1}x^{N-2}x' = x^{N-2}D(b), \tag{23}$$

где b – коэффициент при $Z_{N-1,N-2}$ в разложении (21). Простой анализ уравнения (23) показывает, что b – константа. Таким образом, уравнение (23) эквивалентно уравнению $x' = \epsilon(x-1)$ при $\epsilon = b/c_{N-1}$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Случай* (9г) *схемы классификации никогда не реализуется.*

Доказательство. Предположим противное: пусть данный случай реализуется. Тогда по крайней мере одно из векторных полей $Z_{k,k-1}$ или $Z_{k,-k+1}$ должно линейно выражаться через другие элементы из V_k, иначе $\Delta(k) \geqslant 2$. Поэтому в силу теоремы 3 мы имеем $x' = \epsilon(x-1)$, что соответствует случаю (9б) $\Delta(0) = 1$, $\Delta(1) < 2$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно. Доказательство завершено.

Рассмотрим подробно пробные кольца T и $\overline{T}$ для уравнения (19а) из списка в следствии 1. Ранее было отмечено, что это уравнение редуцируется к уравнению (18) простой заменой независимых переменных $m \leftrightarrow n$. Как было показано выше в случае уравнения (18), размерность кольца T равна 3. Отсюда немедленно следует, что для уравнения (19б) мы имеем $\dim \overline{T} = 3$. Теперь сосредоточимся на кольце T для этого уравнения. Без потери общности положим $\gamma = 1$ и получим

$$ae^{u_{1,1}-u} = b + ce^{u_1-\bar{u}_1}. \tag{24}$$

Мы уже доказали, что для уравнения (24) функция $x = x(\alpha)$ является решением уравнения $x' = x+1$. Характеристические векторные поля X и Y действуют на переменные x, $y = D^{-1}x$ следующим образом:

$$Xx = -x' = -x-1, \qquad Xy = -yy' = -y^2-y, \qquad Yx = xx' = x^2+x, \qquad Yy = y+1.$$

Теорема 4. *Последовательность* $X, Y, R_1, P_1, Q_1, R_2, P_2, Q_2, \dots$ *определена как* $R_1 = [X,Y]$, $P_1 = [X, R_1]$, $Q_1 = [Y, R_1]$, $\dots$, $R_{k+1} = [X, Q_k]$, $P_k = [X, R_k]$, $Q_k = [Y, R_k]$, $k \geqslant 1$, *и образует базис пробного кольца* T *уравнения* (24).

Схема доказательства. Начнем с соотношений сопряжения для кратных коммутаторов. Например, $D(R_1 - Y + X)D^{-1} = R_1 + Y - X$. Нетрудно доказать по индукции, что при $k \geqslant 1$

$$D(P_k - R_k)D^{-1} = x(P_k + R_k),$$
$$D(Q_k - R_k)D^{-1} = \frac{1}{x}(Q_k + R_k),$$
$$D(R_{k+1} - Q_k - P_k + R_k)D^{-1} = R_{k+1} + Q_k + P_k + R_k.$$

Из этих соотношений следует, что $[Y, P_k] = [X, Q_k]$ и $[X, P_1] = [Y, Q_1] = R_1$. Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
&[R_k, R_j] = [Q_k, Q_j] = [P_k, P_j] = 0,\\
&[R_k, P_j] = P_{k+j} - Q_{k+j-1}, \qquad [R_k, Q_j] = -Q_{k+j} + P_{k+j-1},\\
&[P_k, Q_j] = -R_{k+j+1} + R_{k+j-1}.
\end{aligned}
$$

Теперь можно заключить, что для уравнения (24) пробное кольцо T удовлетворяет условиям $\Delta(2k) = 1$ и $\Delta(2k+1) = 2$, равно как и для дискретного потенциированного уравнения КдФ (19а). Таким образом, это уравнение полностью проходит наш алгебраический тест. Для случая (19в) в списке из следствия 1 пробные кольца пока подробно не исследовались.

Суммируем полученные выше результаты в следующей теореме.

Теорема 5. *Предположим, что уравнение вида* (8) *проходит алгебраический тест* (*удовлетворяет гипотезе из раздела* 2). *Тогда оно имеет вид, заданный в следствии* 1 *из теоремы* 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предложили новую схему классификации уравнений на квад-графах, основанную на распределениях характеристических векторных полей (см., например, [22]). Получен исчерпывающий список уравнений вида $u_{1,1} - u = g(u_1 - \bar{u}_1)$, проходящих предложенный тест на интегрируемость. Важно, что обо всех найденных уравнениях уже известно, что они интегрируемы. Показано, что выдвинутая гипотеза является эффективным средством классификации интегрируемых уравнений на квад-графах.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. В. Жиберу и Р. И. Ямилову за полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-01-91222-CT_a, 11-01-97005-r_povoljie_a, 10-01-00088_a).

Список литературы

[1] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Int. Math. Res. Not.*, **2002**:11 (2002), 573–611, arXiv: nlin/0110004.

[2] F. W. Nijhoff, *Phys. Lett. A*, **297**:1–2 (2002), 49–58, arXiv: nlin/0110027.

[3] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Comm. Math. Phys.*, **233**:3 (2003), 513–543, arXiv: nlin/0202024.

[4] F. W. Nijhoff, A. J. Walker, *Glasgow Math. J.*, **43**:A (2001), 109–123.

[5] D. Levi, R. I. Yamilov, *On a nonlinear integrable difference equation on the square 3D-inconsistent*, arXiv: 0902.2126; *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 75–101.

[6] P. Xenitidis, *Integrability and symmetries of difference equations*: *the Adler–Bobenko–Suris case*, arXiv: 0902.3954.

[7] O. G. Rasin, P. E. Hydon, *J. Phys. A*, **40**:42 (2007), 12763–12773.

[8] A. V. Mikhailov, J. P. Wang, P. Xenitidis, *Recursion operators*, *conservation laws and integrability conditions for difference equations*, arXiv: 1004.5346.

[9] A. Tongas, D. Tsoubelis, P. Xenitidis, *J. Math. Phys.*, **42**:12 (2001), 5762–5784.

[10] M. P. Bellon, C.-M. Viallet, *Comm. Math. Phys.*, **204**:2 (1999), 425–437, arXiv: chao-dyn/9805006.

[11] F. W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta, *Stud. Appl. Math.*, **106**:3 (2001), 261–314, arXiv: solv-int/9812011.

[12] B. Grammaticos, G. Karra, V. Papageorgiou, A. Ramani, "Integrability of discrete-time systems", *Chaotic Dynamics*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B. Phys., **298**, ed. T. Bountis, Plenum, New York, 1992, 75–90.

[13] J. Hietarinta, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, Suppl. 2 (2005), 223–230.

[14] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 10–21.

[15] А. В. Жибер, Ф. Х. Мукминов, "Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры", *Задачи математической физики и асимптотика их решений*, ред. Л. А. Калякин, БНЦ УРО АН СССР, Уфа, 1991, 14–33.

[16] А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:7 (2006), 65–78.

[17] I. T. Habibullin, *SIGMA*, **1** (2005), 023, 9 pp., arXiv: nlin.SI/0506027.

[18] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, *Acta Appl. Math.*, **39**:1–3 (1995), 133–158.

[19] A. G. Rasin, *J. Phys. A*, **43**:23 (2010), 235201, 11 pp., arXiv: 1001.0724.

[20] J. Hietarinta, C. Viallet, *J. Phys. A*, **40**:42 (2007), 12629–12643, arXiv: 0705.1903.

[21] D. Levi, R. I. Yamilov, *Generalized symmetry integrability test for discrete equations on the square lattice*, arXiv: 1011.0070, accepted by J. Phys. A.

[22] B. Doubrov, I. Zelenko, *J. London Math. Soc.*, **80**:3 (2009), 545–566, arXiv: math.DG/0703662.