

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Оптическая буферность и механизмы ее возникновения,
ТМФ, 2004, том 140, номер 1, 14–28

<https://www.mathnet.ru/tmf79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:34:50



ОПТИЧЕСКАЯ БУФЕРНОСТЬ И МЕХАНИЗМЫ ЕЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Исследуется одна математическая модель из нелинейной оптики, представляющая собой скалярное параболическое уравнение на окружности с малым коэффициентом диффузии и отклоняющимся аргументом по пространственной переменной. Устанавливается, что в рассматриваемой задаче имеет место так называемое *явление буферности*, т.е. при подходящем выборе параметров можно добиться сосуществования в ней любого фиксированного числа устойчивых периодических по времени решений. Выявляются механизмы возникновения указанного феномена.

Ключевые слова: краевая задача, бифуркация, буферность, бегущие волны, квазинормальная форма, уравнение Гинзбурга–Ландау.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На окружности $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K(1 + \gamma \cos u_h), \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (1)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Эта краевая задача использовалась в качестве модели [1], [2] для описания динамики светового поля в световых резонаторах с распределенной обратной связью в случае одномерной по пространству модели, учитывающей изменение поля только по углу. Здесь $u(t, x)$ – фаза световой волны, $u_h = u(t, x + h)$, h – угол поворота поля в контуре обратной связи, коэффициент $K > 0$ пропорционален интенсивности светового потока, $\gamma \in (0, 1)$ – видность интерференционной картины.

В регулярном случае ($\varepsilon \sim 1$) вопрос об автоколебаниях задачи (1) был рассмотрен в работе [2]. Более общие регулярные случаи изучались в ряде работ, библиография которых имеется, например, в статьях [3], [4]. Что же касается случая малой диффузии, то он представляет интерес в свете экспериментально обнаруженного явления распада структур (оптической турбулентности) при уменьшении коэффициента диффузии частиц нелинейной среды.

* Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия.
E-mail: kolesov@univ.uniyar.ac.ru

† Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: rozov@rozov.mcsme.ru

В качестве фазового пространства рассматриваемой задачи возьмем соболевское пространство $H = W_2^1(S)$. Будем далее интересоваться вопросами о существовании и устойчивости (в метрике H) ее пространственно-неоднородных стационарных режимов, бифурцирующих при увеличении параметра K и при фиксированных γ, h из так называемых пространственно-однородных состояний равновесия, т.е. из решений вида $u(t, x) \equiv u_0$, где $u_0 = u_0(K)$ – некоторый корень уравнения

$$u_0 = K(1 + \gamma \cos u_0). \quad (2)$$

Следует, однако, заметить, что с ростом K количество сосуществующих корней уравнения (2) неограниченно растет, причем, что характерно, при $K \rightarrow \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются (парами) новые состояния равновесия и умирают старые. В связи с этим в первую очередь возникает проблема выбора подходящего однородного состояния равновесия, т.е. такого, которое колебательным образом теряет устойчивость при увеличении K .

Итак, фиксируем произвольно какую-либо непрерывную ветвь решений

$$u_0 = u_0(K), \quad 1 + K\gamma \sin u_0(K) \neq 0, \quad (3)$$

уравнения (2), которая, подчеркнем, определена только на некотором конечном промежутке (K_1, K_2) изменения параметра K (при $K = K_j$, $j = 1, 2$, фигурирующее в (3) неравенство обращается в строгое равенство). Линеаризуем затем исходную задачу (1) на состоянии равновесия (3) и применим к получившейся линейной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda(K)u_h, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (4)$$

где $\Lambda(K) = K\gamma \sin u_0(K)$, метод Фурье по системе функций $e^{\pm imx}$, $m = 0, 1, \dots$. В результате убеждаемся, что спектр устойчивости рассматриваемого состояния равновесия состоит из собственных значений

$$\lambda_m, \bar{\lambda}_m: \lambda_m(K, \varepsilon) = -1 - \varepsilon m^2 - \Lambda(K)e^{imh}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Заметим, что для любого состояния равновесия (3) на всем промежутке его существования (K_1, K_2) выполняется одно из двух неравенств: $\Lambda(K) < -1$ или $\Lambda(K) > -1$. Ясно также, что первый случай не представляет интереса для наших целей, поскольку здесь рассматриваемое состояние равновесия неустойчиво при любом допустимом K (из формул (5) следует, что, например, $\lambda_0 > 0$ при всех $K \in (K_1, K_2)$).

Предположим теперь, что реализуется второй случай, а именно $\Lambda(K) > -1$ при всех $K \in (K_1, K_2)$. Тогда целесообразно ограничиться рассмотрением только тех значений K , для которых $\Lambda(K) \geq 1$. Действительно, снова привлекая формулы (5), убеждаемся, что в противном случае, т.е. при $|\Lambda(K)| < 1$, справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_m(K, \varepsilon) \leq -1 + |\Lambda(K)| < 0, \quad m \geq 0,$$

а значит, состояние равновесия (3) заведомо устойчиво.

Продоланный линейный анализ показывает, что интересующие нас состояния равновесия (3), т.е. те из них, которые в принципе могут сменить устойчивость при изменении параметра K , должны удовлетворять дополнительному условию $\Lambda(K) \geq 1$. В связи с этим возникает проблема реализуемости данного условия, которую решает приводимая ниже лемма 1. Перед ее формулировкой заметим, что непрерывные ветви решений (3), для которых $\Lambda(K) \geq 0$, уравнение (2) имеет только при

$$K_1^r \leq K \leq K_2^r, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где $K_1^r = 2\pi r / (1 + \gamma)$, $K_2^r = (2r + 1)\pi / (1 - \gamma)$. В качестве же соответствующего решения $u_0 = u_0(K)$ на каждом из промежутков (6) изменения параметра K следует взять корень

$$u_0 = u_{0,r}(K) : \quad u_{0,r}(K_1^r) = 2\pi r, \quad u_{0,r}(K_2^r) = (2r + 1)\pi, \quad (7)$$

уравнения (2) из отрезка $2\pi r \leq u_0 \leq (2r + 1)\pi$, который, подчеркнем, определяется однозначно. И, наконец, положим $\Lambda_r(K) = K\gamma \sin u_{0,r}(K)$.

ЛЕММА 1. *Для любого натурального r существует единственное значение $K_{\max}^r \in (K_1^r, K_2^r)$ такое, что $\Lambda_r'(K) > 0$ при $K_1^r \leq K < K_{\max}^r$, $\Lambda_r'(K) < 0$ при $K_{\max}^r < K \leq K_2^r$. Кроме этого, при $r \rightarrow \infty$ справедливо предельное равенство*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_r(K_{\max}^r)}{r} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая в формуле

$$\Lambda_r'(K) = \gamma \sin u_{0,r}(K) + K\gamma \cos u_{0,r}(K) u'_{0,r}(K) \quad (9)$$

вытекающие из уравнения (2) равенства

$$K u'_{0,r} = \frac{u_{0,r}}{1 + \Lambda_r(K)}, \quad K = \frac{u_{0,r}}{1 + \gamma \cos u_{0,r}}, \quad (10)$$

после несложных преобразований приходим к выводу, что уравнение $\Lambda_r'(K) = 0$ записывается в виде

$$(1 + \gamma \cos u_{0,r}) \sin u_{0,r} + u_{0,r}(\gamma + \cos u_{0,r}) = 0. \quad (11)$$

Полагая далее в (11) $u_{0,r} = 2\pi r + v$, убеждаемся, что это уравнение в свою очередь эквивалентно уравнению

$$\Phi_r(v) \equiv (1 + \gamma \cos v) \sin v + (v + 2\pi r)(\gamma + \cos v) = 0 \quad (12)$$

для нахождения $v \in [0, \pi]$.

Нетрудно видеть, что

$$\Phi_r(0) = 2\pi r(\gamma + 1) > 0, \quad \Phi_r(\pi) = (2r + 1)\pi(\gamma - 1) < 0.$$

Поэтому уравнение (12) имеет по крайней мере один корень $v = v_{*,r} \in (0, \pi)$. Для того чтобы убедиться в его единственности, покажем, что для любого такого корня выполняется неравенство $\Phi'_r(v_{*,r}) < 0$. С этой целью учтем в формуле

$$\Phi'_r(v) = 2 \cos v (1 + \gamma \cos v) - (v + 2\pi r) \sin v$$

вытекающее из (12) соотношение

$$v_{*,r} + 2\pi r = -\frac{(1 + \gamma \cos v_{*,r}) \sin v_{*,r}}{\gamma + \cos v_{*,r}}.$$

В итоге получаем равенство

$$\Phi'_r(v_{*,r}) = \frac{(1 + \gamma \cos v_{*,r})(1 - \gamma^2 + (\gamma + \cos v_{*,r})^2)}{\gamma + \cos v_{*,r}},$$

а так как из (12) с необходимостью следует $\gamma + \cos v_{*,r} < 0$, то отсюда и получаем нужный факт, т.е. оценку $\Phi'_r(v_{*,r}) < 0$.

Итак, установлено существование у уравнения (12) на отрезке $0 \leq v \leq \pi$ единственного корня $v = v_{*,r} \in (0, \pi)$. Это означает, что исходное уравнение $\Lambda'_r(K) = 0$ имеет на отрезке $K_1^r \leq K \leq K_2^r$ единственный корень

$$K_{\max}^r = \frac{2\pi r + v_{*,r}}{1 + \gamma \cos v_{*,r}} \in (K_1^r, K_2^r). \quad (13)$$

Кроме того, из (7), (9) и (10) следует, что $\Lambda'_r(K_1^r) > 0$, $\Lambda'_r(K_2^r) < 0$, а значит, автоматически выполняются требуемые в лемме 1 неравенства $\Lambda'_r(K) > 0$ (< 0) при $K - K_{\max}^r < 0$ (> 0).

Для обоснования предельного равенства (8) подставим формулу (13) вместе с представлением $u_{0,r}(K_{\max}^r) = 2\pi r + v_{*,r}$ в явное выражение для $\Lambda_r(K)$. В итоге убеждаемся, что

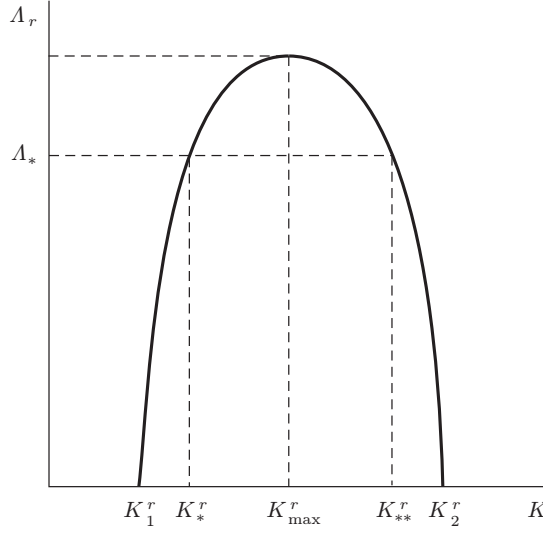
$$\Lambda_r(K_{\max}^r) = \frac{(2\pi r + v_{*,r})\gamma \sin v_{*,r}}{1 + \gamma \cos v_{*,r}}. \quad (14)$$

Обратимся далее к уравнению (12), из которого вытекает асимптотическое представление

$$v_{*,r} = \arccos(-\gamma) + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (15)$$

И наконец, объединяя (14) и (15), без труда получаем требуемое предельное соотношение (8). Лемма доказана.

Из установленной леммы 1 и очевидных равенств $\Lambda_r(K_j^r) = 0$, $j = 1, 2$, следует, что график функции $\Lambda_r(K)$ на отрезке (6) имеет вид, показанный на рисунке. А так как $\Lambda_r(K_{\max}^r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ (см. (8)), то для любого фиксированного значения $\Lambda_* > 0$



при всех достаточно больших r на отрезке (6) существует интервал (K_*^r, K_{**}^r) , на котором $\Lambda_r(K) > \Lambda_*$.

Остановимся теперь на выборе фигурирующего в задаче (1) параметра h . Из формул (5) следует, что при иррациональном отношении $2\pi/h$ спектр устойчивости любого состояния равновесия краевой задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$ фактически меняется непрерывно (в этом случае предельные значения последовательности e^{imh} заполняют всю единичную окружность). Поэтому во избежание указанной трудности будем предполагать, что отношение $2\pi/h$ близко к рациональному. Точнее говоря, всюду ниже считаем, что, как и в работах [4], [5],

$$h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad h_0 = \frac{2\pi p}{q}, \quad (16)$$

где h_1 — произвольно фиксированный вещественный параметр. Что же касается натуральных p и q , то предполагаем, что они взаимно просты, причем $q \geq 3$ нечетно. Причины такого выбора p, q объясняет следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Среди целых чисел $m = 0, 1, \dots, q$ существуют ровно два таких значения $m_1 = m_*$ и $m_2 = q - m_*$, $m_* < q/2$, что

$$\min_{0 \leq m \leq q} \cos\left(\frac{2\pi p}{q} m\right) = \cos\left(\frac{2\pi p}{q} m_1\right) = \cos\left(\frac{2\pi p}{q} m_2\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из простых геометрических соображений. Действительно, рассмотрим на комплексной плоскости z набор точек $z_m = e^{2i\pi p m/q}$, $m = 0, 1, \dots, q-1$. Из предполагаемой взаимной простоты p и q следует, что все они попарно различны, а значит, представляют собой полный набор корней степени q из единицы. Далее из нечетности q заключаем, что, во-первых, $z_m \neq -1$ при всех m ;

во-вторых, существуют ровно две точки z_{m_0} и $\bar{z}_{m_0} = z_{q-m_0}$, ближайšie к $z = -1$. Ясно также, что минимум в (17) достигается только на номерах $m = m_0$, $m = q - m_0$ и, в частности, $m_* = \min(m_0, q - m_0)$. И наконец остается добавить, что поскольку точки z_{m_0} и $\bar{z}_{m_0}$ получаются друг из друга поворотом на угол $2\pi/q$, то $\operatorname{Re} z_{m_0} = -\cos(\pi/q)$. Лемма 2 доказана.

Проделанный предварительный анализ позволяет перейти к аккуратной постановке бифуркационной проблемы. Для этого нам потребуются величина

$$\Lambda_* = \frac{1}{\cos(\pi/q)} > 1 \quad (18)$$

и функция

$$\varphi(\Lambda) = \max_{0 \leq m \leq q} \left[-1 - \Lambda \cos\left(\frac{2\pi p}{q} m\right) \right], \quad (19)$$

которую будем рассматривать при $\Lambda \geq 0$. Из свойств (17) вытекает, что

$$\varphi(\Lambda) = -1 + \frac{\Lambda}{\Lambda_*} \quad (20)$$

и что максимум функции (19) достигается только при $m = m_*$ и $m = q - m_*$, где m_* — натуральное число, определяемое в лемме 2.

Первый этап описания бифуркационной проблемы, как уже отмечалось выше, заключается в выборе подходящего состояния равновесия из семейства (7). В связи с этим фиксируем любое натуральное r , для которого выполняется неравенство

$$\Lambda_r(K_{\max}^r) > \Lambda_*, \quad (21)$$

где Λ_* — величина (18) (возможность подобного выбора гарантирует лемма 1). Сделаем далее в краевой задаче (1) замену $u = u_{0,r}(K) + v$, приводящую ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v &= \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda_r(K) v_h + F(K, v_h), \\ v(t, x + 2\pi) &\equiv v(t, x), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$F(K, v) = \Lambda_r(K) v + K\gamma [\cos(u_{0,r}(K) + v) - \cos u_{0,r}(K)], \quad (23)$$

и будем считать, что параметр K в ней меняется на отрезке (6), а угол поворота поля h задан равенством (16).

Второй этап состоит в определении критических значений параметра K , при прохождении через которые происходит смена устойчивости нулевого решения краевой задачи (22). В связи с этим напомним, что спектр устойчивости упомянутого решения состоит из собственных значений (5) (при $\Lambda(K) = \Lambda_r(K)$) и, в частности, справедливо вытекающее из (5), (16) равенство

$$\max_{m \geq 0} \operatorname{Re} \lambda_m(K, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \varphi(\Lambda_r(K)), \quad (24)$$

где $\varphi(\Lambda)$ – функция (19). Рассмотрим далее уравнение $\Lambda_r(K) = \Lambda_*$, которое в силу (21) имеет на интервале $K_1^r < K < K_2^r$ ровно два корня $K_*^r < K_{**}^r$, причем $\Lambda_r(K) > \Lambda_*$ при $K \in (K_*^r, K_{**}^r)$ и $\Lambda_r(K) < \Lambda_*$ при $K \in [K_1^r, K_*^r) \cup (K_{**}^r, K_2^r]$ (см. рисунок). А отсюда и из равенств (20), (24) заключаем, что при любом фиксированном $K \in [K_1^r, K_2^r] \setminus [K_*^r, K_{**}^r]$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ нулевое решение задачи (22) экспоненциально устойчиво, а при $K \in (K_*^r, K_{**}^r)$ – неустойчиво. Таким образом, интересующая нас бифуркационная проблема имеет смысл, например, при

$$K = K_*^r + \varepsilon\alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (25)$$

Итак, объектом дальнейшего анализа служит краевая задача (22) при условиях (16), (25). Точнее говоря, поставим вопрос о существовании и устойчивости ее периодических решений типа бегущих волн, т.е. вида

$$v = v(y) : \quad v(y + 2\pi) \equiv v(y), \quad y = \omega t + nx, \quad \omega = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

бифурцирующих из нулевого положения равновесия при увеличении параметра α . Как будет показано ниже, при надлежащем увеличении α и уменьшении ε данная задача может иметь любое наперед заданное фиксированное число устойчивых бегущих волн, т.е. в ней реализуется явление буферности.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для выявления характера возможных бифуркаций, происходящих в краевой задаче (22) при условиях (16), (25), обратимся к аналогичной (4) линейной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v + \Lambda_* v \left(t, x + \frac{2\pi p}{q} \right) = 0, \quad v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (26)$$

получающейся из (22) при $\varepsilon = 0$ и после отбрасывания нелинейности (23). Полагая далее в (26) $v = e^{\lambda t + imx}$, $m \in \mathbb{Z}$, приходим к выводу, что спектр устойчивости этой задачи состоит из собственных значений

$$\lambda_m = -1 - \Lambda_* e^{2i\pi pm/q}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Анализ расположения спектра (27) существенно использует способ выбора критического значения Λ_* (см. (18)) и лемму 2, из которых следует, что часть собственных значений (27) лежит на мнимой оси. А именно, справедливы равенства

$$\lambda_m = \begin{cases} i\omega_0 & \text{при } m = m_* + l_1 q, \quad l_1 \in \mathbb{Z}, \\ -i\omega_0 & \text{при } m = q - m_* + l_2 q, \quad l_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (28)$$

где $\omega_0 = -\Lambda_* \sin(2\pi pm_*/q)$, причем в силу (17) заведомо $\omega_0 \neq 0$. Что же касается оставшихся точек спектра (27), то все они имеют отрицательные действительные части. И

наконец, следует отметить, что в рамках задачи (26) чисто мнимым собственным значениям (28) соответствует семейство периодических по t решений

$$v = \xi(x)e^{iy} + \bar{\xi}(x)e^{-iy}, \quad (29)$$

где $y = \omega_0 t + m_* x$, а $\xi(x)$ — произвольная комплекснозначная периодическая (с периодом $2\pi/q$) функция.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что при условиях (16), (25) и $\varepsilon = 0$ в задаче об устойчивости нулевого решения системы (22) реализуется критический случай резонанса 1 : 1 бесконечного порядка. В подобной ситуации для построения автоколебаний, бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$, в начале 80-х г.г. Колесовым был предложен специальный асимптотический метод, названный впоследствии методом квазинормальных форм [6].

Для пояснения общей идеи метода квазинормальных форм следует выделить два этапа. На первом этапе к исходной сингулярно-возмущенной системе применяется стандартная процедура “формальной нормализации”, в процессе которой могут отбрасываться слагаемые хотя и малые по порядку относительно ε , но по силе отнюдь не являющиеся подчиненными остальным. Результатом данной процедуры оказывается некая модельная система (квазинормальная форма), которая уже не содержит малых параметров и изначально представляет собой счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в ряде случаев эту систему удается “свернуть” в ту или иную модельную краевую задачу (при изучении сингулярно-возмущенных параболических систем чаще всего приходим к комплексному уравнению Гинзбурга–Ландау, а в случае нелинейных телеграфных уравнений могут возникать модельные краевые задачи и других типов).

Второй этап — получение серии строгих результатов о соответствии между специальными стационарными режимами исходной системы и ее квазинормальной формы (как правило, речь идет о циклах или торах).

В случае краевой задачи (22) алгоритмическую часть описанного выше метода удастся организовать таким образом, что квазинормальная форма получается сразу в свернутом виде. Действительно, обыгрывая существование у линейной задачи (26) семейства периодических решений (29) и применяя некоторый аналог известного метода медленно меняющихся фаз и амплитуд, возможные автоколебательные режимы исходной задачи (22) при условиях (16), (25) будем искать в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$v = \sqrt{\varepsilon} v_0(\tau, x, y) + \varepsilon v_1(\tau, x, y) + \varepsilon^{3/2} v_2(\tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (30)$$

$$v_0 = \xi(\tau, x)e^{iy} + \bar{\xi}(\tau, x)e^{-iy}. \quad (31)$$

Здесь $\xi(\tau, x)$, $\xi(\tau, x + 2\pi/q) \equiv \xi(\tau, x)$, — пока произвольная (подлежащая определению в ходе алгоритма) комплексная “амплитуда” колебаний, а функции v_j , $j \geq 1$ представляют собой тригонометрические многочлены переменной $y = \omega_0 t + m_* x$ с коэффициентами, зависящими от τ , x и $(2\pi/q)$ -периодическими по x .

Подставим соотношения (30), (31) вместе с равенствами (16), (25) в краевую задачу (22) и учтем тейлоровское разложение в нуле функции (23), имеющее вид

$$F(K, v) = -\frac{1}{2}(u_{0,r}(K) - K)v^2 + \frac{1}{6}\Lambda_r(K)v^3 + \dots \quad (32)$$

В результате после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в правой и левой частях получившегося выражения для отыскания v_j , $j \geq 1$, приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных уравнений вида

$$Lv_j = f_j(\tau, x, y). \quad (33)$$

Здесь

$$Lv(y) = \omega_0 \frac{dv}{dy} + v + \Lambda_* v(y + h_*), \quad h_* = \frac{2\pi p}{q} m_*, \quad (34)$$

а переменные τ, x считаются параметрами.

Введем в рассмотрение характеристический квазимногочлен

$$P(\lambda) = \omega_0 \lambda + 1 + \Lambda_* e^{\lambda h_*}, \quad (35)$$

отвечающий оператору (34). При анализе уравнений (33) нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Квазимногочлен (35) имеет на мнимой оси ровно два простых корня $\lambda = \pm i$.*

Для доказательства заметим, что равенства

$$P(\pm i) = 0, \quad \operatorname{Im} P'(i) = -h_* \omega_0 \neq 0$$

очевидным образом вытекают из способа определения постоянных Λ_* , ω_0 . Предположим далее, что квазимногочлен (35) имеет на мнимой оси еще какой-нибудь корень $\lambda = i\sigma$, $\sigma \geq 0$. Тогда из условий $P(i\sigma) = 0$, $P(i) = 0$ заключаем, что одновременно

$$\Lambda_*^2 = 1 + \omega_0^2 \sigma^2, \quad \Lambda_*^2 = 1 + \omega_0^2.$$

Отсюда автоматически выводим, что $\sigma = 1$. Лемма доказана.

Из установленной леммы 3 следует, что уравнения (33) разрешимы в требуемом классе функций в том и только в том случае, когда в соответствующих неоднородностях f_j отсутствуют гармоники $e^{\pm iy}$. Однако на первом шаге алгоритма никаких трудностей не возникает. Действительно, несложный подсчет с использованием формул (31), (32) показывает, что

$$f_1 = -\frac{1}{2}(u_{0,r}(K_*^r) - K_*^r)[2|\xi|^2 + \xi^2 e^{2i(y+h_*)} + \bar{\xi}^2 e^{-2i(y+h_*)}]. \quad (36)$$

Поэтому и решение v_1 уравнения (33) (при $j = 1$) однозначно определяется в виде тригонометрического многочлена аналогичной (36) структуры, т.е. в виде

$$v_1 = v_{1,0}(\tau, x) + v_{1,2}(\tau, x)e^{2iy} + \bar{v}_{1,2}(\tau, x)e^{-2iy}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} v_{1,0} &= -\frac{u_{0,r}(K_*^r) - K_*^r}{P(0)} |\xi(\tau, x)|^2, \\ v_{1,2} &= -\frac{u_{0,r}(K_*^r) - K_*^r}{2P(2i)} \xi^2(\tau, x) e^{2ih_*}. \end{aligned} \quad (38)$$

В случае $j = 2$ ситуация несколько иная. Опираясь на явные формулы (37), (38) для v_1 и снова привлекая тейлоровское разложение (32), здесь мы приходим к неоднородности

$$\begin{aligned} f_2 &= -\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2m_* \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + m_*^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \alpha \Lambda'_r(K_*^r) v_0(\tau, x, y + h_*) - \\ &\quad - \Lambda_* h_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}(\tau, x, y + h_*) + m_* \frac{\partial v_0}{\partial y}(\tau, x, y + h_*) \right) + \frac{1}{6} \Lambda_* v_0^3(\tau, x, y + h_*) - \\ &\quad - (u_{0,r}(K_*^r) - K_*^r) v_0(\tau, x, y + h_*) v_1(\tau, x, y + h_*), \end{aligned} \quad (39)$$

которая уже содержит первые гармоники по y . Поэтому, для того чтобы обеспечить разрешимость уравнения (33) при $j = 2$ в классе тригонометрических полиномов, приравняем в (39) коэффициенты при указанных гармониках к нулю. В результате для определения имеющейся в запасе амплитуды $\xi(\tau, x)$ выводим краевую задачу:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \varkappa_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \varkappa_2 \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad \xi\left(\tau, x + \frac{2\pi}{q}\right) \equiv \xi(\tau, x), \quad (40)$$

где $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно-сопряженной краевой задаче, а коэффициенты задаются равенствами

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= (1 + i\omega_0)h_1 + 2m_*i, \quad \varkappa_2 = (1 + i\omega_0) \left(\frac{\alpha}{\Lambda_*} \Lambda'_r(K_*^r) + im_*h_1 \right) - m_*^2, \\ d &= (u_{0,r}(K_*^r) - K_*^r)^2 \left[-\frac{1 + i\omega_0}{\Lambda_*(1 + \Lambda_*)} + \frac{e^{3ih_*}}{2P(2i)} \right] - \frac{1}{2}(1 + i\omega_0). \end{aligned} \quad (41)$$

Фигурирующее в задаче (40) уравнение представляет собой известное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, в правой части которого учтено дополнительное слагаемое $\varkappa_1 \partial \xi / \partial x$. Сама же краевая задача (40), как следует из способа ее получения, является искомой “свернутой” квазинормальной формой исходной задачи (22) в окрестности бифуркационного значения (25) параметра K .

Перейдем теперь к вопросу об информации, которую содержит квазинормальная форма (40). Из результатов работы [6], посвященной обоснованию метода квазинормальных форм для параболических систем с малыми коэффициентами диффузии, вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что при некотором целом n краевая задача (40) имеет периодическое решение*

$$\xi(\tau, x) = \xi_n e^{i(\sigma_n \tau + n q x)}, \quad \xi_n = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad \sigma_n = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике фазового пространства $(\xi, \bar{\xi}) \in H \times H$, где H – гильбертово пространство $(2\pi/q)$ -периодических функций класса W_2^1). Тогда в исходной краевой задаче (22) при условиях (16), (25) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ему соответствует периодическое решение типа бегущей волны с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого получается из (30), (31) при учете равенства (42).

Сформулированная теорема сводит интересующую нас бифуркационную проблему к значительно более простому вопросу о существовании и устойчивости бегущих волн у модельной краевой задачи (40). Решение указанного вопроса опирается на следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Для коэффициента d квазинормальной формы (40) справедливо неравенство $\text{Re } d < 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из явного вида упомянутого коэффициента (см. (41)) следует, что для обоснования леммы достаточно убедиться в справедливости оценки

$$\text{Re}[e^{3ih_*} P(-2i)] \leq 0. \quad (43)$$

В связи с этим учтем в левой части неравенства (43) вытекающие из леммы 3 соотношения

$$e^{ih_*} = -\frac{1 + i\omega_0}{\Lambda_*}, \quad \omega_0^2 = \Lambda_*^2 - 1.$$

В результате после некоторых преобразований убеждаемся, что оно эквивалентно условию

$$(\Lambda_* - 2)[2(\Lambda_*^3 - 1) + \Lambda_*(3\Lambda_* - 1)] \leq 0.$$

Последнее же заведомо справедливо, поскольку в силу (18) $\Lambda_* \in (1, 2]$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к проблеме существования и устойчивости у квазинормальной формы (40) периодических решений вида (42).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что для некоторого целого n справедливо условие*

$$s_n \equiv -(m_* + nq)^2 - \omega_0 h_1(m_* + nq) + \frac{\alpha}{\Lambda_*} \Lambda'_r(K_*^r) > 0. \quad (44)$$

Тогда краевая задача (40) имеет бегущую волну (42) с данным номером n , амплитуда и частота которой задаются формулами

$$\xi_n = \sqrt{-\frac{s_n}{\text{Re } d}}, \quad \sigma_n = \text{Im}[inq\kappa_1 + \kappa_2 + d|\xi_n|^2]. \quad (45)$$

Эта бегущая волна экспоненциально орбитально устойчива при выполнении неравенств

$$Q_n(k^2 q^2) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

где

$$Q_n(z) = (z - \operatorname{Re} d |\xi_n|^2)^2 [z - 2 \operatorname{Re} d |\xi_n|^2 - (2nq + \operatorname{Im} \varkappa_1)^2] - (\operatorname{Im} d)^2 |\xi_n|^4 (2nq + \operatorname{Im} \varkappa_1)^2, \quad (47)$$

и неустойчива, если существует натуральное k_0 , для которого $Q_n(k_0^2 q^2) < 0$.

Для доказательства достаточно заметить, что существование бегущей волны (42) с амплитудой и частотой (45) – очевидное следствие леммы 4 и предполагаемого условия (44) для номера n . Что же касается свойств устойчивости рассматриваемого периодического решения, то они определяются по расположению спектра краевой задачи

$$w'' + A_0 w' + A_1 w = \lambda w, \quad w\left(x + \frac{2\pi}{q}\right) \equiv w(x), \quad (48)$$

где $w = \operatorname{colon}(w_1, w_2)$,

$$A_0 = \operatorname{diag}\{\varkappa_1 + 2inq, \bar{\varkappa}_1 - 2inq\}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} d|\xi_n|^2 & d|\xi_n|^2 \\ \bar{d}|\xi_n|^2 & \bar{d}|\xi_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Данная краевая задача получается из уравнения (40) и комплексно-сопряженного уравнения после замен

$$\xi e^{-i(\sigma_n \tau + nqx)} \rightarrow \xi, \quad \bar{\xi} e^{i(\sigma_n \tau + nqx)} \rightarrow \bar{\xi}$$

и последующей линеаризации на состоянии равновесия $(\xi_n, \bar{\xi}_n)$. Применяя далее к (48) метод Фурье по системе функций $\operatorname{colon}(1, 0)e^{ikqx}$, $\operatorname{colon}(0, 1)e^{ikqx}$, $k \in \mathbb{Z}$, убеждаемся, что интересующие нас собственные значения – это спектр семейства матриц

$$B_k = A_1 + \operatorname{diag}\{-k^2 q^2 - 2n k q^2 + i \varkappa_1 k q, -k^2 q^2 + 2n k q^2 + i \bar{\varkappa}_1 k q\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (50)$$

Остается добавить, что в силу (49) одно собственное значение матрицы $B_0 = A_1$ отрицательно, а другое – нулевое (что естественно, так как (48) суть линеаризация на цикле). Гурвицевость же любой другой матрицы B_k из (50) эквивалентна выполнению соответствующего неравенства (46). Теорема 2 доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что вместо (46) можно получить легко проверяемое достаточное условие устойчивости бегущей волны с данным номером $n \in \mathbb{Z}$. Таковым является неравенство

$$2(\operatorname{Re} d)^2 s_n > |d|^2 (2nq + \operatorname{Im} \varkappa_1)^2, \quad (51)$$

гарантирующее положительность многочлена (47) на полуоси $z \geq 0$. Из (51), в частности, следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$ и фиксированных прочих параметрах количество сосуществующих устойчивых бегущих волн у квазинормальной формы (40) неограниченно

растет. Действительно, так как $\Lambda'_r(K_*^r) > 0$ (см. лемму 1), то $s_n \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и, следовательно, для любого натурального N можно указать такое $\alpha_N > 0$, что при всех $\alpha > \alpha_N$ условие (51) справедливо одновременно для номеров $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Отсюда и из теоремы 1 в свою очередь заключаем, что при условиях (16), (25) и при $\alpha \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ в рамках исходной задачи (22) наблюдается феномен буферности, т.е. неограниченно увеличивается количество сосуществующих устойчивых периодических решений типа бегущих волн. Отметим еще, что аналогичные выводы справедливы для задачи (22) и в случае $K = K_{**}^r - \varepsilon\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$. Связано это с тем, что здесь мы имеем дело с той же самой квазинормальной формой (40), в коэффициентах (41) которой следует заменить K_*^r на K_{**}^r , α на $-\alpha$ и учесть, что теперь $\Lambda'_r(K_{**}^r) < 0$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, установлено, что при смещении параметра K внутрь интервала (K_*^r, K_{**}^r) в рамках краевой задачи (22) реализуется феномен буферности. Ясен и механизм возникновения этого феномена, который состоит в следующем: при изменении K любое отдельно взятое периодическое решение бифурцирует из неустойчивого нулевого состояния равновесия и сначала само является, естественно, неустойчивым, но затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде. Впервые указанный механизм был обнаружен в работах [7] при изучении проблем устойчивости и бифуркации бегущих волн в двухкомпонентных параболических системах типа реакция–диффузия с малыми коэффициентами диффузии. Дальнейшие исследования показали, что этот механизм в достаточной степени универсален. Было установлено, например, что он характерен для весьма широкого класса нелинейных гиперболических краевых задач, возникающих в радиофизике (см. монографию [8] и последующие публикации обзорного характера [9]).

Следует добавить, что помимо описанного выше общего сценария накопления устойчивых циклов у краевой задачи (1) имеется и другой, причем весьма специфический механизм возникновения буферности. Для пояснения сути дела заметим, что в силу асимптотических представлений

$$K_*^r = \frac{2\pi r}{1+\gamma} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad K_{**}^r = \frac{(2r+1)\pi}{1-\gamma} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

количество пересекающихся интервалов буферности (K_*^r, K_{**}^r) с ростом r неограниченно увеличивается. А это в свою очередь означает, что при условии (16) и увеличении параметра K в рамках краевой задачи (1) могут сосуществовать аттракторы, порожденные разными пространственно-однородными состояниями равновесия (7).

Еще одна характерная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что при некоторых дополнительных условиях в ней реализуется так называемая *высокомодовая буферность*, т.е. устойчивыми оказываются только быстроосциллирующие по пространственной переменной бегущие волны. Действительно, предположим, что в квазинормальной форме (40) $|h_1| \rightarrow \infty$, а остальные параметры фиксированы. Пусть для определенности $\omega_0 h_1 < 0$. Тогда “выживают” только бегущие волны с номерами n , для которых $m_* + nq > 0$, причем из (46) и (47) следует, что все периодические решения

(42), (45) при $n \sim 1$ неустойчивы. Устойчивыми же оказываются бегущие волны с асимптотически большими номерами:

$$qn \sim -s\omega_0 h_1, \quad |\omega_0 h_1| \gg 1, \quad (52)$$

где s – некоторое фиксированное число из интервала $(0, 1)$.

Для проверки этого факта учтем соотношение (52) вместе с вытекающим из него равенством

$$s_n = -\operatorname{Re} d |\xi_n|^2 \sim s(1-s)\omega_0^2 h_1^2$$

в условии (51). В итоге убеждаемся, что после деления на $\omega_0^2 h_1^2$ и перехода к пределу при $|h_1| \rightarrow \infty$ оно преобразуется к виду

$$\Psi(s) \equiv 2(\operatorname{Re} d)^2 s(1-s) - |d|^2 (2s-1)^2 > 0. \quad (53)$$

Далее заметим, что многочлен (53) имеет на отрезке $0 \leq s \leq 1$ два корня $s_* \in (0, 1)$, $s_{**} = 1 - s_*$, причем $\Psi(s) > 0$ при $s \in (s_*, s_{**})$. А отсюда в свою очередь следует, что для любых фиксированных $s_* < s_1 < s_2 < s_{**}$ можно указать такое $\Delta = \Delta(s_1, s_2) > 0$, что при всех $|h_1| > \Delta$, $\omega_0 h_1 < 0$ краевая задача (40) имеет устойчивые бегущие волны (42), (45) с номерами n , удовлетворяющими неравенствам

$$|\omega_0 h_1| s_1 \leq nq \leq |\omega_0 h_1| s_2. \quad (54)$$

Ясно также, что при $|h_1| \rightarrow \infty$ количество номеров из множества (54) неограниченно растет, причем, как это обычно бывает при высокомодовой буферности (см., например, [10]), их состав постоянно обновляется. Иными словами, каждая отдельно взятая бегущая волна с достаточно большим фиксированным номером n при увеличении $|h_1|$ сначала, подрастая по амплитуде, обретает устойчивость, а затем снова ее теряет.

В заключение добавим, что аттракторы краевой задачи (1) обладают существенно разной чувствительностью по отношению к изменению параметров K и h . Для того чтобы проиллюстрировать это, нам понадобится следующее понятие. Будем говорить, что в краевой задаче (22) происходит потеря локальности, если в спектре устойчивости ее нулевого положения равновесия появляются собственные значения с положительными действительными частями, имеющими при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядок единицы.

Из проведенного в разделе 1 линейного анализа следует, что потеря локальности наблюдается в задаче (22) при условии (16) и смещении параметра K внутрь интервала (K_*^r, K_{**}^r) на расстояние порядка единицы. Но, что интересно, того же эффекта можно добиться и другим способом, а именно при сохранении условия (25) и замене равенства (16) на, казалось бы, близкое соотношение

$$h = \frac{2\pi p}{q} + \sqrt{\varepsilon} h_1, \quad h_1 = \operatorname{const} \neq 0, \quad (55)$$

где натуральные p и q удовлетворяют прежним ограничениям. Действительно, учтем в формулах (5) при $\Lambda(K) = \Lambda_r(K)$ равенства (25), (55) и положим $m = l + kq$, где натуральное l пробегает значения от 1 до q , а целое k таково, что $\sqrt{\varepsilon} kq = z \sim 1$. В результате убеждаемся, что все возможные частичные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательности $\operatorname{Re} \lambda_m(K_*^r + \varepsilon \alpha, \varepsilon)$ исчерпываются значениями функций

$$\psi_l(z) = -1 - z^2 - \Lambda_* \cos\left(\frac{2\pi p}{q}l + zh_1\right), \quad l = 1, \dots, q,$$

где z меняется на всей оси. Далее, при $l = m_*$, где m_* — натуральное число из леммы 2, имеем $\psi_{m_*}(0) = 0$, $\psi'_{m_*}(0) = -\omega_0 h_1 \neq 0$. А это значит, что заведомо найдется некоторый примыкающий к точке $z = 0$ промежуток изменения z , на котором $\psi_{m_*}(z) > 0$, т.е. справедливо требуемое свойство.

Потеря локальности препятствует получению каких-либо строгих результатов об аттракторах краевой задачи (22) в каждом из описанных случаев. Однако есть все основания ожидать, что и здесь буферность сохраняется, причем при условиях (25), (55) она приобретает новое качество — становится высокомодовой. В пользу данных гипотез свидетельствуют обнаруженные выше свойства квазинормальной формы (40) при $\alpha \rightarrow \infty$ и $|h_1| \rightarrow \infty$, соответственно.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-01286).

Список литературы

- [1] С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. В сб.: Новые физические принципы оптической обработки информации. Ред. С. А. Ахманов, М. А. Воронцов. М.: Наука, 1990. С. 263–325.
- [2] А. В. Разгулин. ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.
- [3] А. Л. Скубачевский. Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1394–1401.
- [4] Е. П. Белан. Динамические системы. 2000. Т. 16. С. 160–167.
- [5] Е. П. Белан. Динамические системы. 2001. Т. 17. С. 179–184.
- [6] Ю. С. Колесов. Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
- [7] Ю. С. Колесов. Устойчивость и бифуркация бегущих волн. В сб.: Нелинейные колебания в задачах экологии. Ред. Ю. С. Колесов. Ярославль: ЯГУ, 1985. С. 3–10; А. Н. Куликов. Анализ устойчивости бегущих волн. В сб.: Нелинейные колебания в задачах экологии. Ред. Ю. С. Колесов. Ярославль: ЯГУ, 1985. С. 103–107.
- [8] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 1–193.
- [9] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. Г. Сушко. Фунд. и прикл. матем. 1999. Т. 5. № 2. С. 437–473; А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. УМН. 2000. Т. 65. № 2. С. 95–120; А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.
- [10] В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1287–1300; А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. Матем. сб. 2000. Т. 191. № 8. С. 45–68.

Поступила в редакцию 4.VII.2003 г.