В. В. Пупышев, Длина и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом,
ТМФ, 2014, том 180, номер 3, 342–367

https://www.mathnet.ru/tmf8582

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 180, № 3
сентябрь, 2014

В. В. Пупышев*

ДЛИНА И ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Дан вывод и качественный анализ нелинейных и линейных уравнений, предназначенных для вычисления длины рассеяния и эффективного радиуса. Найдены и исследованы точные решения этих уравнений в случае центрального потенциала прямоугольной формы. Выявлена связь между эффективным радиусом и длиной рассеяния. Особое внимание уделено случаям нулевой и неограниченной длин рассеяния.

Ключевые слова: двумерное рассеяние, короткодействующий потенциал, длина рассеяния, эффективный радиус.

DOI: 10.4213/tmf8582

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятия длины рассеяния и эффективного радиуса широко применяются в теории трехмерного потенциального рассеяния [1]–[5]. В ядерную физику низких энергий [6] эти понятия ввел Бете [7].

В настоящее время развитие теории двумерного потенциального рассеяния стимулируется выдающимися успехами экспериментальной физики ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках различных конфигураций [8]–[11], в частности в дискообразных ловушках. Экспериментально достижимая температура газа настолько мала, что в такой ловушке длина де Бройля [1] частицы газа сравнима с поперечным размером диска-ловушки. Поэтому квантовое движение частиц газа в основном происходит в плоскости, проходящей через края диска. Изменяя внешнее электромагнитное поле, создающее такую ловушку, удается удерживать в ней заданное четное число атомов и управлять парными взаимодействиями между ними. Минимальное число атомов, запертых в диске-ловушке и движущихся в плоскости, равно двум [11]. В системе центра масс таких ультрахолодных атомов квантово-

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

механическая задача об их относительном движении сводится к задаче о медленном движении одной квантовой частицы в двумерной плоскости. Длина рассеяния и эффективный радиус являются универсальными (не зависящими от формы потенциала) характеристиками такого движения. Поэтому их исследование представляется актуальной задачей современной теории двумерного рассеяния.

Длина и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом были исследованы многими авторами (см., например, работы [5], [12]–[21]). Тем не менее квантово-механический анализ этих фундаментальных характеристик низкоэнергетического рассеяния далек от завершения. В частности, не выведены уравнения для функций, обладающих прозрачным физическим смыслом и определяющих значения длины рассеяния и эффективного радиуса; открытыми остаются вопросы о связи эффективного радиуса с длиной рассеяния и о переопределении этих параметров в случаях их нулевых или бесконечно больших по модулю значений; ни для какого потенциала неизвестны представления длины рассеяния и эффективного радиуса через элементарные или специальные функции.

Главная цель настоящей работы – восполнить эти недостатки современной теории двумерного рассеяния. В разделе 2 собраны основные определения. В разделе 3 дан вывод и качественный анализ уравнений для вспомогательных функций, значения которых в пределе их бесконечно большого аргумента являются длиной рассеяния и эффективным радиусом. В разделе 4 найдены и исследованы точные решения полученных уравнений в случае потенциала прямоугольной формы. В разделе 5 эти же уравнения использованы для расчета длины и эффективного радиуса двумерного рассеяния нейтрона на протоне в случае $^1S_0$-потенциала Рида с мягким кором [6]. В разделе 6 исследованы случаи нулевой и неограниченно большой по модулю длины рассеяния и в этих случаях предложены новые определения длины рассеяния и эффективного радиуса. Основные результаты, полученные в разделах 3–6, перечислены в заключении.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЯСНЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с физических предположений. Предположим, что квантовая частица p_1 имеет массу m_1 и движется лишь в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее координатного пространства $\mathbb{R}^3$. Считаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является силовым центром, воздействующим на частицу p_1 посредством потенциала V, который зависит только от обезразмеренного расстояния x между точкой O и этой частицей и подчинен следующим условиям:

$$V(x) \in C^0(0,\infty), \qquad \lim_{x\to 0} x^2|V(x)| = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^n|V(x)| = 0, \quad n = 0,1,2,\dots . \quad (1)$$

Такой потенциал принято называть центральным, слабосингулярным в нуле, непрерывным на всей полуоси $x > 0$ и короткодействующим [5]. Отметим, что условие непрерывности можно ослабить: в области $0 < x < \infty$ потенциал $V(x)$ может быть кусочно-непрерывной функцией с конечным числом точек разрыва первого рода. Пример такой функции – потенциал прямоугольной формы $V(x) = V_0\theta(b - x)$, где константы $V_0 \neq 0$ и $b > 0$, а $\theta(b-x)$ – функция Хевисайда, равная единице при $x \leqslant b$ и нулю в противном случае.

Теперь перечислим известные в теории двумерного рассеяния [5], [21]–[23] следствия сделанных выше предположений о потенциале. В поле центрального потенциала $V(x)$ полный набор квантовых чисел частицы p_1 состоит из ее обезразмеренного волнового числа q и дискретного числа λ, принимающего любые полуцелые значения начиная с $-1/2$. При условиях (1) радиальная волновая функция $u_\lambda(x;q) = \langle x|q,\lambda\rangle$ состояния рассеяния $|q,\lambda\rangle$, $q>0$, определяется как регулярное (ограниченное на всей полуоси $x>0$) решение одномерного уравнения Шредингера

$$\left[\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda+1)x^{-2} - V(x)\right]u_\lambda(x;q) = 0, \qquad x>0, \tag{2}$$

с начальным условием

$$u_\lambda(x;q) \sim (qx)^{\lambda+1}, \qquad qx \to 0, \tag{3}$$

и асимптотикой

$$u_\lambda(x;q) \to \sin\left(qx - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda(q)\right), \qquad \frac{qx}{|\lambda|} \to \infty. \tag{4}$$

Величины $\delta_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ называются парциальными фазой и сечением упругого рассеяния в состоянии $|q,\lambda\rangle$. Сечение $\sigma_\lambda(q)$ вычисляется по формулам [5], [21]

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \frac{\sigma_\lambda^{\mathrm{u}}(q)}{\operatorname{ctg}^2\delta_\lambda(q)+1}, \qquad \sigma_\lambda^{\mathrm{u}}(q) \equiv \frac{4}{q}(2-\delta_{2\lambda,-1}). \tag{5}$$

Здесь и далее $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. При любом $q \geqslant 0$ сечение $\sigma_\lambda(q)$ не превышает своего унитарного предела $\sigma_\lambda^{\mathrm{u}}(q)$. Предел $q \to +0$ называется пределом низких энергий.

В случае центрального короткодействующего потенциала физические и математические причины, обуславливающие существенное отличие двумерного рассеяния от трехмерного, детально обсуждались в работах [5], [12]–[26], причем разными способами.

Предложим еще один подход к выявлению этих причин. Сначала с помощью формулы $\ell = \lambda + 1/2$ каждому полуцелому значению квантового числа $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$ поставим в соответствие целое число $\ell = 0, 1, \ldots$. Далее заметим, что после замены $\lambda \mapsto \ell$ краевая задача Шредингера (2)–(4) становится краевой задачей для радиальной волновой функции $u_\ell(x;q)$ трехмерного рассеяния квантовой частицы p_1 потенциалом $V(x)$ в состоянии $|q,\ell\rangle$ с волновым числом q и угловым моментом ℓ (см. монографию [3]). Положим

$$\begin{aligned} V_\lambda(x) &\equiv \frac{\lambda(1+\lambda)}{x^2}, & V_\ell(x) &\equiv \frac{\ell(1+\ell)}{x^2}, \\ V(x;\lambda) &\equiv V(x) + V_\lambda(x), & V(x;\ell) &\equiv V(x) + V_\ell(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно радиальному уравнению Шредингера (2) можно считать, что двумерное или трехмерное рассеяние квантовой частицы p_1 в состояниях $|q,\lambda\rangle$ или $|q,\ell\rangle$ порождается соответствующими эффективными потенциалами $V(x,\lambda)$ или $V(x,\ell)$. Сравним эти потенциалы и их компоненты.

При значении $\lambda = -1/2$ притягивающему (центростремительному) потенциалу $V_\lambda(x) = -1/(2x)^2$ в трехмерном, а именно S-волновом ($\ell = 0$), рассеянии соответствует тождественно равный нулю потенциал $V_\ell(x) \equiv 0$. Для всех остальных значений квантовых чисел $\lambda \geqslant 1/2$ и $\ell = \lambda + 1/2$ оба потенциала $V_\lambda(x)$ и $V_\ell(x)$ являются отталкивающими (центробежными) потенциалами и подчиняются неравенству $V_\lambda(x) < V_\ell(x)$ при $x > 0$. Это неравенство и определения (6) порождают соотношения $V(x,\lambda) < V(x,\ell)$ для $x > 0$, справедливые при любом потенциале $V(x)$ и любом значении $\lambda \geqslant -1/2$. Вследствие этого воздействие одного и того же потенциала $V(x)$ на движение квантовой частицы p_1 оказывается более сильным в состоянии двумерного рассеяния $|q,\lambda\rangle$, чем в состоянии трехмерного рассеяния $|q,\ell\rangle$. Этот вывод можно сформулировать иначе: если $2\lambda \geqslant 1$, то потенциал $V(x)$ в двумерном рассеянии экранируется потенциалом $V_\lambda(x)$ гораздо слабее, чем потенциалом $V_\ell(x)$ в трехмерном рассеянии.

Отмеченный факт имеет три физически важных следствия, которые доказаны в теории дифференциальных уравнений [27] как теоремы об оценках. Сформулируем первое следствие: по крайней мере в области $0 < x < b$, $b \ll 1$, небольших расстояний выполняется соотношение $|u_\lambda(x;q)|^2 > |u_\ell(x;q)|^2$. Оно означает, что при любом потенциале $V(x)$ вероятность обнаружить квантовую частицу p_1 в двумерном круге $x \leqslant b$ с центром O больше, чем вероятность нахождения этой же частицы в трехмерном шаре $x \leqslant b$ с тем же центром. Обсудим второе следствие. Пусть в поле некоторого (необязательно короткодействующего) потенциала $V(x)$ квантовая частица p_1 в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет связанные состоянии $|iQ_n,\ell\rangle$, $Q_n > 0$, $n = 1,2,\ldots,N$, с энергиями связи $B_n = Q_n^2$, причем $B_1 > B_2 > \cdots > B_N$. Тогда эта частица в плоскости $\mathcal{P}$ также будет иметь связанные состояния $|iq_n,\lambda\rangle$, $q_n > 0$, $\lambda = \ell - 1/2$, с энергиями связи $b_n = q_n^2$, $b_1 > b_2 > \cdots > b_N$, причем $b_n > B_n$ для всех $n = 1,2,\ldots N$. Третье следствие звучит так: если при данных $V(x)$ и ℓ в пространстве $\mathbb{R}^3$ квантовая частица p_1 не имеет связанных состояний, то при том же потенциале и при $\lambda = \ell - 1/2$ эта частица в плоскости $\mathcal{P}$ может иметь связанные состояния.

Приведем физически интересные примеры указанных выше следствий.

Пример 1. Пусть $V(x) = 1/x$ – отталкивающий кулоновский потенциал, $\lambda = -1/2$ и $\ell = 0$. Тогда имеют место асимптотики [17], [18]

$$|u_{-1/2}(x;q)|^2 \sim C^2_{-1/2}(\eta)x, \qquad |u_0(x;q)|^2 \sim C^2_0(\eta)x^2, \qquad x \to 0,$$

в которых кулоновские барьерные множители определены формулами

$$C^2_{-1/2}(\eta) \equiv \frac{\pi}{e^{2\pi\eta}+1}, \qquad C^2_0(\eta) \equiv \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}, \qquad \eta = \frac{1}{2q}.$$

Следовательно, верны неравенства

$$|u_{-1/2}(x;q)|^2 \gg |u_0(x;q)|^2, \qquad x \ll 1,$$
$$C^2_{-1/2}(\eta) \ll C^2_0(\eta), \qquad q \ll 1.$$

Предположим, что в точке O находится ядро A, а наша квантовая частица p_1 тоже является некоторым ядром таким, что возможна экзотермическая реакция слияния ядер A и p_1 при низкой энергии q^2 их столкновения в поле кулоновского отталкивающего потенциала $V(x) = 1/x$. В силу приведенных выше неравенств вероятность такой реакции в плоскости $\mathcal{P}$ будет намного больше, чем в $\mathbb{R}^3$.

Пример 2. Пусть $V(x) = -1/x$ – притягивающий кулоновский потенциал. Тогда при одном и том же главном квантовом числе $n = 1, 2, \ldots$ энергии связи B_n и b_n квантовой частицы p_1 в пространстве $\mathbb{R}^3$ и в плоскости $\mathcal{P}$ определяются формулой [1] $B_n = n^{-2}$ и формулой [28] $b_n = (n - 1/2)^{-2}$. Следовательно, $b_n > B_n$ при любом n. Предположим, что в точке O расположен протон p, частица p_1 является электроном e^-, а взаимодействие в системе $\{e^-, p\}$ исчерпывается кулоновским притяжением $V(x) = -1/x$. Положив $\lambda = -1/2$, $\ell = 0$ и $n = 1$, убеждаемся в том, что энергии связи b_1 и B_1 основного состояния системы $\{e^-, p\}$ в $\mathcal{P}$ и в $\mathbb{R}^3$ связаны равенством $b_1 = 4B_1$.

Пример 3. Как известно [24], в случае $2\lambda = -1$ при любом сколь угодно слабом, но притягивающем короткодействующем потенциале $V(x)$ квантовая частица p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одно связанное состояние. В пространстве $\mathbb{R}^3$ такой потенциал не порождает ни одного связанного состояния.

Особый случай $2\lambda = -1$ стоит обсудить более подробно. В этом случае значение $1/4$ константы центростремительного потенциала $V_\lambda(x) = -(1/4)x^{-2}$ является критическим в следующем смысле: если ее увеличить на сколь угодно малое, но положительное число, то спектр оператора Шредингера уравнения (2) станет неограниченным снизу и будет возможным падение [1] квантовой частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ на силовой центр O. Известным следствием [1], [12] наличия такого критического значения является существенная роль потенциала $-(1/4)x^{-2}$ в пределе $q \to 0+0$. В этом пределе для любого короткодействующего потенциала $V(x)$ старшие слагаемые асимптотик фазы рассеяния $\delta_{-1/2}(q)$ и соответствующего ей сечения (5) неограниченно возрастают: $\delta_{-1/2}(q) \sim (2/\pi)\ln q$ и $\sigma_{-1/2}(q) \sim q^{-1}(\pi/\ln q)^2$. Для сравнения напомним, что в этом же пределе фаза и сечение S-волнового трехмерного рассеяния $\delta_0(q)$ и $\sigma_0(q)$ сходятся соответственно к произведениям $-aq$ и $4\pi a^2$, которые зависят от потенциала $V(x)$ посредством конечной константы a, называемой длиной S-волнового рассеяния [1]–[6].

Теперь поясним, почему фазы двумерного и трехмерного рассеяния $\delta_\lambda(q)$ и $\delta_\ell(q)$ имеют существенно разную функциональную зависимость от волнового числа q.

Обсуждение фазы двумерного рассеяния начнем со случая $V(x) \equiv 0$ при $x \geqslant 0$. В этом случае краевая задача (2)–(4) имеет два линейно независимых решения $j_\lambda(\rho)$ и $\tilde{n}_\lambda(\rho)$, $\rho \equiv qx$, связанных с функциями Бесселя $J_m(\rho)$ и $Y_m(\rho)$ целого порядка m формулами

$$j_\lambda(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_m(\rho), \qquad \tilde{n}_\lambda(qx) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} Y_m(\rho), \qquad m = \lambda + \frac{1}{2}.$$

Как известно [29], функция $J_m(\rho)$ может быть представлена как бесконечный ряд по целым степеням ее аргумента, а функция $Y_m(\rho)$ – как бесконечный ряд, первое слагаемое которого

$$\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{2} + \gamma\right) J_m(\rho) = \frac{2}{\pi}\ln x\, J_m(\rho) + h(q) J_m(\rho)$$

содержит константу Эйлера γ и логарифмическую функцию $h(q)$ волнового числа q,

$$h(q) \equiv \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{2}+\gamma\right) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{q}{q_0}, \qquad q_0 \equiv 2e^{-\gamma} = 1.122918\ldots\ . \tag{7}$$

Следовательно, разложения функций $Y_m(\rho)$ и $\tilde{n}_\lambda(\rho)$ содержат функцию $h(q)$.

Рассмотрим случай финитного потенциала. Предположим, что короткодействующий потенциал $V(x)$ отличен от нуля лишь на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$, $b < \infty$, и решение $u_\lambda(x;q) = u^-(x;q)$ задачи (2), (3) известно на этом же отрезке. При условиях (1) в соответствии с теорией Фукса [27] такое решение может содержать только полуцелые степени параметра q. В области $x > b$ общее решение задачи (2), (4) содержит фазу рассеяния $\delta_\lambda(q)$ и имеет вид

$$u_\lambda(x;q) = u^+(x;q) \equiv j_\lambda(x;q)\cos\delta_\lambda(q) - \tilde{n}_\lambda(x;q)\sin\delta_\lambda(q).$$

Условие "сшивки" [1], [5] логарифмических производных функций $u^\pm(x,q)$ в точке $x = b$ дает представление котангенса фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ через функции $u^-(b,q)$, $j_\lambda(bq)$ и $\tilde{n}_\lambda(bq)$ аргумента q. Используя это представление, нетрудно доказать, что в рассмотренном случае финитного потенциала с конечным носителем $0 \leqslant x \leqslant b$ при любом λ функция $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ является суммой двух слагаемых, одно из которых содержит логарифмическую функцию $h(q)$, порожденную разложением функции $\tilde{n}_\lambda(bq)$, а второе является бесконечным рядом $S_\lambda(q)$ по полуцелым степеням аргумента q.

Такое же утверждение для любого необязательно финитного, но короткодействующего потенциала доказано для случая $2\lambda = -1$ в работах [14]–[19] и в общем случае $2\lambda \geqslant -1$ в работах [20], [21].

Перейдем к обсуждению фазы $\delta_\ell(q)$ трехмерного рассеяния. В задаче Шредингера сделаем замену $\lambda \mapsto \ell = \lambda + 1/2$. В случае $V(x) \equiv 0$ линейно независимыми решениями $j_\ell(qx)$ и $n_\ell(qx)$ получившейся задачи будут известные сферические функции Риккати–Бесселя [29]. Такие функции являются бесконечными рядами по целым степеням аргумента ρ. Как известно [3], [5], из этого факта следует, что для любого короткодействующего потенциала и при любом $\ell = 0, 1, \ldots$ котангенс фазы $\delta_\ell(q)$ трехмерного рассеяния есть бесконечный ряд $S_\ell(q)$ по целым степеням ее аргумента q, а функция эффективного радиуса $K^{\mathrm{s}}(q)$ – бесконечный ряд по четным степеням этого же аргумента:

$$K^{\mathrm{s}}(q) \equiv q^{2\ell+1}\operatorname{ctg}\delta_\ell(q) = -\frac{1}{a^{\mathrm{s}}} + \frac{q^2}{2}r^{\mathrm{s}}_{\mathrm{eff}} + \cdots\ .$$

Напомним определения длины и эффективного радиуса трехмерного рассеяния. В теории трехмерного рассеяния [1]–[5], в ядерной [6], атомной и молекулярной физике длиной и эффективным радиусом трехмерного рассеяния квантовой частицы p_1 центральным короткодействующим потенциалом в состоянии $|q,\ell\rangle$ принято называть коэффициенты a^{s} и $r^{\mathrm{s}}_{\mathrm{eff}}$ разложения функции эффективного радиуса $K^{\mathrm{s}}(q)$.

Теперь перечислим все известные к настоящему времени определения длины рассеяния и эффективного радиуса для двумерного рассеяния квантовой частицы p_1 центральным короткодействующим потенциалом в состоянии $|q,\lambda\rangle$.

В работах [12], [13] использовались понятия дифференциальной и полной длин рассеяния. Дифференциальной длиной рассеяния в этих работах назван квадрат модуля амплитуды двумерного рассеяния, а полной длиной рассеяния – интеграл от такого квадрата по углу рассеяния на отрезке $[0, 2\pi]$.

В работах [14]–[16] для $2\lambda = -1$ длина рассеяния a' и эффективный радиус r'_{eff} определялись как константы асимптотики

$$\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) \sim \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{a'q}{2} + \gamma\right) + \frac{q^2}{2}r'_{\text{eff}}, \qquad q \to 0. \tag{8}$$

Следует отметить, что длина рассеяния a' всегда положительная, и в случае $2\lambda = -1$ авторам работы [16] удалось получить ограничения на потенциал V, при которых длина рассеяния a' и эффективный радиус r'_{eff} являются конечными константами.

В том же случае $2\lambda = -1$ в работах [17], [18] длиной рассеяния a'' и эффективным радиусом r''_{eff} названы коэффициенты разложения

$$\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{q}{2} + \gamma\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{a''} + \frac{q^2}{2}r''_{\text{eff}}\right) + \cdots$$

по четным степеням аргумента q и доказано, что для короткодействующего потенциала такое разложение сходится равномерно на всей полуоси $q > 0$. Аналогичное определение длины рассеяния a'' и эффективного радиуса r''_{eff} использовалось в работе [19], посвященной исследованию амплитуд низкоэнергетического рассеяния в задаче трех частиц на плоскости $\mathcal{P}$.

Во всех процитированных работах [14]–[19] основное внимание уделялось случаю $2\lambda = -1$. В работе [20] для любого λ предложено использовать функцию эффективного радиуса

$$K'(q) \equiv q^{2\lambda+1}\bigl[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - h'(q)\bigr] = -\frac{1}{a'''} + \frac{q^2}{2}r'''_{\text{eff}} + \cdots\,, \qquad h'(q) \equiv \frac{2}{\pi}\ln\frac{q}{2},$$

а константы a''' и r'''_{eff} считать длиной рассеяния и эффективным радиусом. Функция $h'(q)$ была введена ранее в работе [19].

Завершим настоящий раздел определениями, введенными в работе [21] и доказанными в этой же работе утверждениями.

Для каждого состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$, $q > 0$, с выбранным значением λ функция эффективного радиуса $K(q)$ определяется через функцию $K(x; q)$ формулами

$$K(q) \equiv \lim_{x\to\infty} K(x; q), \qquad K(x; q) \equiv q^{2\lambda+1}\bigl[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(x; q) - h(q)\bigr]. \tag{9}$$

Функция $K(x; q)$ является рядом по четным степеням волнового числа:

$$K(x; q) = \tau\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}K_n(x) = -\frac{1}{a(x)} + \frac{q^2}{2}r_{\text{eff}}(x) - q^4 r^3_{\text{eff}}(x)P(x) + \cdots\,, \qquad x \geqslant 0. \tag{10}$$

Здесь и всюду далее τ – зависящий от значения λ множитель,

$$\tau \equiv \frac{2}{\pi}(2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1})!!\,(2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda,-1})!! = \frac{(2^m m!)^2}{\pi m},$$

где $m \equiv \lambda + 1/2$ – целое число; $\delta_\lambda(x; q)$ – фазовая функция [5], $h(q)$ – логарифмическая функция (7).

В начальной точке $x = 0$ полуоси $x \geqslant 0$ функции $a(x)$ и $\xi(x) \equiv a^2(x) r_{\text{eff}}(x)$ равны нулю, а в бесконечно удаленной точке $x = \infty$ могут быть неограниченными. Если предельные при $x \to \infty$ значения a и r_{eff} функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ удовлетворяют ограничениям $a \neq 0$ и $|a| < \infty$, $|r_{\text{eff}}| < \infty$, то вследствие представлений (9) и (10) функция $K(q)$ имеет низкоэнергетическую (при $q \to +0$) асимптотику

$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1}\big[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - h(q)\big] = -\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}} - q^4 r_{\text{eff}}^3 P + O(q^6), \tag{11}$$

а коэффициенты a, r_{eff} и $P \equiv P(\infty)$ называются длиной рассеяния, эффективным радиусом и параметром формы. Именно такое определение, исключающее особые случаи $a = 0$, $|a| = \infty$ или $|r_{\text{eff}}| = \infty$, используется в разделах 3–5 настоящей работы. Анализу особых случаев $a = 0$, $a = \pm\infty$ посвящен раздел 6.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

В настоящем разделе ключевыми соотношениями являются разложение (10) и полученные в работе [21] специальные представления регулярного и нерегулярного решений $j_\lambda(qx)$ и $\tilde{n}_\lambda(qx)$ уравнения Шредингера (2) в случае потенциала $V(x) \equiv 0$. Эти решения выражаются через функции Бесселя $J_m(qx)$ и $Y_m(qx)$ целого порядка [29] и представляют собой ряды, которые содержат известные коэффициенты a_n и функции $d_n(x)$:

$$j_\lambda(qx) = \sqrt{\frac{\pi q x}{2}} J_m(qx) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(qx)^{\lambda+1}}{(2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda,-1})!!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (qx)^{2n}, \tag{12}$$

$$\tilde{n}_\lambda(qx) = \sqrt{\frac{\pi q x}{2}} Y_m(qx) = n_\lambda(qx) + h(q) j_\lambda(qx). \tag{13}$$

Здесь $h(q)$ – логарифмическая функция (7) и

$$n_\lambda(qx) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1})!!}{(qx)^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x)(qx)^{2n}. \tag{14}$$

Последовательно выведем нелинейные уравнения для функций $K(x;q)$, $a(x)$ и линейное уравнение для функции $r_{\text{eff}}(x)$. Применим нелинейную версию метода фазовых функций [5], в которой $T(x;q) = \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q)$ определяется как решение уравнения

$$\partial_x T(x;q) = -\frac{\pi}{2} x V(x) \big[J_m(qx) - T(x;q) Y_m(qx)\big]^2, \qquad x > 0, \tag{15}$$

с граничным условием $T(x;q) = 0$ при $x = 0$. Используя соотношения (9) и (12), (13), выразим в этом уравнении функции J_m и Y_m через известные функции j_λ и n_λ, а искомую функцию $T(x;q)$ – через функцию $K(x;q)$. В итоге получим уравнение

$$\partial_x K(x;q) = V(x) \big[q^{-\lambda-1} j_\lambda(\rho) K(x;q) - q^\lambda n_\lambda(\rho)\big]^2, \qquad x > 0. \tag{16}$$

В этом нелинейном уравнении представим функции j_λ и n_λ как ряды (12) и (14), а искомое решение $K(x,q)$ заменим его разложением (10). В получившемся уравнении приравняем нулю сумму всех слагаемых, не зависящих от q, сумму всех слагаемых, пропорциональных q^2, и сумму всех слагаемых, пропорциональных q^4. Тогда соответственно получим нелинейное однородное уравнение для функции $a(x)$, линейное неоднородное уравнение для функции $r_{\text{eff}}(x)$ и уравнение для функции $P(x)$. Приведем уравнения для функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$. Для краткости записи ниже мы используем обозначение $y(x) \equiv \ln x$ и не указываем аргумент x функций $y(x)$, $V(x)$, $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$.

В случае $2\lambda = -1$ функция $a(x)$ подчиняется уравнению

$$\tau\, \partial_x a = xV[1 + \tau a y]^2, \tag{17}$$

а в случае $2\lambda \geqslant 1$ – уравнению

$$\tau\, \partial_x a = \frac{x^{2\lambda}}{2\lambda + 1} V[x - x^{-2\lambda}\tau a]^2. \tag{18}$$

В случае $2\lambda = -1$ функция $r_{\text{eff}}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau\, \partial_x r_{\text{eff}} = -a^{-2} x V[1 + \tau a y]\big[2a r_{\text{eff}} + x^2(1 + \tau a y - \tau a)\big], \tag{19}$$

в случае $2\lambda = 1$ – уравнению

$$\tau \partial_x r_{\text{eff}} = a^{-2} x V[\tau a - x^2]\left(a(r_{\text{eff}} - \tau y) + \frac{x^2}{4}\right) \tag{20}$$

и, наконец, в оставшемся случае $2\lambda \geqslant 3$ – уравнению

$$\tau\, \partial_x r_{\text{eff}} = \frac{2}{2\lambda + 1} a^{-2} x V(\tau a - x^{2\lambda+1})\left[a\left(r_{\text{eff}} + \tau \frac{x^{-2\lambda+1}}{2\lambda - 1}\right) + \frac{x^2}{2\lambda + 3}\right]. \tag{21}$$

Обсудим уравнения (17) и (18). В этих уравнениях знаки производной $\partial_x a$ и потенциала V совпадают, эта производная равна нулю в тех же точках, что и потенциал. Следовательно, непрерывное решение $a(x)$ монотонно возрастает или убывает на отрезке $[x_1, x_2]$, если на этом отрезке потенциал является соответственно отталкивающим ($V > 0$) или притягивающим ($V < 0$). Решение имеет локальный экстремум в некоторой точке $x = \tilde{x} < \infty$, если в этой точке потенциал меняет знак. Уравнения (17) могут иметь решения, терпящие разрыв второго рода. В этом случае в малой окрестности точки разрыва следует перейти к уравнениям для функции $\tilde{a}(x) = 1/a(x)$.

Теперь обсудим уравнения (19)–(21). Их правые части содержат множитель $a^{-2}(x)$, и поэтому решение $r_{\text{eff}}(x)$ может иметь полюс первого или второго порядка в некоторой точке $x = \tilde{x}$, если в этой точке функция $a(x)$ меняет знак. При наличии полюса следует положить $r_{\text{eff}}(x) = \tau\xi(x)/a^2(x)$ и вместо исходных уравнений использовать порожденные ими уравнения для ограниченной в точке $x = \tilde{x}$ функции $\xi(x)$: в случае $2\lambda = -1$ мы имеем уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{x}{2} V[1 + \tau a y]\big[4y\xi - x^2(1 + \tau a y - \tau a)\big], \tag{22}$$

при $2\lambda = 1$ – уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{1}{8x} V[\tau a - x^2]\big[8\xi + x^2(x^2 - 4\tau a y)\big], \tag{23}$$

а в случае $2\lambda \geqslant 3$ – уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{1}{2\lambda+1} V[\tau a - x^{2\lambda+1}] x^{-2\lambda} \left(2\xi + \frac{\tau a x^2}{2\lambda - 1} + \frac{x^{2\lambda+3}}{2\lambda+3} \right). \tag{24}$$

Заметим, что равенства $a(0) = 0$ и $\xi(0) = 0$, упомянутые в предыдущем разделе, являются граничными условиями для уравнений (17), (18) и (22)–(24) в начальной точке $x = 0$, каждое из трех уравнений (22)–(24) представимо в виде

$$\partial_x \xi(x) = v_2(x)\xi(x) + v_1(x),$$

и поэтому при условии $\xi(0) = 0$ оно имеет единственное решение

$$\xi(x) = \int_0^x dx_1\, v_1(x_1) \exp\left\{ \int_{x_1}^x dx_2\, v_2(x_2) \right\}, \tag{25}$$

которое является интегральным представлением функции $\xi(x)$ через функцию $a(x)$.

Наша следующая задача – свести все полученные уравнения (17)–(21) к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Используем для этого известный в теории дифференциальных уравнений [27] метод вариации произвольных коэффициентов. Напомним, что в этом методе искомое решение исходного уравнения сначала представляется через две неизвестные функции, производные которых по определению подчиняются некоторому тождеству, а затем это тождество используется при выводе системы двух уравнений.

Начнем с линеаризации уравнения (17). Его решение будем искать в виде

$$a(x) = -\frac{s_0(x)}{\tau c_0(x)}. \tag{26}$$

Произвольные функции $c_0(x)$ и $s_0(x)$ подчиним тождеству

$$\partial_x c_0(x) \equiv \ln x\, \partial_x s_0(x), \qquad x > 0. \tag{27}$$

Подстановкой формулы (26) сведем исходное уравнение (17) к соотношению, содержащему обе производные $\partial_x c_0$ и $\partial_x s_0$. Используя тождество (27), исключим из этого соотношения производную $\partial_x s_0$ или производную $\partial_x c_0$. Получим два уравнения для искомых функций $c_0(x)$ и $s_0(x)$. Запишем полученную таким образом однородную систему двух уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_x c_0(x) &= -V(x)\big[c_0(x) - s_0(x)\ln x\big] x \ln x, \\ \partial_x s_0(x) &= -V(x)\big[c_0(x) - s_0(x)\ln x\big] x, \end{aligned} \qquad 2\lambda = -1. \tag{28}$$

Теперь изложенным выше способом линеаризуем уравнение (18). Для этого используем подстановку (26), а искомые функции c_0 и $s_0(x)$ подчиним тождеству

$$\partial_x c_0(x) \equiv -x^{-2\lambda-1}\partial_x s_0(x), \quad x > 0, \qquad 2\lambda \geqslant 1. \tag{29}$$

В результате получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x c_0(x) &= \frac{V(x)}{2\lambda+1}\big[x c_0(x) + x^{-2\lambda} s_0(x)\big], \\ \partial_x s_0(x) &= -\frac{V(x)}{2\lambda+1}\big[x c_0(x) + x^{-2\lambda} s_0(x)\big] x^{2\lambda+1}, \end{aligned} \qquad 2\lambda \geqslant 1. \tag{30}$$

Для редукции уравнений (19)–(21) к системам неоднородных уравнений применим подстановку
$$r_{\text{eff}}(x) = \frac{2\tau}{s_0(x)}\left(c_1(x) - s_1(x)\frac{c_0(x)}{s_0(x)}\right) \tag{31}$$
и используем соответствующие выбранному значению λ, $2\lambda \geqslant -1$, уравнения (28) или (30) и различные тождества. Далее мы приведем эти тождества и итоговые системы уравнений, полагая для краткости записи $y(x) \equiv \ln x$ и не указывая аргумент x функций $y(x)$, $V(x)$, $c_{0,1}(x)$ и $s_{0,1}(x)$.

Итак, уравнение (19) благодаря тождеству
$$4(\partial_x c_1 - y\,\partial_x s_1) \equiv x^2\,\partial_x s_0, \qquad x > 0, \tag{32}$$
сводится к системе уравнений
$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{4}\bigl\{4y(c_1 - ys_1) + x^2\bigl[(2y-1)c_0 + 2(1-y)ys_0\bigr]\bigr\}x, \\ \partial_x s_1 &= \frac{V}{4}\bigl\{4(ys_1 - c_1) + x^2\bigl[2c_0 + (1-2y)s_0\bigr]\bigr\}x, \end{aligned} \qquad 2\lambda = -1. \tag{33}$$
Тождество
$$8(\partial_x c_1 + x^{-2}\partial_x s_1) \equiv x^2\partial_x c_0 + 4y\partial_x s_0, \qquad x > 0, \tag{34}$$
позволяет вывести из уравнения (20) систему уравнений
$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{16}\left[8\left(xc_1 + \frac{1}{x}s_1\right) - x^3(4y+1)c_0 - 8xys_0\right], \\ \partial_x s_1 &= -\frac{V}{16}\left[8\left(xc_1 + \frac{1}{x}s_1\right) - 2x^3c_0 - x(4y+1)s_0\right]x^2, \end{aligned} \qquad 2\lambda = 1. \tag{35}$$
При использовании тождества
$$2(\partial_x c_1 + x^{-2\lambda-1}\partial_x s_1) \equiv \frac{x^2}{2\lambda+3}\partial_x c_0 - \frac{x^{-2\lambda-1}}{2\lambda-1}\partial_x s_0, \quad x > 0, \qquad 2\lambda \geqslant 3, \tag{36}$$
уравнение (21) порождает следующую систему в случае $2\lambda \geqslant 3$:
$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{2\lambda+1}\left[xc_1 + x^{-2\lambda}s_1 + \frac{x^2}{2\lambda-1}\left(\frac{2}{2\lambda+3}xc_0 + x^{-2\lambda}s_0\right)\right], \\ \partial_r s_1 &= -\frac{V}{2\lambda+1}\left[xc_1 + x^{-2\lambda}s_1 - \frac{x^2}{2\lambda+3}\left(xc_0 - \frac{2}{2\lambda-1}x^{-2\lambda}s_0\right)\right]x^{2\lambda+1}. \end{aligned} \tag{37}$$

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

Функции $K(x;q)$, $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ имеют прозрачный физический смысл: их значения в любой точке $x = b \geqslant 0$ суть соответственно значения функции эффективного радиуса, длины рассеяния и эффективного радиуса, если потенциал $V(x)$ заменить потенциалом $V(x)\theta(x-b)$, т.е. “обрезать” в этой точке. Правые части уравнений (19)–(21) для функции $r_{\text{eff}}(x)$ содержат функцию $a(x)$, а связь $r_{\text{eff}}(x) = \tau\xi(x)/a^2(x)$ и соотношение (25) порождают интегральное представление функции $r_{\text{eff}}(x)$ через функцию $a(x)$. Следовательно, эффективный радиус r_{eff} зависит и от потенциала $V(x)$, и от длины рассеяния a. Анализ функции $P(x)$ выходит за рамки настоящей работы, поэтому уравнение, определяющее эту функцию, лишь упоминалось выше.

В отличие от функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ компоненты $c_n(x)$ и $s_n(x)$, $n = 1, 2$, не имеют какого-либо физического смысла. Системы уравнений (28), (30) и (33), (35), (37) принадлежат бесконечной по индексу $n = 0, 1, \ldots$ рекуррентной цепочке уравнений, которая получена в работе [21] способом, отличным от изложенного выше. В этой же работе доказаны следующие утверждения. Условие (3) порождает граничные условия $c_n(x) = \delta_{n,0}$, $s_n(x) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, в начальной точке $x = 0$. При таких условиях и ограничениях (1) на потенциал $V(x)$ обсуждаемая цепочка уравнений имеет единственное решение, все функции $c_n(x)$ и $s_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, непрерывны на полуоси $x > 0$ и ограничены в бесконечно удаленной точке $x = \infty$. Вследствие этих фактов и связей (26) и (31) при тех же ограничениях (1) уравнения (17)–(21) однозначно разрешимы.

Обсудим преимущества и недостатки исходных нелинейных уравнений (17)–(21) и выведенных из них систем линейных уравнений (28), (30), (33), (35) и (37).

Первое и неоспоримое преимущество нелинейных уравнений (17)–(21) состоит в том, что их решения $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ обладают прозрачным физическим смыслом. Второе преимущество этих уравнений заключается в том, что, используя их, можно вычислить длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff} наиболее экономичным способом: для этого достаточно численно проинтегрировать одно уравнение (17) или (18), а затем вычислить один интеграл (25). Как пояснялось выше, решение $a(x)$ нелинейных уравнений (17) или (18) может быть неограниченным в некоторой точке $x = t > 0$, но этот единственный недостаток нетрудно преодолеть, перейдя при вычислении функции $a(x)$ в малой окрестности точки $x = t$ к уравнению для функции $1/a(x)$.

Единственное преимущество систем линейных уравнений (28), (30), (33), (35) и (37) по сравнению с исходными нелинейными уравнениями (17)–(21) таково: все компоненты $c_n(x)$ и $s_n(x)$ решений $\{c_n(x), s_n(x)\}$, $n = 0, 1$, этих систем являются всюду ограниченными функциями. Однако эти функции не имеют никакого физического смысла, а вычисление длины рассеяния a и эффективного радиуса r_{eff} требует численного интегрирования четырех зацепляющихся уравнений. Например, в случае $2\lambda = -1$ придется одновременно интегрировать систему (28) и систему (33). Ясно, что такой способ вычисления длины рассеяния и эффективного радиуса менее экономичен, чем упомянутый выше алгоритм, основанный на нелинейных уравнениях (17) или (18) и интегральном представлении (25) эффективного радиуса r_{eff} через функцию $a(x)$.

4. ДЛИНА РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Приведем полезный с методической точки зрения пример, позволяющий проиллюстрировать все возможные особенности функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$. Для этого исследуем случай финитного потенциала прямоугольной формы. Положим $V(x) = V_0\theta(b - x)$, где $V_0 \neq 0$ и $b > 0$ – некоторые константы. Наша задача – найти и исследовать точные решения уравнений (17)–(21) на всей полуоси $x > 0$. Так как в области $x > b$ потенциал $V(x)$ тождественно равен нулю, в этой области искомые решения $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ тождественно равны их значениям $a(b)$ и $r_{\text{eff}}(b)$ в точке $x = b$. Следовательно, эти значения являются длиной рассеяния a и эффективным радиусом r_{eff}, и для вычисления этих констант достаточно решить уравнения (17)–(21) на конечном отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$. Приступим к решению.

Сначала рассмотрим случай $V_0 < 0$, когда потенциал $V(x)$ является прямоугольной ямой, глубина и ширина которой равны соответственно $-V_0$ и b. Положив $\alpha \equiv \sqrt{-V_0}$, $z \equiv \alpha x$ и выполнив соответствующую подстановку

$$a(x) = -\frac{1}{\tau} x^{2m} \frac{z\,\partial_z A(z) + mA(z)}{z\,\partial_z A(z)\bigl[\delta_{m,0}\ln x + \theta(m-1)\bigr] - (\delta_{m,0} + m)A(z)},$$

сведем уравнения (17) и (18) к уравнению Бесселя [29] для функции $A(z)$. Решив такие уравнения, выведем представление функции $a(x)$ через функции Бесселя $J_m(z)$ и найдем интеграл (25), а затем и соответствующую ему функцию $r_{\text{eff}}(x)$. В итоге получим следующие формулы: для $x \leqslant b$ в случае $2\lambda = -1$

$$a(x) = -\frac{\pi}{2}\frac{zJ_1(z)}{J_0(z) + zJ_1(z)\ln x}, \qquad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(z^2 - 2 + 2z\frac{J_0(z)}{J_1(z)}\right); \tag{38}$$

в случае $2\lambda = 1$

$$a(x) = -\frac{\pi}{4}x^2\frac{J_2(z)}{J_0(z)}, \qquad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi}\left(4\ln x + \bigl[8J_2(z) - z^2J_0(z)\bigr]\frac{J_0(z)}{\bigl[zJ_2(z)\bigr]^2}\right); \tag{39}$$

если $2\lambda \geqslant 3$, то

$$\begin{aligned} a(x) &= -\pi m\left(\frac{x^m}{2^m m!}\right)^2 B_m^{-1}(z), \\ r_{\text{eff}}(x) &= -\frac{(2^m m!)^2}{2\pi m}\left(\frac{\alpha^{m-1}}{z^m}\right)^2\left[z^2\left(\frac{1}{m-1} + \frac{B_m^2(z)}{m+1}\right) - 4mB_m(z)\right], \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$B_m(z) \equiv \frac{J_{m-1}(z)}{J_{m+1}(z)}.$$

Теперь несложно рассмотреть случай $V_0 > 0$, когда потенциал $V(x) = V_0\theta(b - x)$ является прямоугольным барьером, высота и ширина которого равны соответственно V_0 и b. Выполнив в формулах (38)–(40) замены

$$\alpha \mapsto i\alpha = i\sqrt{V_0}, \qquad z \mapsto iz = i\alpha x, \qquad J_m(iz) \mapsto i^m I_m(z), \tag{41}$$

получим следующие представления функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ через модифицированные функции Бесселя $I_m(z)$: для $x \leqslant b$ в случае $2\lambda = -1$

$$a(x) = \frac{\pi}{2}\frac{zI_1(z)}{I_0(z) - zI_1(z)\ln x}, \qquad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(z^2 + 2 - 2z\frac{I_0(z)}{I_1(z)}\right); \tag{42}$$

в случае $2\lambda = 1$

$$a(x) = \frac{\pi}{4}x^2\frac{I_2(z)}{I_0(z)}, \qquad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi}\left(4\ln x + \bigl[8I_2(z) - z^2I_0(z)\bigr]\frac{I_0(z)}{\bigl[zI_2(z)\bigr]^2}\right); \tag{43}$$

если $2\lambda \geqslant 3$, то

$$\begin{aligned} a(x) &= \pi m \left(\frac{x^m}{2^m m!}\right)^2 B_m^{-1}(z), \\ r_{\text{eff}}(x) &= -\frac{(2^m m!)^2}{2\pi m}\left(\frac{\alpha^{m-1}}{z^m}\right)^2 \left\{z^2\left(\frac{1}{m-1} + \frac{B_m^2(z)}{m+1}\right) - 4mB_m(z)\right\}, \end{aligned} \tag{44}$$

где теперь

$$B_m(z) \equiv \frac{I_{m-1}(z)}{I_{m+1}(z)}.$$

Обсудим особенности поведения функций (38)–(40) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$.

Как известно [29], в области $z > 0$ все нули $\gamma_{m+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots$, функции $J_{m+1}(z)$ являются простыми. Поэтому при любом значении λ на полуинтервале $0 < x \leqslant b$ функция $a(x)$ или не имеет нулей, если $\alpha b < \gamma_{m+1,1}$, $m = \lambda + 1/2$, или имеет конечное число n простых нулей $x^+_{m+1,j} = \gamma_{m+1,j}/\alpha$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Число n равно максимальному значению номера i, при котором выполняется условие $\gamma_{m+1,i} \leqslant \alpha b$. При любом λ нули $x^+_{m+1,j}$ функции $a(x)$ являются полюсами соответствующей функции $r_{\text{eff}}(x)$. В случае $2\lambda = -1$ эти полюсы имеют первый порядок, а при условии $2\lambda \geqslant 1$ – второй.

Случай $2\lambda = -1$ является особым. В этом случае согласно формулам (38) все полюсы $x^-_{1,j}$ функции $a(x)$ связаны с нулями z_j функции $J_0(z) + zJ_1(z)\ln x$ соотношениями $x^-_{1,j} = z_j/\alpha$. Все нули z_j простые. Поэтому на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$ функция $a(x)$ является гладкой, если $z_1 > \alpha b$, а в противном случае имеет конечное число n полюсов $x^-_{1,j} = z_j/\alpha$, $j = 1, 2, \ldots, n$, первого порядка. Функция $r_{\text{eff}}(x)$ в точке $x = 0$ ограничена и отлична от нуля.

При любом $\lambda \geqslant 1/2$ в силу равенств (39), (40) функция $a(x)$ непрерывна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$, если $\gamma_{m-1,1}(z) > \alpha b$, а при условии $\gamma_{m-1,n} \leqslant b$ имеет конечное число n полюсов первого порядка $x_{m-1,j} = \gamma_{m-1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В случае $2\lambda \geqslant 1$ точка $x = 0$ для функции $r_{\text{eff}}(x)$ является полюсом второго порядка.

Так как нули $\gamma_{m-1,j}$ и $\gamma_{m+1,j}$ функции $J_{m-1}(z)$ и $J_{m+1}(z)$ перемежаются [29], при любом λ этим же свойством обладают полюсы $x^-_{m,j}$ и нули $x^+_{m,j}$ функции $a(x)$:

$$x^-_{m,j} < x^+_{m,j} < x^-_{m,j+1} < x^+_{m,j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

По той же причине при любом λ перемежаются нули и полюсы функции $r_{\text{eff}}(x)$.

Теперь перечислим основные особенности функций (42)–(44).

Известно [29], что на полуоси $z > 0$ все функции $I_m(z)$ положительные и монотонно возрастающие. Поэтому при любом $\lambda > 1/2$ согласно формулам (43), (44) такими же свойствами обладает функция $a(x)$, а функция $r_{\text{eff}}(x)$ монотонно возрастает, но может иметь только один, причем простой, нуль, принадлежащий отрезку $0 \leqslant x \leqslant b$, и только один полюс $x = 0$, причем второго порядка.

Случай $2\lambda = -1$, когда функции $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ определены формулами (42), является исключительным. В этом случае на полуоси $z > 0$ функция $I_0(z) - zI_1(z)\ln x$ имеет один простой нуль z_1. Поэтому на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$ функция $a(x)$ является положительной и монотонно возрастающей, если $z_1 < \alpha b$, а в противном случае эта

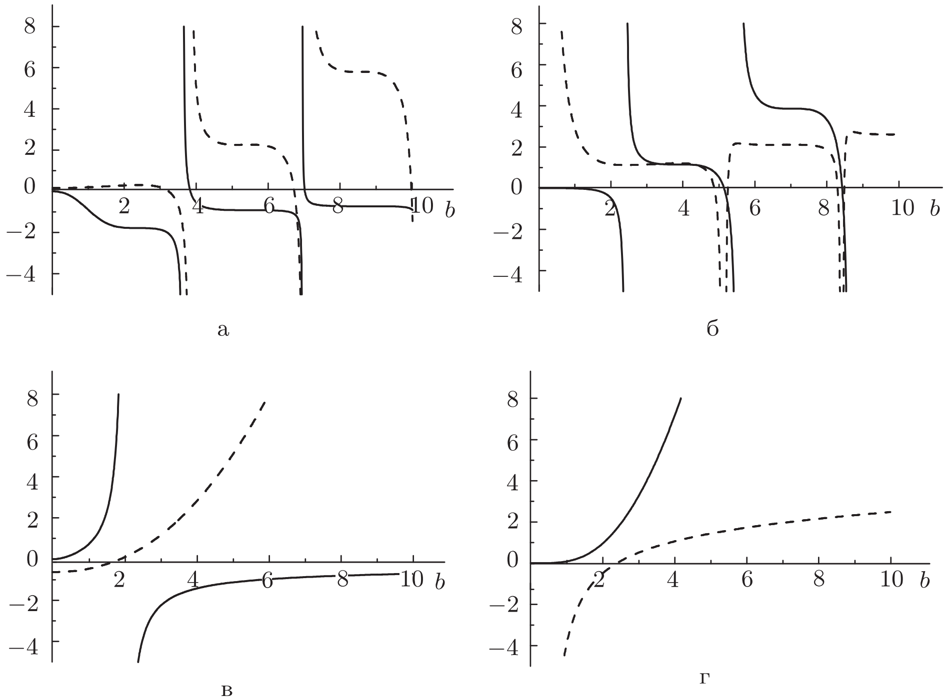

Рис. 1. Зависимость масштабированных длины рассеяния $\tau_1 a(b)$ (сплошная кривая) и эффективного радиуса $\tau_2 r_{\rm eff}(b)$ (штриховая кривая) от ширины b потенциала $V(x) = V_0\theta(b-x)$ прямоугольной формы в четырех случаях: при $V_0 = -1$, $2\lambda = -1$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1/4$ (а), при $V_0 = -1$, $2\lambda = 1$, $\tau_1 = 1/10$, $\tau_2 = 1$ (б), при $V_0 = 1$, $2\lambda = -1$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$ (в) и при $V_0 = 1$, $2\lambda = 1$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$ (г).

функция имеет полюс первого порядка в точке $x^-_{1,1} = z_1/\alpha$. Функция $r_{\rm eff}(x)$ ограничена в точке $x = 0$ и монотонно возрастает в области $0 < x \leqslant b$, в этой области она может иметь только один нуль, причем первого порядка.

Все перечисленные выше особенности функций $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$, а также зависимость длины рассеяния $a(b)$ и эффективного радиуса $r_{\rm eff}(b)$ от ширины b потенциала $V = V_0\theta(b-x)$ прямоугольной формы в четыре случаях $V_0 = \pm 1$, $2\lambda = \pm 1$ иллюстрирует рис. 1. Видно, что в этих случаях длина рассеяния и эффективный радиус могут принимать любые вещественные значения, кроме того, имеет место описанная в предыдущем разделе корреляция между бесконечно малыми и бесконечно большими по абсолютной величине значениями этих параметров.

Как показано в работе [21], если известны функции $c_n(x)$ и $s_n(x)$, удовлетворяющие системам (28), (30), (33), (35), (37) и граничным условиям $c_n(0) = \delta_{n,0}$ и $s_n(0) = 0$, $n = 0, 1$, то нетрудно построить явную низкоэнергетическую асимптотику решения $u_\lambda(x; q)$ краевой задачи Шредингера (2)–(4). Поэтому имеет смысл найти точные решения этих систем в случае потенциала прямоугольной формы.

Приступим к решению такой задачи. Сначала положим $V(x) = V_0\theta(b-x)$, $V_0 < 0$, $\alpha = \sqrt{-V_0}$. Исследуем систему двух уравнений (28). В отличие от первого уравнения ее второе уравнение не содержит квадрата логарифмической функции и поэтому является более простым. Продифференцируем это уравнение по аргументу x. Используя тождество (27), исключим из полученного уравнения производную $\partial_x c_0(x)$. В результате выведем однородное уравнение

$$(\partial_x^2 - x^{-1}\partial_x + \alpha^2)s_0(x) = 0, \quad x > 0,$$

с граничным условием $s_0(0) = 0$. Подстановкой $z = \alpha x$, $s_0(x) = zZ(z)$ сведем это уравнение к известному уравнению [29] для функции Бесселя $J_1(z)$ первого порядка. Теперь подставим найденную компоненту $s_0(x) = zJ_1(z)$ в тождество (27). Полученное таким образом представление производной $\partial_x c_0(x)$ запишем на отрезке $[0, x]$ в интегральной форме. Для этого используем граничное условие $c_0(0) = 1$. Взяв интеграл, получим, что $c_0(x) = J_0(z) + zJ_1(z)\ln x$.

Аналогичным способом последовательно исследуем оставшиеся системы уравнений (30), (33), (35) и (37). Решение каждой из них начнем с дифференцирования ее второго уравнения, не содержащего в отличие от первого уравнения степенного множителя $x^{2\lambda+1}$. Для исключения производных $\partial_x s_0(x)$ или $\partial_x s_1(x)$ из искомого уравнения для компонент $c_0(x)$ или $c_1(x)$ используем соответствующие выбранному значению λ тождества (29), (32), (34) или (36). После того как получено явное решение уравнения для компоненты $c_0(x)$ или $c_1(x)$, найдем производную этой компоненты по аргументу x. Подставив эту производную в соответствующее тождество, получим представление производной $\partial_x s_0(x)$ или $\partial_x s_1(x)$. Используя граничное условие $s_{0,1}(0) = 0$, запишем это представление в виде интеграла. Вычислив его, найдем компоненту $s_0(x)$ или $s_1(x)$.

Приведем найденные описанным выше способом представления компонент $c_{0,1}(x)$ и $s_{0,1}(x)$ через функции Бесселя $J_m(z)$ аргумента $z = \alpha x$, где $\alpha \equiv \sqrt{-V_0}$, $V_0 < 0$.

Итак, для потенциала $V(x)$ в виде прямоугольной ямы $V(x) = V_0\theta(b - x)$, $V_0 < 0$, при $x \leqslant b$ имеем следующие решения.

В случае $2\lambda = -1$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= J_0(z) + zJ_1(z)\ln x, & s_0(x) &= zJ_1(z), \\ c_1(x) &= \frac{x^2}{4}\big[zJ_1(z)(1 - \ln x) - J_2(z)\big], & s_1(x) &= -\alpha\frac{x^3}{4}J_1(z). \end{aligned} \tag{45}$$

В случае $2\lambda = 1$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= J_0(z), & s_0(x) &= x^2 J_2(z), \\ c_1(x) &= \frac{x^2}{2}J_2(z)\ln x, & s_1(x) &= \frac{x^2}{8\alpha^2}\big[z^2 J_0(z) - 8J_2(z)\big]. \end{aligned} \tag{46}$$

В случае $2\lambda \geqslant 3$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= wz^{1-m}J_{m-1}(z), & s_0(x) &= w\alpha^{-2m}z^{m+1}J_{m+1}(z), \\ c_1(x) &= -\frac{w}{4(m-1)\alpha^2}z^{3-m}J_{m+1}(z), & s_1(x) &= \frac{w}{\alpha^{2m+2}} \times \\ & & &\times \left(\frac{z^2 J_{m-1}(z)}{4(m+1)} - mJ_{m+1}(z)\right), \end{aligned} \tag{47}$$

где $w \equiv 2^{m-1}(m-1)!$.

На полуоси $x > b$ каждая из компонент $c_{0,1}(x)$ и $s_{0,1}(x)$ тождественно равна своему значению в точке $x = b$.

Теперь нетрудно найти компоненты $c_{0,1}(x)$, $s_{0,1}(x)$ для потенциала $V(x)$ в виде прямоугольного барьера: $V(x) = V_0\theta(b-x)$, $V_0 > 0$. Выполнив замены (41) в формулах (45)–(47), получим следующие представления этих компонент при $x \leqslant b$ через модифицированные функции Бесселя $I_m(z)$, где $z = \alpha x$, $\alpha = \sqrt{V_0}$.

В случае $2\lambda = -1$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= I_0(z) - zI_1(z)\ln x, & s_0(x) &= -zI_1(z), \\ c_1(x) &= -\frac{x^2}{4}\big[zI_1(z)(1-\ln x) - I_2(z)\big], & s_1(x) &= \alpha\frac{x^3}{4}I_1(z). \end{aligned} \tag{48}$$

В случае $2\lambda = 1$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= I_0(z), & s_0(x) &= -x^2 I_2(z), \\ c_1(x) &= -\frac{x^2}{2}I_2(z)\ln x, & s_1(x) &= \frac{x^2}{8\alpha^2}\big[z^2 I_0(z) - 8I_2(z)\big]. \end{aligned} \tag{49}$$

Наконец, в случае $2\lambda \geqslant 3$

$$\begin{aligned} c_0(x) &= wz^{1-m}I_{m-1}(z), & s_0(x) &= -w\alpha^{-2m}z^{m+1}I_{m+1}(z), \\ c_1(x) &= \frac{w}{4(m-1)\alpha^2}z^{3-m}I_{m+1}(z), & s_1(x) &= \frac{w}{\alpha^{2m+2}}\times \\ & & &\times\left(\frac{z^2 I_{m-1}(z)}{4(m+1)} - mI_{m+1}(z)\right), \end{aligned} \tag{50}$$

где, как и выше, $w \equiv 2^{m-1}(m-1)!$.

В области $x > b$ все компоненты $c_{0,1}(x)$ и $s_{0,1}(x)$ тождественно равны своим значениям в точке $x = b$.

5. ДЛИНА И ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ НЕЙТРОНА НА ПРОТОНЕ

Параметры низкоэнергетического рассеяния a и r_{eff} нейтрона n на протоне p в двумерной плоскости, по-видимому, ранее не вычислялись. Восполним этот недостаток современной ядерной физики и попутно сравним все известные методы вычисления констант a и r_{eff}.

Предположим, что полное взаимодействие между нейтроном и протоном в их синглетном по полному спину состоянии зависит только от расстояния r между ними и исчерпывается $^1S_0$-потенциалом Рида $V^{\text{s}}(r)$ с мягким кором [6]:

$$V^{\text{s}}(r) = \frac{g(z)}{z}\big\{V_1 + g^3(z)\big[V_4 + V_7 g^3(z)\big]\big\}, \qquad g(z) \equiv e^{-z}, \quad z \equiv \frac{r}{r_\pi}, \tag{51}$$

где

$$V_1 = -10.463\,\text{МэВ}, \quad V_4 = -1650.6\,\text{МэВ}, \quad V_7 = 6484.2\,\text{МэВ}, \qquad r_\pi \equiv \frac{10}{7}\,\text{Фм}.$$

Наглядное представление о поведении потенциала $V^{\text{s}}(r)$ дает рис. 2. С ростом аргумента r потенциал $V^{\text{s}}(r)$ монотонно убывает на интервале $(0, r_2^{\text{s}})$, обращается в нуль

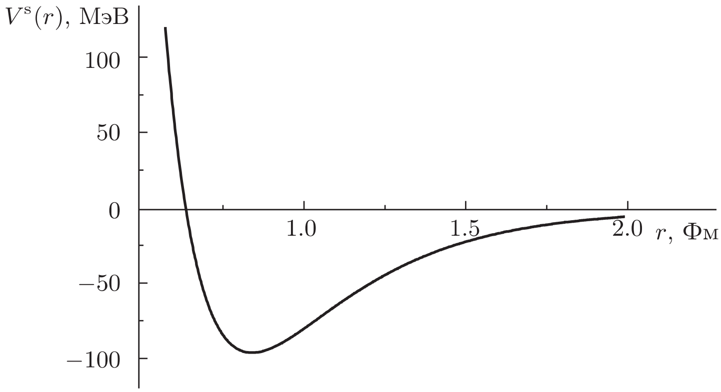

Рис. 2. Потенциал $V^{\mathrm{s}}(r)$, заданный формулами (51).

в точке $r \leqslant r_1^{\mathrm{s}} \approx 0.6402$ Фм, в точке $r = r_2^{\mathrm{s}} \approx 0.8449$ Фм принимает минимальное значение $V^{\mathrm{s}}(r_2^{\mathrm{s}}) = V_{\min}^{\mathrm{s}} \approx -97.2308$ МэВ, а при $r > r_1^{\mathrm{s}}$ монотонно возрастает, стремясь к нулю при $r/r_\pi \to \infty$. Обсуждаемый потенциал имеет асимптотики

$$V^{\mathrm{s}}(r) \sim \begin{cases} \dfrac{V_0^{\mathrm{s}}}{r}, & \dfrac{r}{r_\pi} \to 0, \qquad V_0^{\mathrm{s}} \approx 6890\,\text{МэВ}\cdot\text{Фм}, \\ \dfrac{V_\infty^{\mathrm{s}}}{r} e^{-r/r_\pi}, & \dfrac{r}{r_\pi} \to \infty, \qquad V_\infty^{\mathrm{s}} \approx -14.9\,\text{МэВ}\cdot\text{Фм}. \end{cases}$$

В области $r \leqslant r_1^{\mathrm{s}} \approx 0.6402$ Фм данный потенциал является отталкивающим ($V^{\mathrm{s}} > 0$), а в области $r > r_1^{\mathrm{s}}$ – притягивающим ($V^{\mathrm{s}} < 0$).

Константу $\hbar^2/2\mu$, где μ – приведенная масса np-системы, положим равной ее известному значению [6] 41.47 МэВ $\cdot$ Фм^2. Безразмерный аргумент x определим соотношением $x = r/d$. В качестве d выберем характерную для ядерных систем длину $d = 1$ Фм.

Используем систему центра масс нейтрона и протона. В этой системе задача двумерного np-рассеяния сводится к движению квантовой частицы p_1 с массой m_1, равной приведенной массе np-системы, в поле короткодействующего потенциала $V(x) = g_{\mathrm{s}} V^{\mathrm{s}}(r)$, где $x = r/d$, а $g_{\mathrm{s}} \equiv 2m_1(d/\hbar)^2$.

Поясним схему наших вычислений, выполненных с относительной точностью до десяти знаков. Функция $a(x)$ вычислялась путем численного интегрирования нелинейного уравнения (17) или (18), а функция $r_{\mathrm{eff}}(x)$ рассчитывалась как соответствующий уже найденной функции $a(x)$ однократный интеграл (25). Длина рассеяния a и эффективный радиус r_{eff} определялись как значения функций $a(x)$ и $r_{\mathrm{eff}}(x)$ при настолько большом значении x' их аргумента x, что выполнялись условия

$$\left| \left| \frac{a(x')}{a(x'+10)} \right| - 1 \right| < 10^{-10}, \qquad \left| \left| \frac{r_{\mathrm{eff}}(x')}{r_{\mathrm{eff}}(x'+10)} \right| - 1 \right| < 10^{-10}.$$

Далее вычислялись отношения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные как

$$\alpha(x) \equiv \frac{a(x)}{a(x')}, \qquad \beta(x) \equiv \frac{r_{\mathrm{eff}}(x)}{r_{\mathrm{eff}}(x')}. \tag{52}$$

Все вычисления были выполнены при $x' = 1000$ для $2\lambda = -1, 1, 3$.

Таблица 1. Безразмерные длины a и эффективные радиусы $r_{\rm eff}$ синглетного двумерного np-рассеяния.

2λ	a	$r_{\rm eff}$
-1	-0.7114	5.7076
1	-2.5616	3.5035
3	-1.4595	12.023

Перед обсуждением результатов вычислений следует пояснить физический смысл отношений (52). Значения функций $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$ в произвольно выбранной точке $x = b$ являются соответственно длиной рассеяния a и эффективным радиусом $r_{\rm eff}$ в случае потенциала $V(x)$, "обрезанного" в этой точке. Поэтому функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обладают прозрачным физическим смыслом: в той же точке $x = b$ значения этих функций являются относительными вкладами от воздействия потенциала $V(x)$ в выбранной области его аргумента $0 \leqslant x \leqslant b$ в соответствующие значения длины рассеяния a и эффективного радиуса $r_{\rm eff}$. Следовательно, значения функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ позволяют ответить на следующий физически важный вопрос: в какой области аргумента x вклад потенциала $V(x)$ в длину рассеяния a и эффективный радиус $r_{\rm eff}$ является пренебрежимо малым или, наоборот, определяющим?

Обсудим результаты вычислений. Найденные значения длин рассеяния и эффективных радиусов собраны в табл. 1.

Поведение функций $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$ в случае $2\lambda = -1$ иллюстрирует рис. 3. Функция $a(x)$ имеет нуль первого порядка в точке $x = x_0 = 1.285\ldots$. В этой же точке функция $r_{\rm eff}(x)$ терпит разрыв второго рода. Вследствие этой особенности вклад от потенциала $V(x)$, включенного на интервале $0 < x < x_0$, в значение длины рассеяния a равен нулю. Графики функций $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$ весьма близки к своим горизонтальным асимптотам $a(\infty) \equiv -0.7114\ldots$ и $r_{\rm eff}(\infty) = 5.7076\ldots$ при сравнительно малом значении $x = x_0 \approx 4$ их аргумента x. Следовательно, в обсуждаемом случае $2\lambda = -1$ на интервале $x > x_0$ вклад от потенциала $V(x)$ в значения a и $r_{\rm eff}$ длины рассеяния и эффективного радиуса невелик.

На рис. 4 изображены графики функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, вычисленные по формулам (52) в случаях $2\lambda = 1, 3$. В обоих случаях эти графики близки к их горизонтальным асимптотам $\alpha(\infty) = 1$ и $\beta(\infty) = 1$ в области $x > x_1 \approx 15$ довольно больших значений аргумента x. Кроме того, значения функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принадлежат соответственно интервалам $(0.5, 1)$ и $(-0.5, 1)$, если их аргумент изменяется на интервале $(6, 15)$. Следовательно, в рассмотренных случаях $2\lambda = 1, 3$ на этом интервале вклад от потенциала $V(x)$ в значения a и $r_{\rm eff}$ длин рассеяния и эффективных радиусов является определяющим.

Теперь отметим несколько особо значимых фактов. Потенциал Рида (51) является типичным представителем класса ядерных потенциалов, отталкивающих в области малых расстояний между ядрами и притягивающих в области больших расстояний. Следовательно, результаты выполненных расчетов, представленных выше в табл. 1 и на рис. 3 и 4, являются численным доказательством двух утверждений. Сформулируем их.

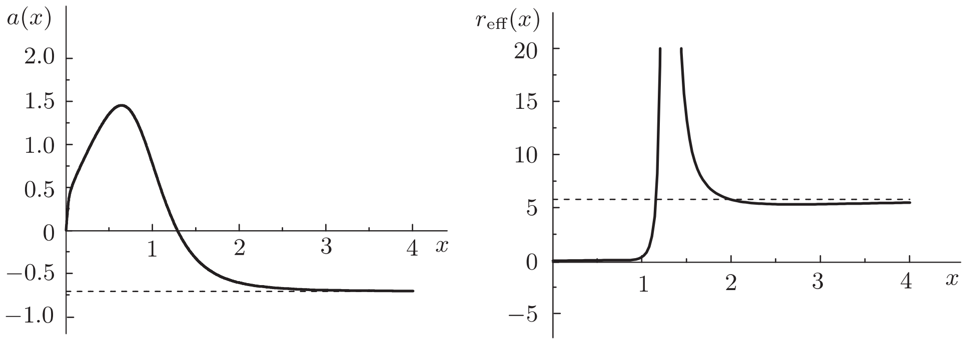

Рис. 3. Графики функций $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$ в случае $2\lambda = -1$ (сплошные кривые) и их горизонтальные асимптоты $f_a(x) \equiv a(\infty) = -0.7114\ldots$ и $f_r(x) \equiv r_{\rm eff}(\infty) = 5.7076\ldots$ (штриховые прямые).

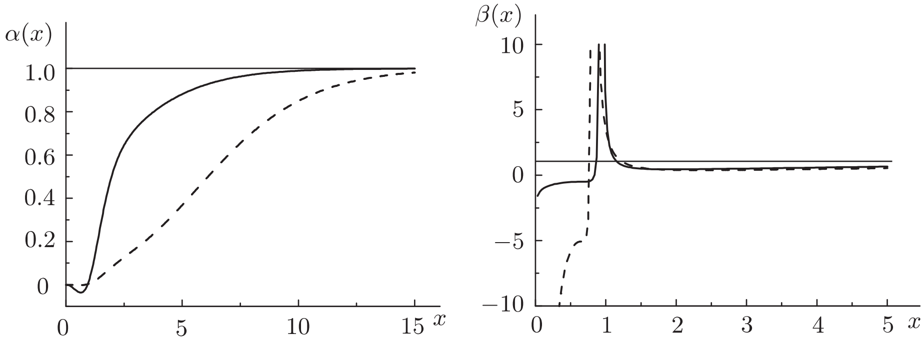

Рис. 4. Относительные вклады $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные формулами (52) в случае $2\lambda = 1$ (сплошные кривые) и в случае $2\lambda = 3$ (штриховые кривые); тонкая прямая – функция $f(x) \equiv 1$.

Предлагаемый подход, который основан на нелинейных уравнениях (17) или (18) и интегральном представлении (25), является экономичным с вычислительной точки зрения методом. Этот метод позволяет не только рассчитать с высокой точностью коэффициенты a и $r_{\rm eff}$, но и выявить прозрачным с физической точки зрения способом области расстояний, в которых вклад потенциала в такие коэффициенты является определяющим или, наоборот, несущественным.

Покажем, что все пять известных к настоящему времени методов вычисления параметров a и $r_{\rm eff}$ двумерного низкоэнергетического рассеяния менее эффективны по сравнению с нашим подходом.

Один из таких методов, основанный на рекуррентных системах линейных уравнений (28), (30) и (33), (35), (37), уже обсуждался в разделе 3.

Второй метод детально пояснен в работе [16]. Этот метод примени́м только в случае $2\lambda = -1$ и реализуется по следующей схеме. Длиной рассеяния a' и эффективным радиусом $r'_{\rm eff}$ считаются коэффициенты асимптотики (8). В исходном уравнении Шредингера (2) полагается $\lambda = -1/2$ и $q = 0$. Затем вычисляется регулярное в начальной точке $x = 0$ решение $\tilde{u}(x)$ получившегося уравнения. Следующий этап заключается в последовательном вычислении двух интегралов

$$X_1 \equiv \int_0^\infty dx\,\sqrt{x}V(x)\tilde{u}(x), \qquad X_2 \equiv \int_0^\infty dx\,\sqrt{x}\ln x V(x)\tilde{u}(x),$$

и далее длина рассеяния a', функция $v(x)$ и эффективный радиус r'_{eff} находятся по формулам

$$a' = e^{(X_2-1)/X_1}, \qquad v(x) = \sqrt{x}\ln\frac{x}{a'}, \qquad r'_{\text{eff}} = 2\int_0^\infty dx\,\bigl[v^2(x) - \tilde{u}^2(x)\bigr].$$

Третий, четвертый и пятый методы вычисления коэффициентов a и r_{eff} реализуются по одной и той же схеме: сначала вычисляются значения фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ при нескольких достаточно малых положительных значениях q_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, волнового числа q, затем найденные значения $\delta_\lambda(q_i)$ используются для экстраполяции функции эффективного радиуса (9) в точку $q = 0$.

В третьем методе [1], [3] для определения значения $\delta_\lambda(q_i)$ фазы рассеяния используется асимптотика (4) предварительно вычисленного решения $u_\lambda(x, q_i)$ задачи Шредингера (2)–(4).

В четвертом методе [5] ключевым является нелинейное уравнение (15). В этом уравнении полагается $m = \lambda + 1/2$ и $q = q_i$. Получившееся уравнение численно интегрируется на конечном отрезке $[0, x_{\max}]$ достаточно большой длины ($x_{\max} \gg 1$), а затем значение $\delta_\lambda(q_i)$ фазы рассеяния определяется по формуле

$$\delta_\lambda(q_i) \sim \operatorname{arctg} T(x_{\max}; q_i).$$

Пятый метод [20], [21] основан на системе линейных уравнений для амплитудных функций $c(x;q)$ и $s(x;q)$, подчиненных в начальной точке $x = 0$ граничным условиям $c(x;q) = 1$, $s(x;q) = 0$. Следуя работе [21], используем определения (7), (12)–(14) функций $h(q)$, j_λ, n_λ, запишем систему для амплитудных функций в виде

$$\begin{aligned} \partial_r c(x;q) &= -\frac{1}{q}V(x)\bigl[c(x;q)j_\lambda(\rho) - s(x;q)n_\lambda(\rho)\bigr]n_\lambda(\rho), \\ \partial_x s(x;q) &= -\frac{1}{q}V(x)\bigl[c(x;q)j_\lambda(\rho) - s(x;q)n_\lambda(\rho)\bigr]j_\lambda(\rho), \end{aligned} \qquad x > 0, \tag{53}$$

и выразим тангенс фазы рассеяния через эти функции:

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q), \qquad \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q) \equiv \frac{s(x;q)}{c(x;q) + h(q)s(x;q)}.$$

Во всех трех упомянутых выше методах для нахождения коэффициентов a и r_{eff} по предварительно вычисленным значениям $\delta_\lambda(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ приходится известным в вычислительной математике способом [30] решать задачу экстраполяции таблично заданной функции полиномом конечной степени. Сформулируем эту задачу следующим образом: используя определение (9) функции эффективного радиуса $K(q)$ и ее представление в виде бесконечного ряда по четным степеням аргумента q, требуется вычислить коэффициенты a и $r_{\rm eff}$ низкоэнергетической асимптотики (11) этой функции.

Опишем метод решения поставленной задачи. Сначала по формуле (9) вычисляются все значения $K(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, функции $K(q)$, отвечающие известным значениям $\delta_\lambda(q_i)$ фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$. Затем функция $K(q)$ аппроксимируется полиномом $K_n(q)$ таким, что

$$K_n(q) = \sum_{i=1}^{n+1} K_i q^{2(i-1)}, \qquad K_i \equiv K(q_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Далее этот полином и его вторая производная вычисляются в точке $q = 0$. В итоге для коэффициентов a и $r_{\rm eff}$ получаются следующие экстраполяционные приближения:

$$a \approx -\frac{1}{K_n(0)} = -\frac{1}{K_1}, \qquad r_{\rm eff} \approx \partial_q^2 K_n(q)\big|_{q=0} = 2K_2.$$

Как известно [30], точность экстраполяционных приближений улучшается с ростом числа известных значений аппроксимируемой функции. Поэтому для вычисления длины рассеяния a и эффективного радиуса $r_{\rm eff}$ третьим, четвертым или пятым методами приходится неоднократно интегрировать уравнения (2), (15) или (53). Следовательно, эти методы менее экономичны, чем предлагаемый подход, в котором для вычисления коэффициентов a и $r_{\rm eff}$ с высокой точностью и при любом значении квантового числа λ достаточно один раз численно решить уравнение (17) или уравнение (18), а затем вычислить один интеграл (25).

6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Обсудим ряд (10) и его низкоэнергетическую (при $q \to +0$) асимптотику (11) в бесконечно удаленной точке $x = \infty$. При длине рассеяния $a = 0$ первое слагаемое суммы (11) неограничено, и поэтому сумма не является низкоэнергетической асимптотикой ряда (10) при $x = \infty$. В случае бесконечно большой по модулю длины рассеяния (при $a = \pm\infty$) первое слагаемое обсуждаемой суммы равно нулю, а второе будет неограниченным по модулю, если $r_{\rm eff} = \pm\infty$. Следовательно, и в этом случае ряд (10) в точке $x = \infty$ имеет иную асимптотику.

Для анализа двух указанных выше случаев нам потребуются известные представления [21] функций $K(x;q)$, $a(x)$, $r_{\rm eff}(x)$ и $P(x)$ через компоненты $c_n(x)$ и $s_n(x)$, а также основные свойства этих компонент [21]. На всей полуоси $x > 0$ функция $K(x;q)$ представляет собой дробь,

$$K(x;q) = \tau \frac{c_0(x) + q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \cdots}{s_0(x) + q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \cdots}, \tag{54}$$

функции $a(x)$ и $r_{\rm eff}(x)$ определяются формулами (26) и (31), а функция $P(x)$ задается как

$$P(x) = -\frac{1}{r_{\rm eff}^3(x)} \frac{1}{2s_0(x)} \left(2\tau c_2(x) - s_2(x) \frac{c_0(x)}{s_0(x)} - s_1(x) r_{\rm eff}(x) \right), \tag{55}$$

причем компоненты $c_0(x)$ и $s_0(x)$ не имеют общих нулей. Перечислим важные следствия указанного свойства компонент $c_0(x)$ и $s_0(x)$.

Пусть в некоторой точке $x = b > 0$ компонента $s_0(x)$ имеет нуль первого порядка. Тогда в этой точке компонента $c_0(x)$ отлична от нуля, и в силу равенств (26) и (31) функция $a(x)$ имеет нуль первого порядка, а функция $r_{\text{eff}}(x)$ имеет полюс первого или второго порядка, если соответственно $s_1(b) = 0$ или $s_1(b) \neq 0$. Согласно рис. 1а, рис. 1б и формулам (38)–(40) для притягивающего потенциала прямоугольной формы первый случай реализуется при $2\lambda = -1$, а второй – при $2\lambda \geqslant 1$. Теперь предположим, что некоторая точка $x = b > 0$ является нулем первого порядка компоненты $c_0(x)$. Тогда в этой точке компонента $s_0(x)$ отлична от нуля и вследствие соотношений (26) и (31) функция $a(x)$ имеет полюс первого порядка, а функция $r_{\text{eff}}(x)$ принимает конечное ненулевое или нулевое значение. Как следует из рис. 1в и формул (42), для отталкивающего потенциала прямоугольной формы второй случай имеет место при $2\lambda = -1$.

Приступим к анализу особых случаев $a = 0$ и $a = \pm\infty$. Для сокращения записи предельные при $x \to \infty$ значения используемых функций $K(x;q)$ и $K^{\pm}(x;q)$ будем обозначать как $K(q)$ и $K^{\pm}(q)$, а значения всех компонент $c_n(x)$, $s_n(x)$ и функций $a(x)$, $r_{\text{eff}}(x)$, $a^{\pm}(x)$, $r^{\pm}_{\text{eff}}(x)$ в точке $x = \infty$ – соответственно символами c_n, s_n и a, r_{eff}, $a^{\pm}$, $r^{\pm}_{\text{eff}}$.

Начнем с первого случая. Пусть $a = 0$. Тогда согласно равенству (26) имеем $s_0 = 0$, но $c_0 \neq 0$. Предположим, что $s_1 \neq 0$. В области $x \gg 1$ введем функцию

$$K^+(x;q) \equiv \tau \frac{c_0(x) + q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \cdots}{q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \cdots} = -\frac{1}{a^+(x)} + \frac{q^2}{2} r^+_{\text{eff}}(x) + \cdots , \tag{56}$$

где по определению

$$a^+(x) \equiv -\frac{s_1(x)}{\tau c_0(x)}, \qquad r^+_{\text{eff}}(x) \equiv \frac{2\tau}{s_1(x)} \left(c_1(x) - s_2(x) \frac{c_0(x)}{s_1(x)} \right). \tag{57}$$

Перейдем к пределу $x \to \infty$. В этом пределе благодаря равенству $s_0 = 0$ из представлений (54) и (56) следует связь $q^2 K^+(q) = K(q)$, а формулы (26), (31), (55) и (57) порождают соотношения

$$a^+ \equiv \lim_{x\to\infty} a^+(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \left[a^2(x) r_{\text{eff}}(x) \right], \tag{58}$$

$$r^+_{\text{eff}} \equiv \lim_{x\to\infty} r^+_{\text{eff}}(x) = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{a(x) - 4 r_{\text{eff}}(x) P(x)}{a^2(x)}. \tag{59}$$

Используя определение (11) функции эффективного радиуса $K(q)$ через фазу рассеяния $\delta_\lambda(q)$, связь $q^2 K^+(q) = K(q)$ и равенство (56), взятое при $x = 0$, получаем искомые представления:

$$K^+(q) \equiv q^{2\lambda+3} \left[\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q) - h(q) \right] = -\frac{1}{a^+} + \frac{q^2}{2} r^+_{\text{eff}} + \cdots . \tag{60}$$

Эти представления означают, что в рассмотренном случае $a = 0$ вместо функции эффективного радиуса $K(q)$, нулевой длины рассеяния a и эффективного радиуса r_{eff} следует использовать функцию эффективного радиуса $K^+(q)$, ненулевую длину рассеяния a^+ и конечный эффективный радиус r_{eff}^+, определенные формулами (58) и (59).

Теперь исследуем второй особый случай. Положим $|a| = \infty$. Тогда из равенства (26) следует, что $c_0 = 0$, но $s_0 \neq 0$. Предположим, что $c_1 \neq 0$. В области $x \gg 1$ введем функцию

$$K^-(x;q) \equiv \tau \frac{q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \cdots}{s_0(x) + q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \cdots} = -\frac{1}{a^-(x)} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^-(x) + \cdots\,, \tag{61}$$

а функции $a^-(x)$ и r_{eff}^- определим формулами

$$a^-(x) \equiv -\frac{s_0(x)}{\tau c_1(x)}, \qquad r_{\text{eff}}^-(x) \equiv \frac{2\tau}{s_0(x)}\left(c_2(x) - s_1(x)\frac{c_1(x)}{s_0(x)}\right). \tag{62}$$

В пределе $x \to \infty$ благодаря равенству $c_0 = 0$ представления (54) и (61) порождают связь $q^{-2}K^-(q) = K(q)$, а из формул (26), (31), (55) и (62) следуют соотношения

$$a^- = -\frac{2}{r_{\text{eff}}}, \qquad r_{\text{eff}}^- = r_{\text{eff}}^3 P. \tag{63}$$

Используя определение (11) функции $K(q)$, связь $q^{-2}K^-(q) = K(q)$ и равенство (61), взятое при $x = \infty$, получаем искомые представления:

$$K^-(q) \equiv q^{2\lambda-1}\big[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - h(q)\big] = -\frac{1}{a^-} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^- + \cdots\,. \tag{64}$$

Согласно этим представлениям в рассмотренном случае $|a| = \infty$ вместо функции эффективного радиуса $K(q)$, бесконечно большой по модулю длины рассеяния a и ненулевого эффективного радиуса r_{eff} следует использовать функцию эффективного радиуса $K^-(q)$, конечную и ненулевую длину рассеяния a^- и конечный эффективный радиус r_{eff}^-, определенные формулами (63).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты настоящей работы.

В разделе 3 нелинейная версия метода фазовых функций расширена на случай двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом. Расширение заключается в выводе и качественном анализе новых уравнений (16)–(24), предназначенных для вычисления функции эффективного радиуса, длины рассеяния и эффективного радиуса.

В разделе 4 получены точные решения (38)–(44) уравнений (17)–(21) в случае потенциала прямоугольной формы и исследована зависимость длины рассеяния и эффективного радиуса от ширины такого потенциала.

В разделе 5 впервые вычислены длина и эффективный радиус двумерного рассеяния нейтрона на протоне в случае потенциала Рида с мягким кором. Для вычисления использованы уравнения (17), (18) и интегральное представление (25). Показано, что такой подход является наиболее экономичным и информативным по сравнению со всеми известными методами вычисления длины и эффективного радиуса двумерного рассеяния.

В разделе 6 исследованы два особых случая $a = 0$, $|a| = \infty$ и в этих случаях предложены новые определения (58)–(60) и (63), (64) функции эффективного радиуса $K^{\pm}(q)$, длины рассеяния $a^{\pm}$ и эффективного радиуса $r^{\pm}_{\text{eff}}$. Следует отметить, что уравнения (16)–(24), их точные решения (38)–(44) и представления (58), (59) и (63) параметров $a^{\pm}$ и $r^{\pm}_{\text{eff}}$ получены для любого значения квантового числа λ.

Поясним возможное применение перечисленных выше результатов. Вычислив длину рассеяния и эффективный радиус и используя затем асимптотику (11), мы можем найти низкоэнергетическое приближение фазы $\delta_\lambda(q)$, а затем по формуле (5) определить соответствующее приближение сечения $\sigma_\lambda(q)$. Анализ таких приближений дан в работе [21].

Используя известные длину рассеяния и эффективный радиус, с помощью метода, предложенного в работе [25], можно вычислить энергии слабосвязанных и околопороговых состояний квантовой частицы, движущейся в двумерной плоскости в поле центрального короткодействующего потенциала. Найденные длина и эффективный радиус позволяют по формулам, впервые полученным в работе [26], построить низкоэнергетические асимптотики всех парциальных сечений $\sigma_\lambda(q)$ при наличии таких состояний.

Представления (38)–(44) длины рассеяния и эффективного радиуса через функции Бесселя в случае потенциала прямоугольной формы и соответствующие таким представлениям приближения парциальных фаз и сечений предлагается использовать в теоретической физике ультрахолодных газов для моделирования упругого двумерного рассеяния в системе двух атомов или молекул. Полученные для данного потенциала представления (45)–(50) компонент $c_n(x)$ и $s_n(x)$ через функции Бесселя позволяют на основе известного метода [21] найти явную низкоэнергетическую асимптотику радиальной волновой функции $u_\lambda(x;q)$ двумерного относительного движения двух атомов или молекул.

Список литературы

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 2004.

[2] В. де Альфаро, Т. Редже, *Потенциальное рассеяние*, Мир, М., 1966.

[3] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния*, Мир, М., 1975.

[4] Ф. Калоджеро, *Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния*, Мир, М., 1976.

[5] В. В. Бабиков, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Наука, М., 1976.

[6] Дж. Е. Браун, А. Д. Джексон, *Нуклон-нуклонные взаимодействия*, Энергоатомиздат, М., 1979.

[7] H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **76**:1 (1949), 38–50.

[8] G. Modugno, F. Ferlanio, R. Heidemann, G. Roati, M. Inguscio, *Phys. Rev. A.*, **68** (2003), 011601, 4 pp.

[9] P. Clade, C. Ryu, A. Ramanathan, K. Helmerson, W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **102**:17 (2009), 170401, 4 pp.

[10] L. D. Carr, D. DeMille, R. V. Krems, J. Ye, *New J. Phys.*, **11** (2009), 055049, 87 pp.

[11] F. Serwane, G. Zürn, T. Lompe, T. B. Ottenstein, A. N. Wenz, S. Jochim, *Science*, **332**:6027 (2011), 336–338.

[12] I. R. Lapidus, *Amer. J. Phys.*, **50**:1 (1982), 45–47.

[13] I. R. Lapidus, *Amer. J. Phys.*, **54**:5 (1986), 459–461.

[14] B. J. Verhaar, J. P. H. W. van den Eijnde, M. A. J. Voermans, M. M. J. Schaffrath, *J. Phys. A*, **17**:3 (1984), 595–598.

[15] B. J. Verhaar, L. P. H. de Goey, J. P. H. W. van den Eijnde, E. J. D. Vredenbregt, *Phys. Rev. A.*, **32**:3 (1985), 1424–1429.

[16] N. N. Khuri, A. Martin, J.-M. Rishard, T. T. Wu, *J. Math. Phys.*, **50**:7 (2009), 072105, 17 pp., arXiv: 0812.4054.

[17] D. Bollé, F. Gesztesy, *Phys. Rev. Lett.*, **52**:17 (1984), 1469–1472.

[18] D. Bollé, F. Gesztesy, *Phys. Rev. A.*, **30**:3 (1984), 1279–1293.

[19] S. K. Adhikari, W. G. Gibson, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 3967–3977.

[20] S. A. Rakityansky, N. Elander, *J. Phys. A*, **45**:13 (2012), 135209, 28 pp., arXiv: 1201.0172.

[21] В. В. Пупышев, *ЯФ*, **77**:5 (2014), 699–710.

[22] S. K. Adhikari, *Amer. J. Phys.*, **54**:4 (1986), 362–366.

[23] P. G. Averbuch, *J. Phys. A*, **19**:12 (1986), 2325–2335.

[24] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97**:2 (1976), 279–288.

[25] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **179**:1 (2014), 102–122.

[26] В. В. Пупышев, *Приближение эффективного радиуса в задаче двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом*, Препринт Р4-2013-85, ОИЯИ, Дубна, 2013.

[27] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1, ИЛ, М., 1953.

[28] Q.-G. Lin, *Amer. J. Phys.*, **65**:10 (1997), 1007–1009.

[29] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическиим таблицами*, Наука, М., 1979.

[30] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, М., 1980.

Поступила в редакцию 29.07.2013,
после доработки 20.05.2014