

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Амбьорн, Л. О. Чехов, Матричная модель для гипер-
геометрических чисел Гурвица,
ТМФ, 2014, том 181, номер 3, 421–435

<https://www.mathnet.ru/tmf8791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:42:21



© 2014 г.

Я. Амбьорн^{*†}, Л. О. Чехов^{‡§¶}

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ГУРВИЦА

Предложены многоматричные модели, являющиеся производящими функциями для числа разветвленных накрытий комплексной проективной прямой, разветвленной над n фиксированными точками z_i , $i = 1, \dots, n$, и имеющей фиксированные род, степень и профили ветвлений в двух точках: z_1 и z_n (обобщенные “детские рисунки” Гротендика). Вычислена сумма по всем возможным ветвлениям в остальных $n - 2$ точках с фиксированной длиной профиля ветвления в точке z_2 и фиксированной полной длиной профилей в других $n - 3$ точках. Все эти модели лежат в классе гипергеометрических моделей Гурвица и являются тем самым тау-функциями иерархии Кадомцева–Петвиашвили. В описанном случае получаемую модель удастся представить в виде цепочки матриц с (нестандартным) взаимодействием между ближайшими соседями вида $\text{tr } M_i M_{i+1}^{-1}$. Описывается техника вычисления спектральных кривых в таких моделях, что открывает возможность построения $1/N^2$ -разложений в них с помощью метода топологической рекурсии. Получаемые при этом спектральные кривые оказываются кривыми алгебраического типа.

Ключевые слова: числа Гурвица, случайные комплексные матрицы, иерархия Кадомцева–Петвиашвили, матричная цепочка, двудольные графы, спектральная кривая.

DOI: 10.4213/tmf8791

1. ВВЕДЕНИЕ

Общепринято считать, что числа Гурвица относятся к комбинаторным классам разветвленных отображений $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \Sigma_g$ комплексной проективной прямой на риманову поверхность рода g . Понятия одиночных или двойных чисел Гурвица соответствуют ситуациям, в которых профили ветвлений (определяемые соответствующими диаграммами Юнга λ или λ и μ) задаются соответственно в одной (∞) или

^{*}Niels Bohr Institute, Copenhagen University, Copenhagen Denmark.
E-mail: ambjorn@nbi.dk

[†]IMAPP, Radboud University, Nijmegen, The Netherlands

[‡]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

[§]Лаборатория Понселе, Независимый московский университет, Москва, Россия

[¶]Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Århus University, Århus, Denmark

двух (∞ и 1) несовпадающих точках, и при этом предполагается существование еще m других несовпадающих точек ветвления, в которых допускаются только простые ветвления.

Производящие функции чисел Гурвица уже довольно давно исследуются в математической физике. Вопросы интегрируемости разложения по характеристам исследовались в работе [1] (относительно классификации возможных случаев см. более позднюю работу [2]).

Отметим, что Окуньков и Пандхарипанде [3] показали, что экспонента от производящей функции для двойных чисел Гурвица является тау-функцией иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Этот же результат был получен Орловым и Щербиным [4], [5] с применением техники функций Шура. Условия общего вида на тау-функции КП были сформулированы Такасаки [6], а также Гоулденом и Джексоном [7] в терминах плюккеровских соотношений.

Орлов и Щербин [4] также рассмотрели случай производящих функций для *детских рисунков* Гротендика, в котором имеются только три точки ветвления с многочисленными ветвлениями в каждой из них, а профили ветвлений фиксированы в одной или двух из этих точек. В этом случае авторы также пришли к выводу, что экспоненты соответствующих производящих функций должны быть тау-функциями иерархии КП. На самом деле результаты работы [4] выделяют более широкий класс производящих функций для *гипергеометрических чисел Гурвица* (этот термин был предложен авторами), в котором имеется фиксированное число n точек ветвления на прямой \mathbb{CP}^1 , профили фиксируются в двух из этих точек, а по профилям в остальных точках берется сумма с весами, пропорциональными длинам оставшихся $n - 2$ профилей. Недавно Харнад и Орлов [8] показали, что все такие производящие функции в свою очередь оказываются тау-функциями иерархии КП.

Интерес к числам Гурвица, отвечающим парам Белого, снова возник в связи с работой Зографа [9] (см. также работу [10]), получившего рекуррентные соотношения для производящей функции детских рисунков Гротендика, перечисляющих пары Белого (C, f) , в которых C – гладкая алгебраическая кривая, а f – мероморфная функция $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$, разветвленная только над точками $0, 1, \infty \in \mathbb{CP}^1$. В работе [11] мы предложили матрично-модельное описание пар Белого, чистых пар Белого и двупрофильных пар Белого, таким образом еще раз показав, что все эти модели относятся к категории тау-функций КП. Соответствующие матричные модели оказываются или обычной эрмитовой одноматричной моделью, или матричной моделью Концевича–Пеннера [12] в случае одного фиксированного профиля, или обобщенной моделью Концевича [13] в случае двух фиксированных профилей. Почти сразу после этого многоматричное представление для гипергеометрических чисел Гурвица было построено в работе [14], но с довольно сложным взаимодействием между матрицами в цепочке. В настоящей работе мы предлагаем более стандартное описание гипергеометрических чисел Гурвица в случае, когда профили фиксированы в двух точках ветвления, длина профиля фиксирована в третьей точке и полная длина профилей в остальных $n - 3$ точках также фиксирована. В этом случае удастся получить уравнение спектральной кривой в рамках $1/N^2$ -разложения.

Напомним некоторые математические факты, связывающие пары Белого с группами Галуа.

ТЕОРЕМА 1 [15]. *Гладкая комплексная алгебраическая кривая C определена над полем алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда имеется непостоянная мероморфная функция f , определенная на C ($f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$), с ветвлениями только в точках $0, 1, \infty \in \mathbb{CP}^1$.*

Для пары Белого (C, f) обозначим через g род кривой C и через d степень отображения f . Прообраз $f^{-1}([0, 1]) \subset C$ отрезка $[0, 1] \in \mathbb{CP}^1$ оказывается связным двудольным ленточным графом с d ребрами, с вершинами, являющимися прообразами точек 0 и 1 , и таким, что циклический порядок ребер, входящих в каждую вершину, задается ориентацией на кривой C . Это привело Гротендика к формулировке следующей леммы.

ЛЕММА 1 [16]. *Имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизмов пар Белого и связными двудольными ленточными графами.*

Детский рисунок Гротендика, таким образом, представляет собой связный двудольный ленточный граф, задающий пару Белого. Хорошо известно, что можно естественным образом продолжить рисунок $f^{-1}([0, 1]) \subset C$, отвечающий паре Белого (C, f) , на двудольное разбиение кривой C . Для этого разрежем комплексную плоскость вдоль (вещественной) прямой, содержащей точки $0, 1, \infty$, и раскрасим верхнюю полуплоскость белым цветом, а нижнюю – серым. Это задает разбиение кривой C на белые и серые треугольники такое, что белые треугольники имеют общие ребра только с серыми. После этого рассматривается дуальный граф, в котором встречаются ребра трех сортов.

В настоящей работе рассматриваются *обобщенные пары Белого*, задаваемые отображениями $(f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1)$ с разрешенными ветвлениями над n фиксированными точками $z_i \in \mathbb{CP}^1$, $i = 1, \dots, n$. При этом получается разбиение кривой C в двудольные n -угольники с ребрами, раскрашенными в n цветов (соответствующие ленточные графы при этом представляют собой накрытия базисного графа, изображенного на рис. 1 для $n = 5$): цвет ребра зависит от того, какой из n отрезков прямой $\mathbb{RP}^1 - f^{-1}([-\infty, z_2]) \subset C$, $f^{-1}([z_2, z_3]) \subset C$, \dots , $f^{-1}([z_{n-1}, z_n]) \subset C$, $f^{-1}([z_n, \infty_+]) \subset C$ – пересекает его образ (точка z_1 отождествляется с точкой бесконечности, а ∞_{\pm} указывают направления приближения к этой точке вдоль вещественной прямой в \mathbb{CP}^1). Каждая грань дуального разбиения при этом содержит прообраз ровно одной из точек z_1, \dots, z_n , так что эти грани оказываются n сортов (их границы выделяются сплошными, штрихпунктирными и штриховыми линиями на рисунке). Такой граф будем называть *обобщенным ленточным графом Белого*.

Тип ветвления в бесконечной точке задается набором граней со сплошными линиями границ в обобщенном ленточном графе Белого: ветвление имеет порядок r , если грань имеет вид $2r$ -угольника, так что можно ввести производящую функцию, которая различает разные типы ветвлений в бесконечной точке или в точке z_1 . Более того, будем также различать разные типы ветвлений в n -й точке (точке $(3+\sqrt{5})/2$ на рис. 1). Такая ситуация обычно называется *двухпрофильной* производящей функцией, поскольку фиксируются две картины ветвлений в двух разных точках; каждую такую картину можно задать с помощью своей диаграммы Юнга. Обозначим через k_i числа соответствующих циклов (прообразов точек z_i на римановой поверхности C), а через $k_1^{(r)}$ и $k_n^{(r)}$ – числа циклов длины $2r$ с центрами в прообразах соответствующих точек z_1 и z_n в обобщенном ленточном графе Белого.

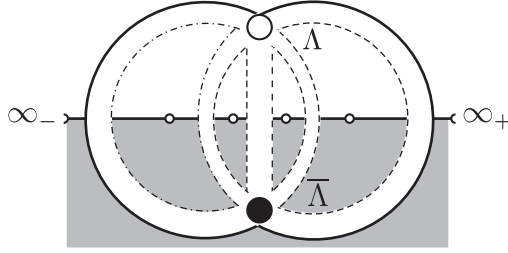


Рис. 1. Обобщенный ленточный граф Белого Γ_1 , отвечающий возможным ветвлениям в $n = 5$ точках (обычно выбираются точки ∞ , $-(1 + \sqrt{5})/2$, 0 , 1 и $(3 + \sqrt{5})/2$; эти точки обозначены маленькими кружками). Данный граф описывает обобщенную пару Белого $(\mathbb{CP}^1, \text{id})$; ∞_{\pm} указывает направления приближения к бесконечной точке в \mathbb{CP}^1 . Символы Λ и $\bar{\Lambda}$ указывают вставки внешнего поля в матрично-модельном формализме раздела 2. Например, данному графу отвечает вклад $N^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 t_1 \text{tr}(\Lambda \bar{\Lambda})$.

Как было показано в работах [14] и [8], экспонента от производящей функции

$$\mathcal{F}[\{t_m\}, \{\mathbf{t}_r\}, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}; N] = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} N^{2-2g} \prod_{r=1}^{\infty} t_r^{k_1^{(r)}} \prod_{s=1}^{\infty} \mathbf{t}_s^{k_n^{(s)}} \prod_{j=2}^{n-1} \gamma_j^{k_j} \quad (1.1)$$

является тау-функцией иерархии КП по временам t_r или \mathbf{t}_r . Хотя матрично-модельное описание этой производящей функции и было предложено в указанных работах, возможность его решения в терминах *топологической рекурсии* (см. работы [17]–[19]) оставалась неопределенной. В настоящей работе мы предлагаем матричную модель, описывающую подкласс производящих функций (1.1) с $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = \gamma_{n-1}$ и с произвольным $\gamma_2 > \gamma_3$.

Нашей целью является построение и решение матричной модели, свободная энергия которой представляет собой производящую функцию

$$\mathcal{F}[\{t_m\}, \{\mathbf{t}_r\}, \gamma_2, \gamma_3; N] = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} N^{2-2g} \prod_{r=1}^{\infty} t_r^{k_1^{(r)}} \prod_{s=1}^{\infty} \mathbf{t}_s^{k_n^{(s)}} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3 + \dots + k_{n-1}}, \quad (1.2)$$

где N , γ_2 , γ_3 , t_r и \mathbf{t}_r суть формальные независимые параметры и суммирование идет по всем (связным) обобщенным ленточным графам Белого. Ниже возникает матричная модель с внешним матричным полем $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\gamma_3 N})$, а соответствующие времена имеют вид

$$\mathbf{t}_r = \text{tr}[(\Lambda \bar{\Lambda})^r]. \quad (1.3)$$

Иногда добавляются множители $\gamma_1^{k_1}$ и $\gamma_n^{k_n}$, но их всегда можно включить во времена t_r и \mathbf{t}_r с помощью масштабных преобразований $t_r \rightarrow \gamma_1 t_r$ и $\mathbf{t}_r \rightarrow \gamma_n \mathbf{t}_r$ при всех r .

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 показано, что производящая функция (1.2) совпадает со свободной энергией специальной многоматричной модели, задаваемой цепочкой матриц с несколько необычными членами взаимодействия $\text{tr } M_i M_{i+1}^{-1}$. Эту модель удастся выразить в терминах интеграла по собственным

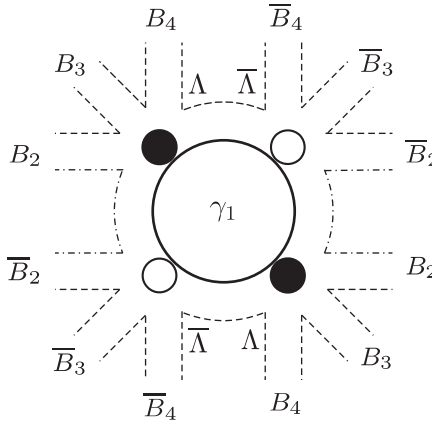
значениям таких матриц в виде, напоминающем вид стандартной обобщенной модели Концевича (ОМК) [13]. Мы адаптируем технику Эйнара и Пратс Феррера [20] к вычислению спектральных кривых для цепочек матриц с такими нестандартными членами взаимодействия в разделе 4. Хотя вывод спектральной кривой и произведен только для первого нетривиального случая $n = 4$ (т.е. в случае одного промежуточного поля), нашу технику можно непосредственно обобщить на случай произвольных старших n , что будет сделано в отдельной публикации. В разделе 5 содержится обсуждение наших результатов.

Ниже мы опускаем все множители, не содержащие зависимости от внешних полей и от времен t_r . Таким образом, все равенства в работе должны пониматься с точностью до указанных несущественных множителей.

2. МОДЕЛЬ

Чтобы учесть профиль в бесконечной точке, стянем сначала все сплошные циклы (с центрами в прообразах ∞), присваивая время t_r каждому стянутому циклу длины $2r$.

Из стянутых таким образом циклов, которые на исходном графе обозначались сплошными линиями, возникают новые вершины взаимодействия. Например, для цикла длины четыре соответствие имеет вид



$$\sim \frac{1}{2} N t_2 \operatorname{tr} [(B_2 B_3 B_4 \Lambda \bar{\Lambda} \bar{B}_4 \bar{B}_3 \bar{B}_2)^2],$$

где множитель $1/2$ введен, чтобы учесть циклическую симметрию 4-цикла.

Матричнозначные поля B_i , $i = 2, \dots, n-1$, представляют собой комплекснозначные матрицы такие, что матрица B_2 – прямоугольная матрица размера $\gamma_2 N \times \gamma_3 N$, и всегда предполагается, что $\gamma_2 > \gamma_3$, в то время как все остальные матрицы B_3, \dots, B_{n-1} суть квадратные матрицы размера $\gamma_3 N \times \gamma_3 N$.

Матрично-модельный интеграл, свободная энергия которого представляет собой производящую функцию (1.2), имеет вид

$$\int DB_2 \cdots DB_{n-1} \times \exp \left\{ N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t_r}{r} \operatorname{tr} [(B_2 \cdots B_{n-1} \Lambda \bar{\Lambda} \bar{B}_{n-1} \cdots \bar{B}_2)^r] - \sum_{j=2}^{n-1} N \operatorname{tr} (B_j \bar{B}_j) \right\}. \quad (2.1)$$

Произведем теперь замену переменных

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_2 &= B_2 B_3 \cdots B_{n-1}, \\ \mathfrak{B}_3 &= B_3 \cdots B_{n-1}, \\ &\vdots \\ \mathfrak{B}_{n-1} &= B_{n-1}\end{aligned}\tag{2.2}$$

и будем предполагать, что все матрицы $\mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_{n-1}$ обратимы (матрица \mathfrak{B}_2 остается прямоугольной). С учетом якобиана преобразования (2.2) интеграл (2.1) преобразуется в интеграл

$$\begin{aligned}&\int D\mathfrak{B}_2 \cdots D\mathfrak{B}_{n-1} \exp \left\{ -\gamma_2 N \operatorname{tr} \ln(\mathfrak{B}_3 \overline{\mathfrak{B}}_3) - \sum_{j=4}^{n-1} \gamma_3 N \operatorname{tr} \ln(\mathfrak{B}_j \overline{\mathfrak{B}}_j) + \right. \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} N \frac{t_r}{r} \operatorname{tr}[(\mathfrak{B}_2 |\Lambda|^2 \overline{\mathfrak{B}}_2)^r] - N \operatorname{tr}[\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_3^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_2] - N \operatorname{tr}[\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_4^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_3] - \\ &\quad \left. - \cdots - N \operatorname{tr}[\mathfrak{B}_{n-2} \mathfrak{B}_{n-1}^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_{n-1}^{-1} \overline{\mathfrak{B}}_{n-2}] - N \operatorname{tr}[\mathfrak{B}_{n-1} \overline{\mathfrak{B}}_{n-1}] \right\}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Теперь становится понятно, почему все матрицы, кроме \mathfrak{B}_2 , имеют квадратный вид: нам необходимо иметь возможность их обращать, чтобы записать соответствующую производящую функцию в виде свободной энергии цепочки эрмитовых матриц, как будет показано ниже.

Напомним [21], что интеграл по комплексным матрицам общего вида \mathfrak{B}_i можно выразить в терминах положительно-определенных эрмитовых матриц X_i с помощью замены переменных:

$$X_i := \overline{\mathfrak{B}}_i \mathfrak{B}_i, \quad i = 2, \dots, n-1.\tag{2.4}$$

Все матрицы X_i , $i = 2, \dots, n-1$, теперь имеют один и тот же размер $\gamma_3 N \times \gamma_3 N$. Изменение меры интегрирования для прямоугольных комплексных матриц сводится к введению простого логарифмического члена (см., например, [11], [22]), и получаемый в итоге интеграл имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\int DX_{2 \geq 0} \cdots DX_{n-1 \geq 0} \exp \left\{ N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t_r}{r} \operatorname{tr}[(X_2 |\Lambda|^2)^r] - N \operatorname{tr}(X_2 X_3^{-1}) - \right. \\ &\quad - \cdots - N \operatorname{tr}(X_{n-2} X_{n-1}^{-1}) - N \operatorname{tr} X_{n-1} + \\ &\quad \left. + (\gamma_2 - \gamma_3) N \operatorname{tr} \ln X_2 - \gamma_2 N \operatorname{tr} \ln X_3 - \gamma_3 N \operatorname{tr} \ln(X_4 \cdots X_{n-1}) \right\}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Логарифмический член по X_2 стабилизирует равновесное распределение собственных значений этой матрицы в области положительных вещественных чисел; в случае, когда $\gamma_2 = \gamma_3$, этот член отсутствует и следует использовать технику матричных моделей с жесткими стенками (см. обзор таких моделей, например, в работе [23]).

Произведя масштабное преобразование $X_i \rightarrow X_i |\Lambda|^{-2}$ для всех переменных интегрирования, выражение (2.5) можно привести к более знакомому виду интеграла от

цепочки матриц:

$$\begin{aligned} & \int DX_{2 \geq 0} \cdots DX_{n-1 \geq 0} \exp \left\{ N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t_r}{r} \operatorname{tr}(X_2^r) - N \operatorname{tr}(X_2 X_3^{-1}) - \cdots \right. \\ & \quad \cdots - N \operatorname{tr}(X_{n-2} X_{n-1}^{-1}) - N \operatorname{tr}(X_{n-1} |\Lambda|^{-2}) - \\ & \quad \left. + (\gamma_2 - \gamma_3) N \operatorname{tr} \ln X_2 - \gamma_2 N \operatorname{tr} \ln X_3 - \gamma_3 N \operatorname{tr} \ln(X_4 \cdots X_{n-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это выражение будет использоваться в следующем разделе при выводе уравнения спектральной кривой. Теперь же продолжим преобразования и выразим интеграл (2.6) в терминах собственных значений $x_i^{(k)}$ матриц X_k , $k = 2, \dots, n-1$.

Применим формулу интегрирования Мехты–Ициксона–Зюбера к каждому члену матричной цепочки (2.6). Учитывая то, что, например, интеграл по унитарной группе для члена $e^{-N \operatorname{tr} X_k X_{k+1}^{-1}}$ дает

$$\int DU \exp \left[-N \sum_{i,j=1}^{\gamma_3 N} U_{ij} x_i^{(k)} U_{ij}^* [x_j^{(k+1)}]^{-1} \right] = \frac{\det_{i,j} [e^{-N x_i^{(k)} / x_j^{(k+1)}}]}{\Delta(x^{(k)}) \Delta(1/x^{(k+1)})},$$

и то, что

$$\frac{1}{\Delta(1/x^{(k+1)})} = \prod_{i=1}^{\gamma_3 N} [x_i^{(k+1)}]^{\gamma_3 N - 1} \frac{1}{\Delta(x^{(k+1)})},$$

можно в итоге переписать выражение (2.6) в терминах собственных значений матриц X_k :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\gamma_3 N} dx_i^{(2)} \frac{\Delta(x^{(2)})}{\Delta(|\Lambda|^{-2})} \prod_{k=3}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{\gamma_3 N} \frac{dx_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right) \prod_{i=1}^{\gamma_3 N} \left\{ \left(\frac{x_i^{(2)}}{x_i^{(3)}} \right)^{(\gamma_2 - \gamma_3)N} \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp \left[N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t_r}{r} (x_i^{(2)})^r - \frac{N x_i^{(2)}}{x_i^{(3)}} - \cdots - \frac{N x_i^{(n-2)}}{x_i^{(n-1)}} - N x_i^{(n-1)} |\Lambda|^{-2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Наконец, введя логарифмические переменные

$$\varphi_i^{(r)} = \ln x_i^{(r)}, \quad r = 3, \dots, n-1,$$

перепишем интеграл (2.7) в более прозрачном виде, напоминающем лагранжиан цепочки Тоды:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\gamma_3 N} dx_i^{(2)} \frac{\Delta(x^{(2)})}{\Delta(|\Lambda|^{-2})} \prod_{i=1}^{\gamma_3 N} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \prod_{k=3}^{n-1} d\varphi_i^{(k)} \times \right. \\ & \quad \times \exp \left[N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t_r}{r} (x_i^{(2)})^r + (\gamma_2 - \gamma_3) N \ln x_i^{(2)} - (\gamma_2 - \gamma_3) N \varphi_i^{(3)} - \right. \\ & \quad \left. - N x_i^{(2)} e^{-\varphi_i^{(3)}} - N e^{\varphi_i^{(3)} - \varphi_i^{(4)}} - \cdots - N e^{\varphi_i^{(n-2)} - \varphi_i^{(n-1)}} - N e^{\varphi_i^{(n-1)}} |\Lambda|^{-2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В этой форме записи очевидно, что все интегралы по $\varphi_i^{(k)}$ являются сходящимися.

3. СЛУЧАЙ ДВУХПРОФИЛЬНЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ПАР БЕЛОГО ПРИ $N = 3$

Напомним теперь результаты работы [11], где рассматривался случай $n = 3$. В этом случае в выражении (2.8) отсутствуют “промежуточные” интегрирования по φ_i , и статистическая сумма описывается следующей леммой.

ЛЕММА 2. *В случае, когда допускаются только три точки ветвления 0, 1 и ∞ , производящая функция*

$$\mathcal{F}[\{t_1, t_2, \dots\}, \{t_1, t_2, \dots\}, \beta; N] = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} N^{2-2g} \beta^{n_2} \prod_{i=1}^{n_1} t_{r_i} \prod_{k=1}^{n_3} t_{s_k} \quad (3.1)$$

пар Белого, в которой фиксируются два набора профилей ветвлений: $\{t_{r_1}, \dots, t_{r_{n_1}}\}$ в бесконечной точке и $\{t_{s_1}, \dots, t_{s_{n_3}}\}$ в единице, и берется сумма по профилям в нуле, задается интегралом по эрмитовой положительно-определенной матрице X размера $\gamma N \times \gamma N$ с внешним матричным полем $\tilde{\Lambda} := |\Lambda|^{-2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[t, \mathbf{t}] &= \prod_{k=1}^{\gamma N} |\lambda_k|^{-2\beta N} \int_{\gamma N \times \gamma N} DX_{\geq 0} \times \\ &\times \exp \left\{ N \text{tr}[-X|\Lambda|^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_m}{m} X^m + (\beta - \gamma) \ln X \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $t_s = \text{tr}[(\Lambda \tilde{\Lambda})^s]$.

Интеграл (3.2) представляет собой интеграл типа ОМК [13]. После интегрирования по собственным значениям x_k матрицы X этот интеграл принимает вид отношения двух определителей:

$$\mathcal{Z}[t, \mathbf{t}] = \prod_{k=1}^{\gamma N} |\lambda_k|^{-2\beta N} \frac{1}{\Delta(\tilde{\lambda})} \left\| \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \tilde{\lambda}_{k_2}^{k_1-1}} f(\tilde{\lambda}_{k_2}) \right\|_{k_1, k_2=1}^{\gamma N}, \quad (3.3)$$

где

$$f(\tilde{\lambda}) = \int_0^{\infty} x^{N(\beta-\gamma)} \exp \left\{ -Nx\tilde{\lambda} + N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_m}{m} x^m \right\}. \quad (3.4)$$

Так как любой интеграл типа ОМК (в подходящей нормировке) оказывается тау-функцией иерархии КП, для модели с логарифмическим членом в потенциале это было показано в работе [24], можно немедленно заключить, что экспонента $e^{\mathcal{F}[\{t\}, \{\mathbf{t}\}, \gamma; N]}$ от производящей функции (3.1) с точностью до нормировочного множителя $\prod_{k=1}^{\gamma N} |\lambda_k|^{-2\beta N}$ представляет собой тау-функцию иерархии КП (т. е. удовлетворяет билинейным соотношениям Хироты) относительно времен t_s , описанных в лемме 2.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ КРИВАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ

В данном разделе предлагается метод вычисления спектральной кривой модели (2.6). Для этого техника работы [20] адаптируется к нашему случаю с нестандартным взаимодействием между матрицами в матричной цепочке. В настоящей статье рассмотрение ограничивается технически более наглядным случаем трехматричной модели, задаваемой интегралом

$$\int DM_1 DM_2 DM_3 \exp\{N \operatorname{tr}[V(M_1) + M_1 M_2^{-1} - \gamma_2 \ln M_2 + M_2 M_3 + U(M_3)]\}, \quad (4.1)$$

в котором интегрирования производятся по положительно-определенным эрмитовым матрицам размера $\gamma_3 N \times \gamma_3 N$, а потенциалы $V(x)$ и $U(x)$ суть два лорановских многочлена соответствующих положительных степеней n и r (это рассмотрение нетрудно обобщить на случай, в котором $V'(x)$ и $U'(x)$ представляют собой две рациональные функции).

Модель (4.1) удовлетворяет (см. [8], [25]) уравнениям иерархии двумеризованной цепочки Тоды, и на самом деле эти два класса моделей тесно связаны между собой, так что решение задачи построения спектральной кривой в одной из этих моделей можно стандартным образом перевести в решение этой задачи для другой модели. Так как построение спектральных кривых многоматричных моделей технически более наглядно, чем построение спектральных кривых для моделей с внешними матричными полями, мы остановимся на первом выборе.

Рассмотрим следующие вариации матричных полей M_i :

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= \frac{1}{x - M_1} \xi(M_2, M_3), \\ \delta M_2 &= M_2 \frac{1}{x - M_1} \eta(M_1, M_3), \\ \delta M_3 &= \frac{1}{x - M_1} \rho(M_1, M_2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где функции ξ , η и ρ выбираются в виде многочленов Лорана от своих аргументов. Введем стандартное обозначение для ведущего члена в $1/N^2$ -разложении однопетлевого среднего для матричного поля M_1 :

$$\omega_1(x) := \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0. \quad (4.3)$$

Здесь и ниже индекс 0 у корреляционной функции обозначает ведущий вклад в $1/N^2$ -разложении. Единственный символ следа внутри скобок относится ко всему выражению внутри данных скобок.

Точные петлевые уравнения, полученные с помощью вариаций (4.2), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \xi(M_2, M_3) \right\rangle^c + [\omega_1(x) + V'(x)] \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \xi(M_2, M_3) \right\rangle + \\ + \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} \xi(M_2, M_3) \right\rangle + \left\langle \operatorname{tr} M_2^{-1} \frac{1}{x - M_1} \xi(M_2, M_3) \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\left\langle \operatorname{tr} \frac{-M_1}{x - M_1} \eta(M_1, M_3) M_2^{-1} \right\rangle + \left\langle \operatorname{tr} M_3 M_2 \frac{1}{x - M_1} \eta(M_1, M_3) \right\rangle +$$

$$+ (\gamma_2 - \gamma_3) \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \eta(M_1, M_3) \right\rangle = 0, \quad (4.5)$$

$$\left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \rho(M_1, M_2) \right\rangle + \left\langle \operatorname{tr} U'(M_3) \frac{1}{x - M_1} \rho(M_1, M_2) \right\rangle = 0. \quad (4.6)$$

В этих петлевых уравнениях содержится полная информация об исследуемой модели; если их удастся решить, то можно развить процедуру топологической рекурсии, позволяющую вычислить все члены $1/N^2$ -разложения. В настоящей работе мы задаемся более скромной целью вычисления только лишь спектральной кривой (тем не менее это дает нам все необходимые ингредиенты для построения топологической рекурсии [17]–[19] (см. также [26]), которые включают в себя саму спектральную кривую и два мероморфных дифференциала, определенных на этой кривой).

Так как спектральная кривая получается в пределе больших N , первый член в выражении (4.4) следует опустить как член следующего порядка по $1/N^2$. Все остальные члены во всех трех уравнениях дают вклады в ведущий порядок.

Произведем ниже несколько подстановок, что приведет к появлению необходимых тождеств; во всех тождествах ниже удерживаются только ведущие члены в пределе больших N .

Первая подстановка $\xi(M_2, M_3) = (U'(M_3) - U'(z))/(M_3 - z)$ дает

$$[\omega_1(x) + V'(x)] \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 +$$

$$+ \left\langle \operatorname{tr} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} \right\rangle_0 +$$

$$+ \left\langle \operatorname{tr} M_2^{-1} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 = 0. \quad (4.7)$$

В последнем члене в (4.7) применим уравнение (4.5):

$$\left\langle \operatorname{tr} M_2^{-1} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 =$$

$$= \left\langle \operatorname{tr} M_2 M_1^{-1} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} M_3 \right\rangle_0 +$$

$$+ (\gamma_3 - \gamma_2) \left\langle \operatorname{tr} M_1^{-1} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 =$$

$$= \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} (M_3 - z + z) \right\rangle_0 +$$

$$+ \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 M_1^{-1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} M_3 \right\rangle_0 +$$

$$+ (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 +$$

$$+ (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_1^{-1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \\
&\quad + \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} (U'(M_3) - U'(z)) \right\rangle_0 + \\
&\quad + (\gamma_3 - \gamma_2) \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \\
&\quad + \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2^{-1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

где в последнем члене снова была применена подстановка (4.5) (в обратном направлении). Введем многочлены

$$\begin{aligned}
P_{n-1, r-1}(x, z) &:= \left\langle \operatorname{tr} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} \right\rangle_0, \\
Q_{r-1}(z) &:= \left\langle \operatorname{tr} M_2^{-1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Уравнение (4.7) теперь принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left[\omega_1(x) + V'(x) + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{x} \right] \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \\
&\quad + \frac{z}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} (U'(M_3) - U'(z)) \right\rangle_0 + \\
&\quad + P_{n-1, r-1}(x, z) + \frac{1}{x} Q_{r-1}(z) = 0, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

и остается только вычислить член $\langle \operatorname{tr} M_2 (1/(x - M_1)) (U'(M_3) - U'(z)) \rangle_0$. Заметим сначала, что из (4.6) следует, что

$$\left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} U'(M_3) \right\rangle_0 = \left\langle \operatorname{tr} M_2^2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0,$$

и можно вычислить корреляционные функции $\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \rangle_0$ и $\langle \operatorname{tr} M_2^2 \frac{1}{x - M_1} \rangle_0$, последовательно подставляя $\xi(M_2, M_3) = M_2$ и $\xi(M_2, M_3) = M_2^2$ в формулу (4.4). Введем еще два многочлена

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{n-1}(x) &:= \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} M_2 \right\rangle_0, \\
\widehat{\widehat{P}}_{n-1}(x) &:= \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} M_2^2 \right\rangle_0. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Подстановка $\xi(M_2, M_3) = M_2$ приводит к уравнению

$$[\omega_1(x) + V'(x)] \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0 + \widehat{P}_{n-1}(x) + \omega_1(x) = 0,$$

в то время как подстановка $\xi(M_2, M_3) = M_2^2$ дает

$$[\omega_1(x) + V'(x)] \left\langle \operatorname{tr} M_2^2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0 + \widehat{P}_{n-1}(x) + \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0 = 0,$$

что приводит к ответу:

$$\left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0 = -\frac{\omega_1(x) + \widehat{P}_{n-1}(x)}{\omega_1(x) + V'(x)}, \quad (4.12)$$

$$\left\langle \operatorname{tr} M_2^2 \frac{1}{x - M_1} \right\rangle_0 = \frac{1}{\omega_1(x) + V'(x)} \left[-\widehat{P}_{n-1}(x) + \frac{\omega_1(x) + \widehat{P}_{n-1}(x)}{\omega_1(x) + V'(x)} \right]. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.10) таким образом преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \left[\omega_1(x) + V'(x) + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{x} \right] \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \\ & + \frac{z}{x} \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + s(x, z) = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $s(x, z)$ – рациональная функция:

$$\begin{aligned} s(x, z) &= P_{n-1, r-1}(x, z) + \frac{1}{x} Q_{r-1}(z) + \\ &+ \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\omega_1 + V'(x)} \left(-\widehat{P}_{n-1}(x) + \frac{\omega_1(x) + \widehat{P}_{n-1}(x)}{\omega_1(x) + V'(x)} \right) + U'(z) \frac{\omega_1(x) + \widehat{P}_{n-1}(x)}{\omega_1(x) + V'(x)} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Выполнив последнюю подстановку $\xi(M_2, M_3) = \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} M_2$ в (4.4), получим

$$\begin{aligned} & [\omega_1(x) + V'(x)] \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + \\ & + \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 + t(x, z) = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$t(x, z) := \widehat{P}_{n-1, r-1}(x, z) := \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \frac{V'(M_1) - V'(x)}{x - M_1} \right\rangle_0 \quad (4.17)$$

– полиномиальная функция. Будем рассматривать уравнения (4.14) и (4.16) как систему двух линейных уравнений на две неизвестные

$$\left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0 \quad \text{и} \quad \left\langle \operatorname{tr} M_2 \frac{1}{x - M_1} \frac{U'(M_3) - U'(z)}{M_3 - z} \right\rangle_0.$$

Нас интересует случай, когда эта система вырождается, что налагает следующее условие на переменную z :

$$\det \begin{bmatrix} \omega_1(x) + V'(x) + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{x} & \frac{z}{x} \\ 1 & \omega_1(x) + V'(x) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.18)$$

из которого получаем, что

$$z = x(\omega_1(x) + V'(x)) \left(\omega_1(x) + V'(x) + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{x} \right). \quad (4.19)$$

Стандартный прием в многоматричных моделях состоит в том, чтобы ввести новую переменную y :

$$y := \omega_1(x) + V'(x). \quad (4.20)$$

Тогда условие разрешимости системы линейных уравнений (4.14) и (4.16) в вырожденном случае в точности дает *уравнение спектральной кривой*:

$$s(x, z) - \left(y + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{x} \right) t(x, z) = 0, \quad z = xy^2 + (\gamma_3 - \gamma_2)y. \quad (4.21)$$

Несмотря на то что уравнение спектральной кривой оказывается довольно сложным даже в простейших примерах (например, в случае двух гауссовых потенциалов $V(x)$ и $U(z)$ в приведенном ниже примере 1 получается гиперэллиптическая кривая рода 3), в этом случае все кривые оказываются алгебраическими, в отличие от случая чисел Гурвица для точек ветвления с допустимыми ветвлениями только второго порядка, в котором, как было предположено в работе [27] и доказано в работах [28], [29], соответствующая спектральная кривая (в случае однопрофильных чисел Гурвица) является кривой Ламберта, задаваемой неполиномиальным уравнением $x = ye^{-y}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим случай гауссовых потенциалов $V(x) = x^2/2$ и $U(z) = z^2/2$. Все многочлены $P_{n-1, r-1}$, $\hat{P}_{n-1, r-1}$, \hat{P}_{n-1} , $\hat{\hat{P}}_{n-1}$ и Q_{r-1} при этом обращаются в постоянные, и более того, $P_{n-1, r-1} = 1$ и $\hat{P}_{n-1, r-1} = \hat{P}_{n-1}$. Тогда после всех сокращений для уравнения спектральной кривой получим выражение

$$y - x + \hat{P} - \hat{\hat{P}}y + xy^2 + Qy^2 + y^2(y - x)(xy + \gamma_2 - \gamma_3) = 0, \quad (4.22)$$

которое в случае общих значений постоянных описывает гиперэллиптическую кривую рода 3.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено представление в виде матричной цепочки для производящих функций чисел обобщенных ленточных графов Белого для гипергеометрических чисел Гурвица с ветвлениями в n различных точках и с профилями ветвления, заданными в двух из этих n точек. Также эта функция различает ленточные графы с различными числами прообразов в других точках ветвления. Соответствующие статистические суммы лежат в классе обобщенных матричных моделей Концевича, будучи тем самым тау-функциями иерархии КП, что было ранее показано на языке разложения по характерам в работах [14], [8]. Нам удалось построить представление в виде цепочки матриц с нестандартным взаимодействием $\sum_{i=3}^n \text{tr}(M_{i-1}M_i^{-1})$ между соседними эрмитовыми положительно-определенными матрицами цепочки в случае, когда переменные $n - 3$ циклов полагаются равными друг другу. Нам удалось предложить метод решения моделей такого вида. Для простоты в этой работе мы рассматривали только простейший нетривиальный пример двумеризованной цепочки Тоды с одним промежуточным полем (случай $n = 4$), но наш метод

можно непосредственно обобщить на общий случай $n - 3$ промежуточных матриц с последней, n -й матрицей, взятой в виде внешнего матричного поля $|\Lambda|^{-2}$.

Имея такое обобщение в дальнейшей перспективе, интересно, тем не менее, попробовать установить другие соответствия. Например, производящая функция (1.2) в случае так называемых чистых морфизмов Белого соответствует [11] свободной энергии матричной модели Концевича–Пеннера [30], про которую известно (см. [31]–[33]), что она задает производящую функцию для числа целых точек в пространствах модулей $\mathcal{M}_{g,s}$ кривых рода g с s дырками с фиксированными (целыми) периметрами; точно та же модель оказывается связанной [31] каноническим преобразованием с двумя копиями матричной модели Концевича, выраженными в терминах времен, связанных с дискретизацией пространств модулей $\mathcal{M}_{g,s}$. Представляется весьма интересным обобщить этот подход к дискретизации на операторы разрезания и склейки из работ [9] и [14] в случае гиперэллиптических чисел Гурвица и на интегралы Ходжа из работы [34].

Благодарности. Авторы с большим удовольствием посвящают эту работу Андрею Алексеевичу Славнову – выдающемуся ученому, замечательному человеку и учителю одного из авторов (Л. Ч.) – в связи с его семидесятипятилетием.

Авторы глубоко признательны А. Д. Миронову за ценные замечания. Работа была поддержана ERC Advance Grant 291092 “Exploring the Quantum Universe” (EQU). Я. Амбьорн признателен за поддержку FNU, the Free Danish Research Council (грант “Quantum gravity and the role of black holes”). Работа Л. О. Чехова была поддержана РФФИ (гранты № 14-01-00860-а, 13-01-12405-офи_м) и Программой 19-П Российской академии наук “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051, arXiv: hep-th/9312210.
- [2] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:4 (2012), 045209, 10 pp., arXiv: 1103.4100.
- [3] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Ann. Math.* (2), **163**:2 (2006), 517–560, arXiv: math/0204305.
- [4] А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин, *ТМФ*, **128**:1 (2001), 84–108.
- [5] А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **146**:2 (2006), 222–250.
- [6] K. Takasaki, “Initial value problem for the Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (University of Tokyo, Tokyo, December 20–27, 1982), *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **4**, ed. K. Okamoto, Kinokuniya Company Ltd, Tokyo; North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1984, 139–163.
- [7] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Adv. Math.*, **219**:3 (2008), 932–951, arXiv: 0803.3980.
- [8] J. Harnad, A. Yu. Orlov, *Hypergeometric τ -functions, Hurwitz numbers and enumeration of paths*, arXiv: 1407.7800.
- [9] P. G. Zograf, *Enumeration of Grothendieck’s dessins and KP hierarchy*, arXiv: 1312.2538.
- [10] M. Kazarian, P. Zograf, *Virasoro constraints and topological recursion for Grothendieck’s dessin counting*, arXiv: 1406.5976.
- [11] J. Ambjørn, L. Chekhov, *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, **1**:3 (2014), 337–361.
- [12] L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:14 (1992), 1223–1236, arXiv: hep-th/9201033.

- [13] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275**:3–4 (1992), 311–314, arXiv: hep-th/9111037; *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 181–240, arXiv: hep-th/9201013.
- [14] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *On KP-integrable Hurwitz functions*, arXiv: 1405.1395.
- [15] Г. В. Белый, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:2 (1979), 267–276.
- [16] A. Grothendieck, “Esquisse d’un programme [Sketch of a programme]”, *Geometric Galois Actions. 1*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **242**, eds. L. Schneps, P. Lochak, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 5–48.
- [17] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp.
- [18] L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv: hep-th/0504116.
- [19] L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, *JHEP*, **12** (2006), 053, 31 pp., arXiv: hep-th/0603003.
- [20] B. Eynard, A. Prats Ferrer, *JHEP*, **07** (2009), 096, 29 pp., arXiv: 0805.1368.
- [21] J. Ambjørn, C. F. Kristjansen, Yu. M. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:34 (1992), 3187–3202, arXiv: hep-th/9207020.
- [22] В. А. Марченко, Л. А. Пастур, *Матем. сб.*, **72(114)**:4 (1967), 507–536.
- [23] L. Chekhov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **39**:28 (2006), 8857–8893, arXiv: hep-th/0602013.
- [24] A. Mironov, A. Morozov, G. Semenoff, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051, arXiv: hep-th/9312210.
- [25] M. Guay-Paquet, J. Harnad, *Generating functions for weighted Hurwitz numbers*, arXiv: 1408.6766.
- [26] A. Alexandrov, A. Morozov, A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4165.
- [27] V. Bouchard, M. Mariño, “Hurwitz numbers, matrix models, and enumerative geometry”, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt*-geometry* (Augsburg, Germany, May 25–29, 2007), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **78**, eds. R. Y. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283, arXiv: 0709.1458.
- [28] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **04** (2009), 064, 33 pp., arXiv: 0902.2627.
- [29] G. Borot, B. Eynard, M. Mulase, B. Safnuk, *J. Geom. Phys.*, **61**:2 (2011), 522–540, arXiv: 0906.1206.
- [30] L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **278**:3 (1992), 271–278, arXiv: hep-th/9202006.
- [31] L. Chekhov, *Acta Appl. Math.*, **48**:1 (1997), 33–90, arXiv: hep-th/9509001.
- [32] P. Norbury, *Math. Res. Lett.*, **17**:3 (2010), 467–481.
- [33] N. Do, P. Norbury, *Pruned Hurwitz numbers*, arXiv: 1312.7516.
- [34] M. Kazarian, *Adv. Math.*, **221**:1 (2009), 1–21.

Поступила в редакцию 11.09.2014