

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Малышев, С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов,  
Р. А. Зубов, В. А. Франке, Регуляризация Паули–  
Вилларса и гамильтониан на световом фронте в  $(2+1)$ -  
мерной теории Янга–Миллса,  
*TMF*, 2015, том 184, номер 3, 487–498

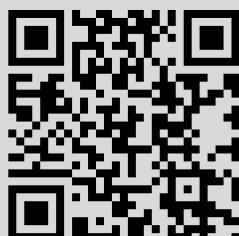
<https://www.mathnet.ru/tmf8917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:42:13



© 2015 г. М. Ю. Малышев\*, С. А. Пастон\*,  
Е. В. Прохватилов\*, Р. А. Зубов\*, В. А. Франке\*

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПАУЛИ–ВИЛЛАРСА И ГАМИЛЬТОНИАН НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ В $(2+1)$ -МЕРНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Рассмотрена проблема перенормировки  $(2+1)$ -мерной теории Янга–Миллса при квантовании на световом фронте. Для восстановления пертурбативной эквивалентности между этой теорией и обычной формулировкой в лоренцевых координатах вводятся дополнительные поля, аналогичные полям, использующимся при регуляризации Паули–Вилларса. Эти же поля осуществляют ультрафиолетовую регуляризацию теории. Полученные результаты позволяют построить перенормированный гамильтониан теории на световом фронте.

**Ключевые слова:** регуляризация Паули–Вилларса, квантование на световом фронте, теория Янга–Миллса.

DOI: 10.4213/tmf8917

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена квантованию теории поля на световом фронте (СФ). Эта тема интересовала Ю. В. Новожилова на протяжении многих лет, и он развивал ее совместно с некоторыми из авторов настоящей работы.

Квантование теории поля на СФ [1], [2] позволяет упростить описание вакуумного состояния. Это делает более удобным применение непертурбативного гамильтонова подхода к задаче нахождения связанных состояний и спектра масс (см. работы [2], [3] и ссылки в них). СФ может быть определен уравнением  $x^+ = 0$ , где переменная  $x^+ = (x^0 + x^1)/\sqrt{2}$  играет роль времени (здесь и далее  $x^0, x^1, x^\perp$  – лоренцевы координаты,  $x^\perp$  означает остальные пространственные координаты). Роль обычных пространственных координат на СФ играют координаты  $x^- = (x^0 - x^1)/\sqrt{2}$  и  $x^\perp$ .

Генератор  $P_-$  трансляций вдоль оси  $x^-$  оказывается кинематическим [1] (не зависит от взаимодействия и является квадратичным по полям, как оператор импульса

---

\*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
E-mail: mimalysh@yandex.ru, paston@pobox.spbu.ru, evgeni.prokhvat@pobox.spbu.ru,  
roman.zubov@hep.phys.spbu.ru, franke@pobox.spbu.ru

в свободной теории). С другой стороны, он неотрицателен ( $P_- \geq 0$ ) для квантовых состояний с неотрицательным квадратом массы. Поэтому состояние с минимальным собственным значением  $p_- = 0$  оператора импульса  $P_-$  может описать (в случае отсутствия безмассовых частиц) вакуумное состояние, и это состояние также минимизирует оператор  $P_+$  в лоренц-инвариантной теории, т. е. оказывается, что физический вакуум совпадает с математическим. Над этим вакуумом можно ввести фоковское пространство и сформулировать в нем задачу на собственные значения оператора  $P_+$  (который является гамильтонианом на СФ). Таким образом, можно искать спектр масс  $m$  на подпространстве с фиксированными значениями  $p_-$  и  $p_\perp$  [3] (см. подробности в обзоре [4]):

$$P_+ |p_-, p_\perp\rangle = \frac{m^2 + p_\perp^2}{2p_-} |p_-, p_\perp\rangle. \quad (1)$$

Теория на СФ имеет сингулярность при  $p_- = 0$  [4]. Для регуляризации мы будем использовать светоподобное обрезание  $|p_-| \geq \delta > 0$ . В настоящей статье мы рассматриваем способ построения пертурбативно перенормированного гамильтониана на СФ (о трудностях подхода к решению этой проблемы см. в работах [5]–[11]). Мы показываем, что это возможно для теории Янга–Миллса в  $(2+1)$ -мерном пространстве–времени с указанной выше регуляризацией  $|p_-| \geq \delta > 0$ . В отличие от рассмотренного ранее случая  $(3+1)$ -мерной КХД [12], можно построить гамильтониан, не содержащий новых неизвестных параметров.

В работах [13], [14] было показано, что диаграммы теории возмущений, порождающейся гамильтонианом на СФ, и соответствующие диаграммы обычной теории возмущений в лоренцевых координатах могут отличаться. Обойти эту трудность можно путем добавления новых (в частности, нелокальных) членов к каноническому гамильтониану на СФ [12], [15], [16], причем число таких членов для калибровочных полей конечно только при использовании дополнительных духовых полей (аналогичных использующимся в регуляризации Паули–Вилларса (ПВ)). При этом было показано, как перенормировать такую теорию, чтобы восстановить калибровочную инвариантность и полное соответствие с перенормированной теорией возмущений в лоренцевых координатах. Построенный в работе [12] гамильтониан на СФ для  $(3+1)$ -мерной КХД содержит конечное число контрчленов, при некоторых значениях коэффициентов перед ними должно происходить восстановление калибровочной инвариантности. Но эти коэффициенты нельзя найти точно из-за бесконечного числа расходящихся диаграмм в  $(3+1)$ -мерной теории. Поэтому приходится рассматривать их как новые неизвестные параметры.

Рассматривающаяся в настоящей работе  $(2+1)$ -мерная теория Янга–Миллса является УФ-суперперенормируемой, вследствие чего можно точно найти все перенормировочные контрчлены посредством вычисления конечного числа расходящихся диаграмм. Это позволяет провести перенормировку теории на СФ таким образом, что в ней не появляются какие-либо неизвестные величины, кроме первоначальных параметров. Пертурбативные ИК-расходимости мы регуляризуем путем введения топологического члена Черна–Саймонса (ЧС) [17], [18].

Мы анализируем теорию возмущений, порождающуюся квантованием на СФ, и исследуем ее эквивалентность обычной ковариантной теории возмущений в лоренцевых координатах, применяя метод работы [12]. Для устранения как УФ-расходи-

мостей, так и отличий между диаграммами теории возмущений на СФ и соответствующими диаграммами ковариантной теории возмущений в лоренцевых координатах мы используем аналог регуляризации ПВ. Мы показываем, как восстановить калибровочную симметрию в пределе снятия регуляризации ПВ при правильной перенормировке этой теории. Канонический гамильтониан на СФ, который несложно построить для рассмотренной теории, будет являться перенормированным гамильтонианом на СФ. Его можно использовать для проведения непертурбативного вычисления спектра масс теории согласно (1).

## 2. РАСХОДИМОСТИ $(2+1)$ -МЕРНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА С ЧЛЕНОМ ЧС

Поскольку для построения перенормированного гамильтониана на СФ мы будем анализировать диаграммы теории возмущений, необходимо, чтобы они были хорошо определены, т. е. свободны от расходимостей. Кроме привычных УФ-расходимостей, теория Янга–Миллса в  $(2+1)$ -мерном случае содержит ИК-расходимости [17], [18], что делает анализ теории возмущений невозможным. Для решения этой проблемы модифицируем, как это часто делается,  $(2+1)$ -мерную теорию Янга–Миллса путем введения члена ЧС, порождающего массу глюонного поля. В результате будем исследовать теорию со следующей плотностью лагранжиана:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\rho\nu}^a F^{a\rho\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\rho\nu\alpha}\left(A_\rho^a \partial_\nu A_\alpha^a + \frac{2}{3}gf^{abc}A_\rho^a A_\nu^b A_\alpha^c\right), \quad (2)$$

где  $A_\rho^a(x)$  – соответствующее глюонам калибровочное поле группы симметрии  $SU(N)$ ,  $F_{\rho\nu}^a = \partial_\rho A_\nu^a - \partial_\nu A_\rho^a + gf_{abc}A_\rho^b A_\nu^c$ ,  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  – индексы присоединенного представления,  $m$  и  $g$  – параметры,  $\varepsilon^{\rho\nu\alpha}$  – символ Леви–Чивиты.

Для построения гамильтониана на СФ выбираем калибровку  $A_- = A^+ = 0$ . Использование ее в действии приводит к плотности лагранжиана, в которой исчезают вклад четвертой степени поля из первого слагаемого в (2) и вклад третьей степени из члена ЧС:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f^{a\rho\nu}f_{\rho\nu}^a + gf^{abc}A_+^a A_\perp^b \partial^+ A_\perp^c + \frac{m}{2}\varepsilon^{\rho\nu\alpha}A_\rho^a \partial_\nu A_\alpha^a, \quad (3)$$

где  $f_{\rho\nu}^a = \partial_\rho A_\nu^a - \partial_\nu A_\rho^a$ . В результате пропагатор, в который дает вклад оставшаяся часть члена ЧС, приобретает в импульсном пространстве следующий вид:

$$\Delta_{\rho\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k_-^2 - m^2 + i0} \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho n_\nu + n_\rho k_\nu + im\varepsilon_{\rho\nu\alpha}n^\alpha}{k_\parallel^2 + i0} 2k_+ \right), \quad (4)$$

где  $k_\parallel^2 = 2k_+k_-$ , а  $n_\nu$  – светоподобный вектор с компонентами  $n_+ = 1$ ,  $n_{-, \perp} = 0$ . Как видно, параметр  $m$  играет роль массы поля  $A_\rho$ . В пропагаторе (4) использовано предписание Мандельштама–Лейбрандта для регуляризации сингулярности при  $k_- = 0$  [19], [20]. Такое предписание позволяет совершать для диаграмм поворот Вика к евклидову пространству импульсов, в котором есть возможность обычным образом анализировать УФ-расходимости фейнмановских диаграмм.

Член взаимодействия, единственный присутствующий в уравнении (3), порождает в диаграммной технике вершину, которая содержит производную с верхним

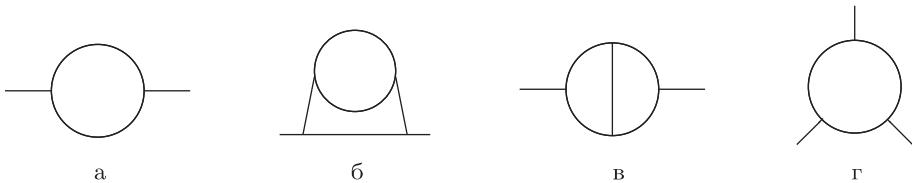


Рис. 1. Расходящиеся диаграммы.

индексом  $+$ . Заметим, что в силу глобальной  $SU(N)$ -симметрии (локальная, т. е. калибровочная, симметрия нарушается в нашем подходе вследствие введения УФ-регуляризации) все диаграммы с одной внешней линией должны быть равны нулю, поскольку являются векторами в пространстве цветов.

Найдем все УФ-расходящиеся фейнмановские диаграммы, которые должны быть перенормированы. Для этого используем стандартный метод оценки индекса УФ-расходимости фейнмановских интегралов в евклидовом пространстве. В результате расходящимися оказываются диаграммы, изображенные на рис. 1. Как и следовало ожидать, их конечное число. Вследствие нарушения лоренц-инвариантности из-за введения калибровки  $A_- = 0$  число расходящихся диаграмм может, вообще говоря, увеличиться. Чтобы это проверить, нужно проанализировать не только общий индекс расходимости (по всем компонентам импульса сразу), но и индексы УФ-расходимости, соответствующие только некоторой части компонент импульсов. Учитывая структуру пропагатора (4) и вершины, легко заметить, что большим, чем полный индекс расходимости, может быть только индекс расходимости по поперечной компоненте  $k_\perp$ . Однако несложно проверить, что на самом деле этот случай не реализуется, и диаграммы, изображенные на рис. 1, исчерпывают все случаи наличия УФ-расходимости. По индексу расходимости диаграмма на рис. 1а расходится линейно, а остальные – логарифмически.

### 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТЕОРИИ

Допустим, что введена некоторая УФ-регуляризация, делающая все диаграммы теории конечными. Как было упомянуто во введении, результаты вычислений диаграмм теории возмущений на СФ и обычной ковариантной теории возмущений в лоренцевых координатах могут отличаться. Если использовать светоподобную регуляризацию  $|k_-| \geq \varepsilon > 0$ , можно применить метод работ [4], [12], [14] для нахождения этих отличий. В статье [12] для теории, пропагатор которой содержит дополнительный полюс по  $k_-$  (как в формуле (4)), было замечено, что эти отличия возникают для диаграмм с любым количеством внешних линий; пример такой диаграммы показан на рис. 2а. Поскольку компенсация этих отличий потребовала бы добавления к действию бесконечного числа контрчленов, необходимо как-то модифицировать пропагатор, чтобы отличия исчезли. Способ сделать это одновременно с введением УФ-регуляризации был предложен для четырехмерной КХД в работе [12], и мы будем использовать здесь его аналог.

Данный способ заключается во введении аналога полей ПВ для калибровочного поля, причем с одновременным введением высших производных (нековариантных; калибровочная инвариантность при такой процедуре нарушается). Заметим, что

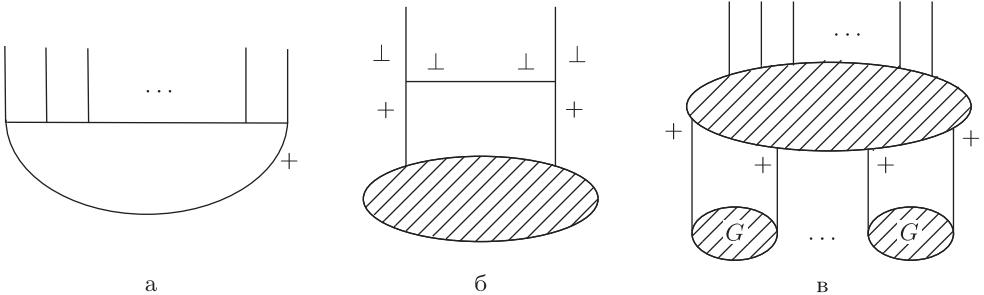


Рис. 2. Пример диаграммы, имеющей различные значения в теории возмущений на СФ и в обычной ковариантной теории возмущений (а). Общий вид диаграммы теории с одним полем ПВ, также имеющей вышеупомянутые различные значения (б). Общий вид диаграммы, которая может содержать ИК-расходимость (в). Символы  $+$ ,  $\perp$  обозначают индексы пропагаторов, заштрихованные области – произвольные поддиаграммы.

из-за особенностей координат СФ введение высшей производной в виде первой степени оператора  $\partial^2$  не приводит к усложнению канонического формализма на СФ, поскольку интегрированием по частям можно привести действие к виду, содержащему производные по светоподобному времени  $x^+$  порядка не выше первого. Поэтому мы ограничиваемся именно такими высшими производными.

Выберем плотность лагранжиана регуляризованной теории в виде

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^2 \left( -\frac{1}{4} f_j^{a\rho\nu} \left( \frac{M_j^2 + \partial_\parallel^2}{B_j} \right) f_{j,\rho\nu}^a + \frac{m}{2} \varepsilon^{\rho\nu\alpha} A_{j,\rho}^a \left( \frac{M_j^2 + \partial_\parallel^2}{B_j} \right) \partial_\nu A_{j,\alpha}^a \right) + g f^{abc} A_\rho^a A_\nu^b \partial^\rho A^{c\nu}. \quad (5)$$

Здесь  $f_{j,\rho\nu}^a = \partial_\rho A_{j,\nu}^a - \partial_\nu A_{j,\rho}^a$ , величина  $A_{j,\rho}^a$  – физическое глюонное поле, а  $A_{1,\rho}^a$  и  $A_{2,\rho}^a$  – вспомогательные поля, аналоги полей ПВ. Как видно, квадратичная часть лагранжиана диагональна по этим полям, а в член взаимодействия входит только их сумма  $A_\rho^a = A_{0,\rho}^a + A_{1,\rho}^a + A_{2,\rho}^a$ . Для всех трех полей, как физического, так и вспомогательных, предполагается выполненным условие  $A_{j,-}^a = 0$ , соответствующее калибровке СФ. Отметим, что обеспечивающий массу калибровочного поля параметр  $m$  является общим для всех трех полей  $A_{j,\rho}^a$ , а различия между ними связаны со значениями параметров  $M_j$  и  $B_j$  (для обычных полей ПВ различными являются массы полей).

Поскольку во взаимодействие входит сумма полей  $A_\rho^a$ , пропагаторы трех полей  $A_{j,\rho}^a$  в диаграммах складываются, и интегралы Фейнмана можно записывать в терминах суммарного пропагатора  $\Delta_{\rho\nu}^{ab}$ , который является суммой пропагаторов отдельных полей

$$\Delta_{j,\rho\nu}^{ab} = \frac{i\delta^{ab}B_j}{(k^2 - m^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_j^2 + i0)} \left( g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho n_\nu + n_\rho k_\nu + im\varepsilon_{\rho\nu\alpha} n^\alpha}{k_\parallel^2 + i0} 2k_+ \right). \quad (6)$$

Будем считать величины  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2 \equiv \mu$  параметрами регуляризации, а величины  $B_j$  выберем так, чтобы, с одной стороны, обеспечить убывание суммарного

пропагатора, как  $1/k_{\parallel}^6$  (см. обсуждение необходимости такого завышенного требования в следующем разделе), а с другой стороны, ликвидировать присутствующий в пропагаторе дополнительный полюс по  $k_-$ . Это удается сделать, если положить

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{M_0^4 M_1^2}{(M_1^2 - M_0^2)(M_0^2 - \mu^2)}, \\ B_1 &= -\frac{M_0^2 M_1^4}{(M_1^2 - M_0^2)(M_1^2 - \mu^2)}, \\ B_2 &= -\frac{M_0^2 M_1^2 \mu^2}{(M_0^2 - \mu^2)(M_1^2 - \mu^2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

в результате чего регуляризованный суммарный пропагатор приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{\rho\nu}^{ab} &= \frac{-i\delta^{ab}}{(k^2 - m^2 + i0)(1 - (k_{\parallel}^2 + i0)/M_0^2)(1 - (k_{\parallel}^2 + i0)/M_1^2)} \times \\ &\times \frac{g_{\rho\nu} k_{\parallel}^2 - (k_{\rho} n_{\nu} + k_{\nu} n_{\rho} + im\varepsilon_{\rho\nu\alpha} n^{\alpha}) 2k_+}{k_{\parallel}^2 - \mu^2 + i0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко проверить, что с таким пропагатором все изображенные на рис. 1 диаграммы становятся конечными. При снятии регуляризации пропагатор (8) должен переходить в пропагатор нерегуляризованной теории (4). Нетрудно заметить, что для этого нужно, чтобы при снятии регуляризации выполнялись следующие условия:

$$\mu \rightarrow 0, \quad M_0 \rightarrow \infty, \quad M_1 \rightarrow \infty, \quad \frac{M_1}{M_0} \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Последнее из них нужно для того, чтобы в пределе снятия регуляризации осталось именно физическое поле  $A_{0,\mu}^a$ , поскольку при выполнении данного условия пропагатор (6) этого поля переходит в выражение (4), а пропагаторы других двух полей стремятся к нулю.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СФ И КОВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛОРЕНЦЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Используя уже упоминавшийся выше метод, предложенный в работе [14], можно для произвольной диаграммы (любого порядка теории возмущений) проанализировать отличие результатов вычисления диаграммы в лоренцевых координатах от результатов на СФ с применением светоподобной регуляризации  $|k_-| \geq \varepsilon$ . Можно численно задать это отличие как разность между диаграммой, для которой интегрирование ведется по всем импульсам  $k_-$ , и такой же диаграммой, для которой это интегрирование ведется только по области  $|k_-| \geq \varepsilon > 0$  (здесь  $k_-$  – пропагаторный импульс). Таким образом, это отличие является суммой всех копий диаграммы, в которых импульс  $k_-$  интегрируется по области  $|k_-| \leq \varepsilon$  по крайней мере для одного из пропагаторных импульсов.

Идея метода заключается в следующем: если для каждого петлевого импульса  $k$  (который всегда может быть отождествлен с некоторым пропагаторным импульсом) сделать замены  $k_- \rightarrow k_- \varepsilon$ ,  $k_+ \rightarrow k_+/\varepsilon$ , существенная зависимость от  $\varepsilon$

в области интегрирования исчезает и можно исследовать поведение подынтегрального выражения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для произвольно сложной диаграммы. В результате для каждого вклада в величину отличия от произвольной диаграммы можно сделать оценку в виде  $\varepsilon^\sigma$ , где  $\sigma$  определяется топологией диаграммы и ее лоренцевой структурой, а также общими свойствами теории, такими как спин поля и УФ-свойства пропагаторов (см. подробности в работе [14]).

Для примера рассмотрим диаграмму, изображенную на рис. 1а. Пусть  $p_\rho$  обозначает внешний импульс, а  $k_\rho$  – петлевой импульс, совпадающий с одним из пропагаторных импульсов. В теории возмущений на СФ он ограничен условием  $|k_-| \geq \varepsilon$ , а при вычислении величины одного из отличий для данной диаграммы – условием  $|k_-| \leq \varepsilon$ . Запишем такой вклад в величину отличия, соответствующий компоненте  $\Delta_{++}$  пропагатора с импульсом  $k$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk_- \frac{(2p_- - k_-)^2 (2k_+)^2}{(k^2 - m^2 + i0)(k_\parallel^2 - \mu^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{2(p_+ - k_+)(p_- - k_-)M_0^4 M_1^4}{(k_\parallel^2 - M_0^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_1^2 + i0)((p - k)^2 - m^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{1}{(2(p_+ - k_+)(p_- - k_-) - \mu^2 + i0)(2(p_+ - k_+)(p_- - k_-) - M_0^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{1}{2(p_+ - k_+)(p_- - k_-) - M_1^2 + i0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь первый множитель  $(2p_- - k_-)^2$  в числителе подынтегрального выражения соответствует вершинам диаграммы. После замен  $k_- \rightarrow k_- \varepsilon$ ,  $k_+ \rightarrow k_+ / \varepsilon$  этот интеграл принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_+ \int_{-1}^1 dk_- \frac{(2p_- - \varepsilon k_-)^2 (2k_+)^2}{\varepsilon^2 (k^2 - m^2 + i0)(k_\parallel^2 - \mu^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{2(p_+ - k_+ / \varepsilon)(p_- - \varepsilon k_-)M_0^4 M_1^4}{(k_\parallel^2 - M_0^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_1^2 + i0)(2(p_+ - k_+ / \varepsilon)(p_- - \varepsilon k_-) - (p_\perp - k_\perp)^2 - m^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{1}{(2(p_+ - k_+ / \varepsilon)(p_- - \varepsilon k_-) - \mu^2 + i0)(2(p_+ - k_+ / \varepsilon)(p_- - \varepsilon k_-) - M_0^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{1}{2(p_+ - k_+ / \varepsilon)(p_- - \varepsilon k_-) - M_1^2 + i0}. \end{aligned} \quad (11)$$

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  этот интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_+ \int_{-1}^1 dk_- \frac{\varepsilon (2p_-)^2 (2k_+)^2}{(k^2 - m^2 + i0)(k_\parallel^2 - \mu^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{2(-k_+) p_- M_0^4 M_1^4}{(k_\parallel^2 - M_0^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_1^2 + i0)} \frac{1}{(2(-k_+) p_- + i0)^4} = \\ & = -2\varepsilon M_0^4 M_1^4 \int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_+ \int_{-1}^1 dk_- \frac{1}{(k_+ p_- - i0)(k^2 - m^2 + i0)} \times \\ & \times \frac{1}{(k_\parallel^2 - \mu^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_0^2 + i0)(k_\parallel^2 - M_1^2 + i0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Это выражение стремится к нулю в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированных параметрах  $\mu$ ,  $M_{0,1}$ , что определяет порядок снятия регуляризаций: сначала  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а затем  $\mu \rightarrow 0$ ,  $M_{0,1} \rightarrow \infty$  с учетом (9).

Мы подробно показали, каким образом в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  исчезает один из вкладов в отличие для диаграммы, изображенной на рис. 1а. Следуя предложенному в работе [14] методу, удается показать, что это же верно и для всех возможных вкладов в отличия для любых диаграмм рассматриваемой теории, в любом порядке теории возмущений. При этом важно отсутствие в рассматриваемой теории ненулевых диаграмм, все внешние линии которых присоединяются к одной вершине, поскольку для них отличие есть всегда (при вычислении на СФ такие диаграммы равны нулю, а в обычной ковариантной теории возмущений, возможно, отличны от нуля, см. работу [14]).

Следует отметить, что полное отсутствие отличий для всех диаграмм удалось обеспечить за счет достаточно быстрого (как  $1/k_{\parallel}^6$ ) убывания пропагатора. Легко видеть, что для УФ-конечности теории было бы достаточно убывания, как  $1/k_{\parallel}^4$ , и этого можно достичь введением не двух (как было сделано в разделе 3) полей ПВ, а только одного, что упростило бы теорию. Однако в этом случае отличия между вычислением на СФ и в обычной ковариантной теории возмущений в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  исчезали бы уже не для всех диаграмм. Величина отличия, конечная в указанном пределе, была не равна нулю для бесконечного числа диаграмм, имеющих изображенный на рис. 2б вид (они оказываются расходящимися в пределе снятия УФ-регуляризации). Для компенсации этих отличий было бы необходимо добавлять к гамильтониану на СФ новый (имеющий вид массы глюона) контрчлен с УФ-расходящимся коэффициентом (который является суммой вкладов бесконечного числа отличий). Поскольку для  $(2+1)$ -мерной теории при УФ-перенормировке удается полностью избежать появления неизвестных коэффициентов перед контрчленами (см. ниже), разумно выбрать вариант теории, в котором они также не появляются при сравнении теории на СФ и в лоренцевых координатах, что мы и делаем в настоящей работе.

## 5. АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНЫХ ИК-РАСХОДИМОСТЕЙ

Как было показано в предыдущем разделе, диаграммы теории возмущений на СФ в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходят в диаграммы обычной ковариантной теории возмущений. Поэтому можно именно в такой форме анализировать расходимости диаграмм в пределе снятия регуляризации (9). Причем для этого можно перейти к евклидовой форме теории, сделав поворот Вика, поскольку структура полюсов при использовании предписания Мандельштама–Лейбрандта позволяет это сделать. После поворота Вика пропагатор (8) приобретает вид

$$\Delta_{\rho\nu}^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{(k^2 + m^2)(1 + k_{\parallel}^2/M_0^2)(1 + k_{\parallel}^2/M_1^2)} \times \\ \times \frac{\delta_{\rho\nu}k_{\parallel}^2 - (k_{\rho}n_{\nu} + n_{\rho}k_{\nu} - m\varepsilon_{\rho\nu\alpha}n_{\alpha})2k_{\beta}n_{\beta}^*}{k_{\parallel}^2 + \mu^2}, \quad (13)$$

причем входящий в эту формулу вектор  $n_{\rho}$  становится комплексным вектором с компонентами  $n_0 = -i/\sqrt{2}$ ,  $n_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $n_2 = 0$ , а вектор  $n_{\beta}^*$  – результат его комплексного сопряжения. Заметим, что, несмотря на переход к евклидову пространству, можно по-прежнему использовать значения индексов – и +, подразумевая

под ними свертки с векторами  $n_\rho$  и  $n_\rho^*$  соответственно и учитывая разложение  $\delta_{\rho\nu} = n_\rho n_\nu^* + n_\rho^* n_\nu + \delta_{\rho\perp} \delta_{\nu\perp}$ , из которого следует, что в евклидовом пространстве можно написать  $a_\rho b_\rho = a_+ b_- + a_- b_+ + a_\perp b_\perp$ .

Проанализируем для произвольной диаграммы предел  $\mu \rightarrow 0$ . Как видно из формы пропагатора (13), в этом пределе возможно появление в диаграммах существенных (т. е. возникающих при любых значениях внешних импульсов) ИК-расходимостей в точках импульсного пространства, в которых одновременно для нескольких пропагаторных импульсов величины  $k_\parallel^2 = k_0^2 + k_1^2$  обращаются в ноль. При этом каждый пропагатор дает полюс первого порядка по  $k_\parallel$ , причем только для компонент  $\Delta_{+\perp}$  (заметим, что  $\Delta_{-\nu} = 0$ , а также что здесь и далее мы для краткости опускаем цветные индексы).

В работе [12] был проведен анализ возможности появления продольной ИК-расходимости для  $(3+1)$ -мерной КХД с аналогичной регуляризацией, когда глюонный пропагатор обладал такими же свойствами. Повторяя этот анализ для рассматриваемой здесь модели, можно получить, что (как и в  $(3+1)$ -мерном случае) указанная расходимость может быть только логарифмической, и возникнуть она может только для диаграмм изображенного на рис. 2в типа, причем только для вкладов вида

$$\Delta_{+\nu} G_{\nu\gamma} \Delta_{\gamma+} = n_\rho^* \Delta_{\rho\nu} G_{\nu\gamma} \Delta_{\gamma\delta} n_\delta^*, \quad (14)$$

где  $G_{\nu\gamma}$  – одна из отмеченных на рисунке поддиаграмм с двумя внешними линиями (вообще говоря, не обязательно одночастично-неприводимых).

Проанализируем дающий продольную ИК-расходимость вклад выражения (14). Для одной из входящих в (14) величин  $\Delta_{\rho\nu}$  запишем полюсной по  $k_\parallel$  вклад, удерживающая только существенные слагаемые, в которых не происходит сокращение полюса, а также отбрасывая несущественный общий множитель:

$$n_\rho^* \frac{\delta_{\rho\nu} k_\parallel^2 - (k_\rho n_\nu + n_\rho k_\nu - m \varepsilon_{\rho\nu\alpha} n_\alpha) 2k_\beta n_\beta^*}{k_\parallel^2} G_{\nu\gamma} \rightarrow -\frac{2k_\beta n_\beta^*}{k_\parallel^2} (k_\nu - m n_\rho^* \varepsilon_{\rho\nu\alpha} n_\alpha) G_{\nu\gamma}. \quad (15)$$

Заметим, что вектор  $n_\rho^* \varepsilon_{\rho\nu\alpha} n_\alpha$  имеет только поперечную компоненту. При анализе ИК-расходимости по  $k_\parallel$  можно считать, что  $k_\perp$  находится в общем положении (иначе при подсчете степени расходимости нужно также учитывать элементы объема интегрирования по  $k_\perp$ , добавление которых логарифмическую расходимость превратит в отсутствие расходимости), а значит, можно считать, что  $k_\perp \neq 0$ . Тогда упомянутый постоянный вектор можно записать в виде

$$n_\rho^* \varepsilon_{\rho\nu\alpha} n_\alpha = -i \frac{k_\nu - k_0 \delta_{\nu 0} - k_1 \delta_{\nu 1}}{k_\perp}, \quad (16)$$

после чего, снова отбрасывая слагаемые, в которых происходит сокращение полюса, существенную часть выражения (15) можно записать в виде

$$-\frac{2k_\beta n_\beta^*}{k_\parallel^2} \left( 1 + i \frac{m}{k_\perp} \right) k_\nu G_{\nu\gamma}. \quad (17)$$

Если бы калибровочная инвариантность сохранялась, то это выражение было бы равно нулю вследствие тождества Уорда, следовательно, в этом случае существенные продольные расходимости отсутствовали бы (точно такой же результат был

получен в работе [12] для  $(3 + 1)$ -мерной КХД, так что учет влияния члена ЧС не изменил результата). Однако используемая регуляризация нарушает калибровочную инвариантность, при этом регуляризация возникающую расходимость с помощью параметра  $\mu$ . Для того чтобы в пределе  $\mu \rightarrow 0$  расходимость не появилась, необходимо, чтобы одновременно с взятием этого предела снималась бы и УФ-регуляризация (т. е. одновременно брались все пределы (9)), а перенормировочные контрчлены выбирались так, чтобы в пределе снятия регуляризации выполнялись тождества Уорда (идея такого механизма была предложена в статье [12]). Если мы выбираем контрчлены так, чтобы с их учетом значения диаграмм отличались от перенормированных результатов, полученных по размерной регуляризации, на величину порядка  $1/M_0$  (для УФ-конечных диаграмм это происходит автоматически, если произведение  $\mu M_0$  ограничено сверху), то вклад величины (17) можно оценить как  $O(1/M_0)$ . Следовательно, соответствующий ему полный вклад в диаграмму (который в размерной регуляризации равен нулю) можно оценить как  $(\ln \mu)^N/M_0$  (где  $N$  – число поддиаграмм  $G$  на рис. 2в). Потребуем, чтобы это отношение стремилось к нулю для любого  $N$ , тогда диаграммы, для которых может возникать продольная ИК-расходимость, не будут в пределе снятия регуляризации давать отличий между результатами вычислений в использующейся здесь схеме и в размерной регуляризации.

Рассмотрим диаграммы, для которых ИК-расходимость не возникает. В этом случае можно положить  $\mu = 0$  в подынтегральном выражении, при этом подынтегральное выражение изменится на величину, пропорциональную  $\mu^2$ . Из-за выделения множителя  $\mu^2$  продольная ИК-расходимость оставшегося интеграла может увеличиться не более чем на два, т. е. стать не более чем линейной, и это приведет к изменению общего множителя с  $\mu^2$  на  $\mu$ . Интеграл, при котором стоит этот множитель, может УФ-расходиться не более чем логарифмически (поскольку исходно в теории присутствовали УФ-расходимости не выше линейной). В результате все отличия между результатами вычисления диаграмм с конечным  $\mu$  и с  $\mu = 0$  будут исчезать, если потребовать, чтобы при снятии регуляризации выполнялось соотношение  $\mu \ln M_1 \rightarrow 0$ . В результате можно заключить, что если взять, например,

$$\mu \sim \frac{1}{\Lambda}, \quad M_0 \sim \Lambda, \quad M_1 \sim \Lambda^2, \quad (18)$$

то в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  все требуемые условия (включая условия (9)) будут выполнены, и при анализе УФ-расходимостей можно считать, что в диаграммах  $\mu = 0$ .

## 6. ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕОРИИ

В рассматриваемой теории нужно перенормировать только конечное число диаграмм, перечисленных на рис. 1. Можно вычислить их значения при используемой регуляризации и таким образом найти в явном виде коэффициенты перед контрчленами, обеспечивающие совпадение значений диаграмм с результатами их перенормировки по размерной регуляризации. В результате, несмотря на то что использованная регуляризация нарушает лоренцеву и калибровочную симметрии, для перенормированной теории в пределе снятия регуляризации  $\Lambda \rightarrow \infty$  эти симметрии будут восстановлены.

Далее мы выбираем контрчлены нашей теории так, что перенормированные диаграммы в нашей регуляризации совпадают с перенормированными диаграммами в размерной регуляризации.

Рассмотрим диаграмму, изображенную на рис. 1а. После регуляризации рассмотрим для этой диаграммы разложение в ряд Тейлора по внешнему импульсу  $p_\rho$  в окрестности точки  $p_\rho = 0$ . Посредством размерного анализа УФ-расходящихся частей можно найти, что для линейно расходящейся диаграммы достаточно перенормировать только два первых члена в этом разложении, а для логарифмически расходящихся диаграмм – только первый. Во введенной регуляризации эта диаграмма содержит интегралы, которые обращаются в ноль при внешних верхних индексах  $++, +\perp$  и  $\perp+$ . Это происходит вследствие нечетности подынтегральных функций по одной из компонент импульса или вследствие возможности разбить подынтегральное выражение на разность двух частей, которые сокращают друг друга в силу симметрии относительно взаимной замены продольных компонент импульса интегрирования (мы не рассматриваем ампутированные диаграммы, имеющие верхний индекс  $-$ , поскольку в калибровке  $A_- = 0$  эти вклады исчезают при свертке с propagатором в функциях Грина, перенормировку которых мы изучаем).

Для случая  $\perp\perp$  получается следующий интеграл (при  $p_\rho = 0$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{k_\perp^2 - k_0^2 - k_1^2}{(k^2 + m^2)^2} R(k_0, k_1, M_0, M_1), \quad (19)$$

где

$$R(k_0, k_1, M_0, M_1) = \frac{M_0^4 M_1^4}{(k_\parallel^2 + M_0^2)^2 (k_\parallel^2 + M_1^2)^2}.$$

В этом интеграле мы положили  $\mu = 0$ , так как он не содержит ИК-расходимостей. В цилиндрических координатах  $\varphi$ ,  $r = \sqrt{k_0^2 + k_1^2}$ ,  $k_\perp$  можно проинтегрировать по углу (это интегрирование дает множитель  $2\pi$ ) и написать

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dk_\perp \frac{(k_\perp^2 - r) R(r, M_0, M_1)}{(r + k_\perp^2 + m^2)^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty dr \left( \frac{1}{(r + m^2)^{1/2}} - \frac{r}{(r + m^2)^{3/2}} \right) R(r, M_0, M_1) = \\ &= \frac{\pi^2 m^2}{2} \int_0^\infty dr \frac{R(r, M_0, M_1)}{(r + m^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь можно снять регуляризацию ( $M_{0,1} \rightarrow \infty$ , соответственно,  $R \rightarrow 1$ ) и вычислить этот интеграл:

$$\frac{\pi^2 m^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{(r + m^2)^{3/2}} = \frac{\pi^2 m^2}{2} \int_{m^2}^\infty \frac{dr}{r^{3/2}} = \pi^2 m. \quad (21)$$

Таким образом, линейная УФ-расходимость фактически отсутствует. Такой же ответ мы получаем в размерной регуляризации.

Мы вычислили второй член в разложении в ряд Тейлора с помощью аналитической компьютерной программы и нашли, что этот член равен нулю при всех рассматриваемых внешних индексах у диаграммы  $(++, +\perp, \perp+$  и  $\perp\perp)$ . Таким образом

диаграмма на рис. 1а не требует перенормировки. Аналогично, с помощью аналитической компьютерной программы мы получили, что расходящаяся (в пределе снятия УФ-регуляризации) часть диаграммы, изображенной на рис. 1г, равна нулю в обеих регуляризациях при всех рассматриваемых внешних индексах (+++, ++ $\perp$ , …). Пока мы не нашли аналитического ответа для расходящихся в пределе  $M_{0,1} \rightarrow \infty$  частей двух оставшихся диаграмм. Однако эти расходящиеся части можно найти численно, и этого достаточно для возможных непертурбативных вычислений с гамильтонианом на СФ.

Таким образом, мы продемонстрировали, что можно точно найти контрчлены, необходимые для перенормировки. На этом пути мы получаем возможность построить перенормированный гамильтониан [4], [12] и использовать его для непертурбативных вычислений.

**Благодарности.** Авторы благодарят организаторов конференции “В поисках фундаментальных симметрий”, посвященной 90-летию со дня рождения Ю. В. Новожилова. Работа М. Ю. Малышева, Е. В. Прохватилова и Р. А. Зубова выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.189.2014).

### Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Modern Phys.*, **21**:3 (1949), 392–399.
- [2] B. L. G. Bakker, A. Bassetto, S. J. Brodsky et al., *Light-front quantum chromodynamics: a framework for the analysis of hadron physics*, arXiv: 1309.6333.
- [3] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, S. S. Pinsky, *Phys. Rep.*, **301**:4–6 (1998), 299–486, arXiv: hep-ph/9705477.
- [4] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, “Quantization of field theory on the light front”, *Focus on Quantum Field Theory*, ed. O. Kovras, Nova Sci. Publ., New York, 2005, 23–81, arXiv: hep-th/0404031.
- [5] K. G. Wilson, T. S. Walhout, A. Harindranath, W.-M. Zhang, R. J. Perry, S. D. Glazek, *Phys. Rev. D*, **49**:12 (1994), 6720–6766, arXiv: hep-th/9401153.
- [6] S. D. Glazek, *Renormalization of Hamiltonians in the light-front Fock space*, arXiv: hep-th/9706212.
- [7] S. D. Glazek, K. G. Wilson, *Phys. Rev. D*, **49**:8 (1994), 4214–4218.
- [8] S. D. Glazek, K. G. Wilson, *Phys. Rev. D*, **48**:12 (1993), 5863–5872.
- [9] S. D. Glazek, *Acta Phys. Polon. B*, **39**:12 (2008), 3395–3421, arXiv: 0810.5258.
- [10] S. D. Glazek, *Phys. Rev. D*, **63**:11 (2001), 116006, 18 pp., arXiv: hep-th/0012012.
- [11] S. D. Glazek, M. Wieckowski, *Phys. Rev. D*, **66**:1 (2002), 016001, 19 pp., arXiv: hep-th/0204171.
- [12] С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 417–437, arXiv: hep-th/0002062.
- [13] M. Burkardt, A. Langnau, *Phys. Rev. D*, **44**:4 (1991), 1187–1197.
- [14] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **112**:3 (1997), 399–416, arXiv: hep-th/9901110.
- [15] С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 84–97, arXiv: hep-th/0302016.
- [16] С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке, *ЯФ*, **68**:2 (2005), 292–303, arXiv: hep-th/0501186.
- [17] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Ann. Phys.*, **281**:1 (2000), 409–449.
- [18] R. Jackiw, S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:15 (1982), 975–978.
- [19] S. Mandelstam, *Nucl. Phys. B*, **213**:1 (1983), 149–168.
- [20] G. Leibbrandt, *Phys. Rev. D*, **29**:8 (1984), 1699–1708.