



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Белавкин, О генераторах квантовых стохастических эволюционных уравнений,
ТМФ, 1997, том 110, номер 1, 46–60

<https://www.mathnet.ru/tmf951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:33:22



В. П. Белавкин*

О ГЕНЕРАТОРАХ КВАНТОВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Дано описание стохастических ограниченных генераторов квантовых необратимых волновых уравнений. Указан общий вид квантовой стохастической эволюции относительно пуассоновского (скачкообразного), винеровского (диффузионного) и общего квантового шумов. Соответствующая необратимая гейзенбергова эволюция выражена в терминах стохастических вполне положительных отображений. Найдена общая форма стохастического вполне диссипативного операторного уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории открытых систем часто используется предложенное Линдбладом квантовое необратимое управляющее уравнение [1]. Это детерминистское уравнение, которое может быть получено усреднением стохастического уравнения Ланжевена по управляющим квантовым шумам. Уравнению Ланжевена удовлетворяет квантовый стохастический процесс динамических представлений. Эти представления являются примерами чистых вполне положительных (ВП) отображений. Однако чистые ВП-отображения не обязательно являются представлениями. Следовательно, имеется возможность построения чистой необратимой квантовой стохастической ВП-динамики, которая не может управляться уравнением Ланжевена.

В следующем разделе приведены примеры такой динамики, нашедшие физические применения. Остальная часть статьи посвящена определению структуры квантовых стохастических эволюционных уравнений с ограниченными коэффициентами.

В настоящем введении мы очертим эту структуру на неформальном уровне. С этой целью распространим теорему Льюиса–Эванса о генераторах ВП-динамики [2] на случай стохастических дифференциалов, порождающих $\star$ -алгебру Ито,

$$\begin{aligned} d\Lambda(t, a)^\dagger d\Lambda(t, a) &= d\Lambda(t, a^\star a), \quad \sum \lambda_i d\Lambda(t, a_i) = d\Lambda(t, \sum \lambda_i a_i), \\ d\Lambda(t, a)^\dagger &= d\Lambda(t, a^\star). \end{aligned}$$

Здесь $a, a^\star, a_i$ — элементы конечномерной некоммутативной $\star$ -алгебры $\mathfrak{a}$ с самосопряженным правым аннулятором d таким, что $d\Lambda(t, d) = dt$. На $\mathfrak{a}$ задан положительный линейный функционал $l: \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$. Он связан со средними значениями формулой $\langle d\Lambda(t, a) \rangle = l(a) dt$. Из того что $dt = \langle d\Lambda(t, d) \rangle = l(d) dt$, следует $l(d) = 1$.

*Mathematics Department, University of Nottingham, NG7 2RD, UK

Функционал l определяет ГНС-представление $a \mapsto \mathbf{a} = (a_\nu^\mu)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$ алгебры $\mathfrak{a}$ в терминах четверок

$$a_\bullet^\bullet := j(a), \quad a_+^\bullet := k(a), \quad a_\bullet^- := k^*(a) := k(a^*)^\dagger, \quad a_+^- := l(a).$$

Здесь j – матричное представление, $j(a^*a) = j(a)^\dagger j(a)$ и $j(a)^\dagger k(a) = k(a^*a)$. Оно определено на пространстве $\mathcal{K}$ колмогоровского разложения $l(a^*a) = k(a)^\dagger k(a)$ в произведение $a_\bullet^- a_+^\bullet$ с конечным числом компонент (с индексами, обозначенными $\bullet$).

Квантовые стохастические процессы $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \Lambda(t, a)$, $a \in \mathfrak{a}$, с независимыми приращениями $d\Lambda(t, a) = \Lambda(t + dt, a) - \Lambda(t, a)$, образующими $\star$ -алгебру Ито, могут быть представлены в фоксовом пространстве $\mathfrak{F}$ над пространством $\mathcal{K}$ -значных квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{R}_+$ как $\Lambda_\nu^\mu(t, a_\nu^\mu) = a_\nu^\mu \Lambda_\mu^\nu(t)$ [3]. Здесь

$$a_\nu^\mu \Lambda_\mu^\nu(t) = a_\bullet^\bullet \Lambda_\bullet^\bullet(t) + a_+^\bullet \Lambda_+^\bullet(t) + a_\bullet^- \Lambda_-^\bullet(t) + a_+^- \Lambda_-^+(t)$$

– каноническое разложение Λ на обменный $\Lambda_\bullet^\bullet$, рождающий $\Lambda_+^\bullet$, уничтожающий $\Lambda_-^\bullet$ и сохраняющий $\Lambda_-^+ = tI$ процессы квантового стохастического исчисления [3]. Для их средних по вакууму в $\mathfrak{F}$ имеем $\langle \Lambda_\mu^\nu(t) \rangle = t\delta_+^\nu \delta_\mu^-$.

Параметризованная таким образом алгебра $\mathfrak{a}$ может быть отождествлена с $\star$ -подалгеброй алгебры всех четверок $\mathbf{a} = (a_\nu^\mu)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$, где $a_\nu^\mu: \mathcal{K}_\nu \rightarrow \mathcal{K}_\mu$ – линейные операторы в $\mathcal{K}_\bullet := \mathcal{K}$, $\mathcal{K}_+ := \mathbb{C} \nleftrightarrow \mathcal{K}_-$, имеющие сопряженные $a_\nu^\mu \star \mathcal{K}_\mu \subseteq \mathcal{K}_\nu$, с таблицей умножения Хадсона–Партасарати [4]

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} := (a_\bullet^\bullet b_\bullet^\bullet)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}, \quad (1)$$

единственным аннулятором $\mathbf{d} := (\delta_-^\mu \delta_+^\nu)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$ и инволюцией $a_{-\nu}^{\star\mu} := a_{-\mu}^\nu$, где $-(-) = +$, $-\bullet = \bullet$, $-(+) = -$.

Главный результат данной статьи заключается в том, что нами выяснена общая структура неограниченных генераторов $\lambda_\nu^\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ линейных квантовых стохастических ВП-эволюций ϕ_t на $\mathcal{B} := \mathcal{L}(\mathcal{H})$ в терминах квантовых стохастических дифференциалов $d\phi_t = \phi_t \circ \lambda_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu$ с $\phi_0 = \iota$, где ι – тождественное представление $\mathcal{B}$. Как и в случае ограниченных операторов и конечномерной алгебры Ито, генератор $\lambda := (\lambda)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$ может быть представлен в “линдбладовской” форме $\lambda(B) = L^\dagger j(B)L - K^\dagger B - BK$, определяющей квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\phi_t(B) + \phi_t(K^\dagger B + BK - L^\dagger j(B)L) dt = \phi_t(L^\bullet j(B)L_\bullet - B \otimes \delta_\bullet^\bullet) d\Lambda_\bullet^\bullet + \\ + \phi_t(L^\bullet j(B)L - K^\bullet B) d\Lambda_+^\bullet + \phi_t(L^\dagger j(B)L_\bullet - BK_\bullet) d\Lambda_-^\bullet, \quad (2)$$

где j – операторное представление $\mathcal{B}$ и $\delta_\bullet^\bullet$ – тождественный оператор в $\mathcal{K}$. Такое распространение формы Линдблада на квантовые стохастические генераторы было найдено недавно и в нелинейном случае [5]. Мы докажем, что эта структура является необходимой по крайней мере в случае ограниченных w^* -непрерывных генераторов на алгебре фон Неймана $\mathcal{B}$. Существование минимального ВП-решения, которое построено при определенных предположениях о непрерывности, доказывает, что эта структура является также достаточной для вполне положительности любого решения уравнения (2).

Случай Льюиса–Эванса $\Lambda(t, a) := \alpha t I$ описывается с помощью простейшей одномерной алгебры Ито $\mathfrak{a} := \mathbb{C}d$ с $l(a) := \alpha \in \mathbb{C}$ и нильпотентным умножением $\alpha^* \alpha := 0$, соответствующим детерминистскому (ньютоновскому) исчислению $(dt)^2 := 0$ в $\mathcal{K} := 0$.

Стандартный винеровский процесс $Q = \Lambda_-^\bullet + \Lambda_+^\bullet$ в фоковском пространстве описывается нильпотентной алгеброй второго порядка $\mathfrak{a}$, состоящей из пар $a = (\alpha, \xi)$ с $\alpha, \xi \in \mathbb{C}$. Эта алгебра имеет аннулятор $d = (1, 0)$. Она представлена четверками $a_+^- := \alpha$, $a_-^+ := \xi =: a_+^\bullet$, $a_-^\bullet := 0$ в $\mathcal{K} := \mathbb{C}$, соответствующими $\Lambda(t, a) := \alpha t I + \xi Q(t)$. Алгебра $\mathbb{C}$ с обычным умножением $\zeta^* \zeta = |\zeta|^2$ может быть вложена в двумерную алгебру Ито $\mathfrak{a}$ пар $a = (\alpha, \zeta)$, $\alpha = l(a)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, следующим образом: $a_-^\bullet = \zeta$, $a_+^\bullet = +i\zeta$, $a_-^+ = -i\zeta$, $a_+^- = \zeta$. Она соответствует $\Lambda(t, a) := \alpha t I + \zeta P(t)$, где $P = \Lambda_-^\bullet + i(\Lambda_+^\bullet - \Lambda_-^\bullet)$ – представление стандартного пуассоновского процесса, компенсированного его средним временем t . Таким образом, наши результаты применимы также к классическим стохастическим дифференциалам ВП-процессов, которые соответствуют коммутативным алгебрам Ито и разложимы на винеровскую, пуассоновскую и ньютоновскую ортогональные компоненты.

2. УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Теория квантовой фильтрации, намеченная в [6, 7] и затем развитая в [8], позволяет исследовать новые типы необратимых стохастических уравнений для квантовых состояний, дающих динамическое решение известной проблемы квантового измерения. Некоторые частные типы таких уравнений рассмотрены недавно в феноменологических теориях перманентной квантовой редукции [9, 10], коллапса при непрерывных измерениях [11, 12], спонтанных скачков [13, 14], диффузий и локализаций [15, 16]. Отличительная черта этих динамик состоит в том, что характерная для них необратимая эволюция может быть описана с помощью линейного диссипативного стохастического волнового уравнения, решения которого нормированы лишь в среднем квадратичном.

Простейшая динамика такого типа описывается непрерывными пропагаторами $V_t(\omega)$, где ω принадлежит пространству Ω всех броуновских траекторий. Эти пропагаторы принимают значения в пространстве операторов на гильбертовом пространстве состояний системы $\mathcal{H}$. Они образуют согласованный с некоторым потоком σ -алгебр случайный процесс в $\mathcal{H}$, удовлетворяющий уравнению Ито

$$dV_t + KV_t dt = LV_t dQ, \quad V_0 = I, \quad (3)$$

которое было выведено в [17]. Здесь $Q(t, \omega)$ – стандартный винеровский процесс, K – аккретивный оператор, $K + K^\dagger \geq L^\dagger L$, и L – линейный оператор $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$. Используя формулу Ито

$$d(V_t^\dagger V_t) = dV_t^\dagger V_t + V_t^\dagger dV_t + dV_t^\dagger dV_t \quad (4)$$

и усреднение по траекториям Q , получаем $d\langle V_t^\dagger V_t \rangle \leq 0$ как следствие того, что $L^\dagger L \leq K + K^\dagger$. Заметим, что процесс V_t унитарен, если выполнено условие фильтрации $K^\dagger + K = L^\dagger L$ и если $L^\dagger = -L$.

Другой тип пропагатора $V_t(\omega)$: $\psi_0 \in \mathcal{H} \mapsto \psi_t(\omega) \in \mathcal{H}$ дается стохастическим уравнением

$$dV_t + KV_t dt = LV_t dP, \quad V_0 = I, \quad (5)$$

выведенным в [18]. Здесь $L = J - I$ – оператор скачка, соответствующий стационарным разрывным эволюциям $J: \psi_t \mapsto \psi_{t+}$ при $t \in \omega = \{t_1, t_2, \dots\}$ и $P(t, \omega)$ – стандартный пуассоновский считающий процесс, компенсированный его средним временем t . Используя формулу Ито (4) с $dV_t^\dagger dV_t = V_t^\dagger L^\dagger L V_t (dP + dt)$, получаем

$$d(V_t^\dagger V_t) = V_t^\dagger (L^\dagger L - K - K^\dagger) V_t dt + V_t^\dagger (L^\dagger + L + L^\dagger L) V_t dP.$$

Усредняя по траекториям P , можно показать, что $d\langle V_t^\dagger V_t \rangle \leq 0$ при условии субфильтрации $L^\dagger L \leq K + K^\dagger$. Такая эволюция унитарна, если $L^\dagger L = K + K^\dagger$ и если скачки изометричны, т.е. $J^\dagger J = I$.

Итак, в обоих случаях стохастическая волновая функция $\psi_t(\omega) = V_t(\omega)\psi_0$ не нормирована ни при каких ω . Однако она нормирована в среднем квадратичном смысле на вероятность $\langle \|\psi_t\|^2 \rangle \leq \|\psi_0\|^2 = 1$ того, что квантовая система не будет разрушена во время ее наблюдения до момента времени t . Если $\langle \|\psi_t\|^2 \rangle = 1$, то положительная случайная функция $\|\psi_t(\omega)\|^2$ есть плотность вероятностного распределения диффузионного процесса $\hat{Q}$ или процесса отсчетов на выходе $\hat{P}$ до момента времени t относительно стандартного винеровского Q или пуассоновского P процессов на входе.

Используя формулу Ито для $\phi_t(B) = V_t^\dagger B V_t$, получим стохастические уравнения

$$d\phi_t(B) + \phi_t(K^\dagger B + BK - L^\dagger BL) dt = \phi_t(L^\dagger B + BL) dQ, \quad (6)$$

$$d\phi_t(B) + \phi_t(K^\dagger B + BK - L^\dagger BL) dt = \phi_t(J^\dagger B J - B) dP, \quad (7)$$

описывающие стохастическую эволюцию $Y_t = \phi_t(B)$ некоторого ограниченного оператора системы $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ следующим образом: $Y_t(\omega) = V_t(\omega)^\dagger B V_t(\omega)$. Отображения $\phi_t: B \mapsto Y_t$ эрмитовы в том смысле, что $Y_t^\dagger = Y_t$, если $B^\dagger = B$, но в отличие от обычной гамильтоновой динамики они не мультипликативны, так как $\phi_t(B^\dagger C) \neq \phi_t(B)^\dagger \phi_t(C)$, даже если они не усредняются по ω . Более того, обычно они не нормированы, т.е. $M_t(\omega) := \phi_t(\omega, I) \neq I$, хотя случайные положительные операторы $M_t = V_t^\dagger V_t$ при условии фильтрации нормированы в среднем, $\langle M_t \rangle = I$, и имеют мартингалное свойство $\epsilon_t[M_s] = M_t$ для всех $s > t$, где ϵ_t – условное математическое ожидание относительно истории процессов P или Q до момента времени t .

Хотя уравнения (3), (5) выглядят по-разному, их можно объединить в квантовое стохастическое уравнение

$$dV_t + K V_t dt + K^- V_t d\Lambda_- = (J - I) V_t d\Lambda + L_+ V_t d\Lambda^+, \quad (8)$$

где $\Lambda^+(t)$ и $\Lambda_-(t)$ – процессы рождения и уничтожения на интервале $[0, t)$ и $\Lambda(t)$ – число квантов на этом интервале. Канонические квантовые случайные процессы Λ^+ , Λ^- , Λ представляют квантовый шум по отношению к вакуумному состоянию $|0\rangle$ фоковского пространства $\mathcal{F}$ над гильбертовым пространством состояний одного кванта $L^2(\mathbb{R}_+)$. Они формально определены в [19] интегралами

$$\Lambda_-(t) = \int_0^t \Lambda_-^r dr, \quad \Lambda^+(t) = \int_0^t \Lambda_+^r dr, \quad \Lambda(t) = \int_0^t \Lambda^r dr,$$

где Λ_-^r, Λ_r^+ — обобщенные квантовые одномерные поля в $\mathcal{F}$, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям

$$[\Lambda_-^r, \Lambda_s^+] = \delta(s - r)I, \quad [\Lambda_-^r, \Lambda_-^s] = 0 = [\Lambda_r^+, \Lambda_s^+].$$

Они могут быть определены по независимым приращениям, для которых

$$\langle 0 | d\Lambda_- | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | d\Lambda^+ | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | d\Lambda | 0 \rangle = 0$$

и справедлива некоммутативная таблица умножения

$$\begin{aligned} d\Lambda d\Lambda &= d\Lambda, & d\Lambda_- d\Lambda &= d\Lambda_-, & d\Lambda d\Lambda^+ &= d\Lambda^+, & d\Lambda_- d\Lambda^+ &= dt I, \\ d\Lambda d\Lambda_- &= d\Lambda^+ d\Lambda = d\Lambda^+ d\Lambda_- = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Стандартный пуассоновский процесс P и стандартный винеровский процесс Q могут быть представлены в $\mathfrak{F}$ линейными комбинациями [4]

$$P(t) = \Lambda(t) + i(\Lambda^+(t) - \Lambda_-(t)), \quad Q(t) = \Lambda^+(t) + \Lambda_-(t),$$

так что уравнение (8) переходит в (3) при $J = I$, $L_+ = L = -K^-$ и в (5) при $J = I + L$, $L_+ = iL = K^-$. Квантовое стохастическое уравнение для $\phi_t(B) = V_t^\dagger B V_t$ имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} d\phi_t(B) + \phi_t(K^\dagger B + BK - L^- B L_+) dt &= \phi_t(J^\dagger B J - B) d\Lambda_+ \\ + \phi_t(J^\dagger B L_+ - K_+ B) + \phi_t(L^- B J - B K^-) d\Lambda_-, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L^- = L_+^\dagger$ и $K_+^\dagger = K^-$. Оно совпадает с (6) или с (7) в частных случаях. Уравнение (10) получается из (8) с использованием формулы Ито (4) и таблицы умножения (9). Условие субфильтрации $K + K^\dagger \leq L^- L_+$ для уравнения (8) определяет в обоих случаях операторнозначный процесс $R_t = \phi_t(I)$, являющийся субмартингалом с $R_0 = I$ или мартингалом в случае $K + K^\dagger = L^- L_+$. Частный случай

$$J = S, \quad K^- = L^- S, \quad L_+ = S K_+, \quad S^\dagger S = I$$

согласуется с потоком Хадсона–Эванса при $S^\dagger = S^{-1}$. Если K и L ограничены, то эволюция изометрична и $\phi_t(I) = I$.

В следующем разделе мы определим многомерный аналог уравнения (10) и покажем, что предлагаемая структура его генератора действительно следует из свойства ВП-отображения ϕ_t для всех $t > 0$ и условия нормировки $\phi_t(I) = M_t$ на “формозначный” субмартингал относительно естественной фильтрации квантового шума в фоковском пространстве $\mathfrak{F}$.

3. ГЕНЕРАТОРЫ КОЦИКЛОВ КВАНТОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Динамика квантовой фильтрации над некоторой операторной алгеброй $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ описывается однопараметрическими коциклами $\phi = (\phi_t)_{t>0}$ линейных вполне положительных стохастических отображений $\phi_t(\omega): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Условие

$$\phi_s(\omega) \circ \phi_r(\omega^s) = \phi_{r+s}(\omega) \quad \forall r, s > 0$$

означает инвариантность относительно сдвига $\omega^s = \{\omega(t+s)\}$ стохастического процесса $\omega = \{\omega(t)\}$. Такие отображения обычно не ограничены, но нормируемы условием $\phi_t(I) = M_t$ на операторнозначный мартингал с $M_0 = 1$ или на положительный субмартингал.

Теперь мы дадим некоммутативное обобщение квантовых стохастических ВП-коциклов, которое было предложено в [5]. Стохастически дифференцируемое семейство ϕ относительно квантового стационарного процесса с независимыми приращениями $\Lambda^s(t) = \Lambda(t+s) - \Lambda(s)$, порождаемое конечномерной алгеброй $\mathcal{H}$, описывается уравнением

$$d\phi_t(Y) = \phi_t \circ \lambda_\nu^\mu(Y) d\Lambda_\mu^\nu := \sum_{\mu, \nu} \phi_t(\lambda_\nu^\mu(Y)) d\Lambda_\mu^\nu \quad \forall Y \in \mathcal{B} \quad (11)$$

с начальным условием $\phi_0(Y) = Y$. Здесь $\Lambda_\mu^\nu(t)$ с $\mu \in \{-, 1, \dots, d\}$, $\nu \in \{+, 1, \dots, d\}$ суть операторы стандартного времени $\Lambda_-^\pm(t) = tI$, уничтожения $\Lambda_-^m(t)$, рождения $\Lambda_+^n(t)$ и обмена частиц $\Lambda_n^m(t) = N_n^m(t)$ ($m, n \in \{1, \dots, d\}$). Инфинитезимальные приращения $d\Lambda_\nu^\mu(t) = \Lambda_\nu^\mu(dt)$ формально определены с помощью таблицы умножения Хадсона–Партасарати (1) и $\flat$ -свойства [8]

$$d\Lambda_\mu^\beta d\Lambda_\gamma^\nu = \delta_\gamma^\beta d\Lambda_\mu^\nu, \quad \Lambda^\flat = \Lambda,$$

где δ_γ^β – обычный символ Кронекера с $\beta \in \{-, 1, \dots, d\}$, $\gamma \in \{+, 1, \dots, d\}$ и $\Lambda_{-\nu}^{\flat\mu} = \Lambda_{-\mu}^{\nu\dagger}$ при $\mu, \nu = +$ или $-$.

Линейные отображения $\lambda_\nu^\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ для $\ast$ -коциклов $\phi_t^* = \phi_t$, где $\phi_t^*(Y) = \phi_t(Y^\dagger)^\dagger$, очевидно, должны удовлетворять $\flat$ -свойству $\lambda^\flat = \lambda$, где $\lambda_{-\mu}^{\flat\nu} = \lambda_{-\nu}^{\mu*}$ и $\lambda_\nu^{\mu*}(Y) = \lambda_\nu^\mu(Y^\dagger)^\dagger$. Если коэффициенты $b_\nu^\mu = \lambda_\nu^\mu(Y)$ не зависят от t , тогда ϕ удовлетворяют свойству коциклов $\phi_s \circ \phi_r^s = \phi_{s+r}$, где ϕ_t^s – решение (11) с $\Lambda_\nu^{s\mu}(t)$ вместо $\Lambda_\nu^\mu(t)$.

Определим $(d+2) \times (d+2)$ -матрицу $\mathbf{a} = [a_\mu^\nu]$ для $\mu = +$ и $\nu = -$ следующим образом:

$$\lambda_\nu^\flat(Y) := 0 =: \lambda_-^\mu(Y) \quad \forall Y \in \mathcal{B}.$$

Тогда можно распространить суммирование в (11) на значения индексов $\mu = +$ и $\nu = -$. При таком расширении таблица умножения для $d\Lambda(\mathbf{a}) = a_\nu^\mu d\Lambda_\mu^\nu$ может быть записана в терминах обычного матричного произведения следующим образом:

$$d\Lambda(\mathbf{a})^\dagger d\Lambda(\mathbf{a}) = d\Lambda(\mathbf{a}^\flat \mathbf{a}).$$

Инволюцию $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^\flat = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}^\flat = \mathbf{a}$ можно получить с помощью псевдоэрмитова сопряжения $a_\beta^{\flat\nu} = g_{\beta\mu} a_\gamma^{\mu\dagger} g^{\gamma\nu}$ относительно тензора Минковского ($g = [g_{\mu\nu}]$ и $g^{-1} = [g^{\mu\nu}]$).

Докажем, что “пространственная” часть $\gamma = (\gamma_\nu^\mu)_{\nu \neq -}^{\mu \neq +} = \lambda + \delta$, называемая квантовым стохастическим ростком для представления $\delta: B \mapsto (B\delta_\nu^\mu)_{\nu \neq -}^{\mu \neq +}$, должна быть полностью стохастически диссипативна для ВП-цикла ϕ в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 1. Пусть уравнение (11) с $\phi_0(B) = B$ имеет ВП-решение $\phi_t, t > 0$. Тогда отображение $\gamma = (\lambda_\nu^\mu + \delta_\nu^\mu)_{\nu=+}^{\mu=-, \bullet}$ условно вполне положительно, т.е.

$$\sum_k \iota(B_k) \eta_k = 0 \Rightarrow \sum_{k,l} \langle \eta_k | \gamma(B_k^\dagger B_l) \eta_l \rangle \geq 0,$$

где $\eta \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet$, $\mathcal{H}^\bullet = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d$ и $\iota = (\iota_\nu^\mu)_{\nu=+}^{\mu=-, \bullet}$ – вырожденное представление $\iota_\nu^\mu(B) = B\delta_\nu^\mu$. В матричной форме

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma^\bullet \\ \gamma^\bullet & \gamma^\bullet \end{pmatrix}, \quad \iota(B) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\gamma = \lambda_+^-$, $\gamma^m = \lambda_+^m$, $\gamma_n = \lambda_n^-$, $\gamma_n^m = \delta_n^m + \lambda_n^m$ с $\delta_n^m(B) = B\delta_n^m$ таковы, что

$$\gamma(B^\dagger) = \gamma(B)^\dagger, \quad \gamma^n(B^\dagger) = \gamma_n(B)^\dagger, \quad \gamma_n^m(B^\dagger) = \gamma_m^n(B)^\dagger. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом $\mathcal{D}$ $\mathcal{H}$ -оболочку

$$\left\{ \sum_f \xi^f \otimes f^\otimes \mid \xi^f \in \mathcal{H}, f^\bullet \in \mathbb{C}^d \otimes L^2(\mathbb{R}_+) \right\}$$

функций $f^\otimes(\tau) = \bigotimes_{t \in \tau} f^\bullet(t)$, заданных для каждого конечного подмножества $\tau = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ с помощью тензорного произведения $f^{n_1, \dots, n_N}(\tau) = f^{n_1}(t_1) \dots f^{n_N}(t_N)$, где $f^n, n = 1, \dots, d$, – квадратично-интегрируемые комплексные функции на $\mathbb{R}_+$ и $\xi^f = 0$ для почти всех $f^\bullet = (f^n)$. Коизометричный сдвиг T_s , сплетающий $A^s(t)$ с $A(t) = T_s A^s(t) T_s^\dagger$, определен на $\mathcal{D}$ равенством $T_s(\eta \otimes f^\otimes)(\tau) = \eta \otimes f^\otimes(\tau + s)$. Условие ВП-отображения $\phi_t \rightarrow \langle \chi | \phi_t(B) \psi \rangle$ с $\chi, \psi \in \mathcal{D}$ можно записать в виде

$$\sum_{X,Z} \sum_{f,h} \langle \xi_X^f | \phi_t(f^\bullet, X^\dagger Z, h^\bullet) \xi_Z^h \rangle \geq 0, \quad (14)$$

где

$$\langle \eta | \phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet) \eta \rangle := \langle \eta \otimes f^\otimes | \phi_t(B) \eta \otimes h^\otimes \rangle e^{-\int_t^\infty f^\bullet(s)^\dagger h^\bullet(s) ds}$$

и $\xi_B^f \neq 0$ лишь для конечного числа $B_k \in \mathcal{B}$, $f_l^\bullet = (f_l^1, \dots, f_l^d)$. Если $\mathcal{D}$ -форма $\phi_t(B)$ удовлетворяет уравнению (11), то $\mathcal{H}$ -форма $\phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet) &= f^\bullet(t)^\dagger h^\bullet(t) \phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet) + \phi_t(f^\bullet, \lambda_+^-(B), h^\bullet) + \\ &+ \sum_{m=1}^d f^m(t)^* \phi_t(f^\bullet, \lambda_+^m(B), h^\bullet) + \sum_{n=1}^d h^n(t) \phi_t(f^\bullet, \lambda_n^-(B), h^\bullet) + \\ &+ \sum_{m,n=1}^d f^m(t)^* h^n(t) \phi_t(f^\bullet, \lambda_n^m(B), h^\bullet), \end{aligned}$$

где $f^\bullet(t)^\dagger h^\bullet(t) = \sum_{n=1}^d f^n(t)^* h^n(t)$. Положительная определенность (уравнение (14)) обеспечивает условную положительность

$$\sum_f \sum_B B \xi_B^f = 0 \Rightarrow \sum_{X,Z} \sum_{f,h} \langle \xi_X^f | \gamma(f^\bullet, X^\dagger Z, h^\bullet) \xi_Z^h \rangle \geq 0$$

формы $\gamma_t(f^\bullet, B, h^\bullet) = \frac{1}{t}(\phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet) - B)$ при каждом $t > 0$ и предела γ_0 при $t \downarrow 0$, совпадающего с квадратичной формой

$$\left. \frac{d}{dt} \phi_t(f^\bullet, B, h^\bullet) \right|_{t=0} = \sum_{m,n} \bar{a}^m \gamma_n^m(B) c^n + \sum_m \bar{a}^m \gamma^m(B) + \sum_n \gamma_n(B) c^n + \gamma(B),$$

где $a^\bullet = f^\bullet(0)$, $c^\bullet = h^\bullet(0)$ и γ определены в (12). Следовательно, форма

$$\begin{aligned} \sum_{X,Z} \sum_{\mu,\nu} \langle \eta_X^\mu | \gamma_\nu^\mu(X^\dagger Z) \eta_Z^\nu \rangle &:= \sum_{X,Z} \sum_{m,n} \langle \eta_X^m | \gamma_n^m(X^\dagger Z) \eta_Z^n \rangle + \\ &+ \sum_{X,Z} \left(\sum_n \langle \eta_X | \gamma_n(X^\dagger Z) \eta_Z^n \rangle + \sum_m \langle \eta_X^m | \gamma^m(X^\dagger Z) \eta_Z \rangle + \langle \eta_X | \gamma(X^\dagger Z) | \eta_Z \rangle \right) \end{aligned}$$

с $\eta = \sum_f \xi^f$, $\eta^\bullet = \sum_f \xi^f \otimes a_f^\bullet$, где $a_f^\bullet = f^\bullet(0)$, положительна, если $\sum_B B \eta_B = 0$. Компоненты η и $\eta^\bullet$ этих векторов независимы, так как для любых $\eta \in \mathcal{H}$ и $\eta^\bullet = (\eta^1, \dots, \eta^d) \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d$ существует такая функция $a^\bullet \mapsto \xi^a$ на $\mathbb{C}^d$ с конечным носителем, что $\sum_a \xi^a = \eta$, $\sum_a \xi^a \otimes a^\bullet = \eta^\bullet$. Эта функция определяется следующим образом: $\xi^a = 0$ при всех $a^\bullet \in \mathbb{C}^d$, за исключением двух случаев, а именно: $a^\bullet = 0$, для которого $\xi^a = \eta - \sum_{n=1}^d \eta^n$, и случая, когда $a^\bullet$ равно n -му базисному элементу $e_n^\bullet$ в $\mathbb{C}^d$, для которого $\xi^a = \eta^n$. Это доказывает вполне положительность матричной формы γ относительно матричного представления ι . $\square$

4. ТЕОРЕМА РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ ФОРМ-ГЕНЕРАТОРОВ

Условная положительность отображения γ относительно вырожденного представления ι , записанного в матричной форме (13), очевидно, влечет положительность диссипативной формы

$$\sum_{X,Z} \langle \eta_X | \Delta(X, Z) \eta_Z \rangle := \sum_{k,l} \sum_{\mu,\nu} \langle \eta_k^\mu | \Delta_\nu^\mu(B_k, B_l) \eta_l^\nu \rangle, \quad (15)$$

где $\eta^- = \eta = \eta^+$ и $\eta_k = \eta_{B_k}$ для любого конечного набора элементов $B_k \in \mathcal{B}$, соответствующих ненулевым $\eta_B = \eta_B \oplus \eta_B^\bullet$, $\eta_B \in \mathcal{H}$, $\eta_B^\bullet \in \mathcal{H}^\bullet$. В (15) $\Delta = (\Delta_\nu^\mu)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$ -матрица

$$\Delta(X, Z) = \gamma(X^\dagger Z) - \iota(X)^\dagger \gamma(Z) - \gamma(X)^\dagger \iota(Z) + \iota(X)^\dagger \gamma(I) \iota(Z)$$

с элементами

$$\begin{aligned} \Delta_n^m(X, Z) &= \lambda_n^m(X^\dagger Z) + X^\dagger Z \delta_n^m, \\ \Delta_n^-(X, Z) &= \lambda_n^-(X^\dagger Z) - X^\dagger \lambda_n^-(Z) = \Delta_+^n(Z, X)^\dagger, \\ \Delta_+^-(X, Z) &= \lambda_+^-(X^\dagger Z) - X^\dagger \lambda_+^-(Z) - \lambda_+^-(X^\dagger) Z + X^\dagger D Z, \end{aligned}$$

где $D = \lambda_+^-(I) \leq 0$ ($D = 0$ в случае мартингала M_t). Это означает, что матрично-значное отображение $\gamma_\bullet^m = [\gamma_n^m]$ вполне положительно и, как вытекает из следующей теоремы, по крайней мере для алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ отображения $\gamma, \gamma^m, \gamma_n$ имеют форму

$$\begin{aligned} \gamma^m(B) &= \varphi^m(B) - K_m^\dagger B, & \gamma_n(B) &= \varphi_n(B) - BK_n, \\ \gamma(B) &= \varphi(B) - K^\dagger B - BK, & \varphi(I) &\leq K + K^\dagger, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varphi = (\varphi_\nu^\mu)_{\nu \neq -}^{\mu \neq +}$ – ВП ограниченное отображение из $\mathcal{B}$ в матрицы операторов с элементами $\varphi_n^m = \gamma_n^m$, $\varphi_+^m = \varphi^m$, $\varphi_n^- = \varphi_n$, $\varphi_+^- = \varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

Для того чтобы сформулировать теорему о расширении, нам потребуется понятие $\flat$ -представления алгебры $\mathcal{B}$ в алгебре операторов $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ псевдогильбертова пространства $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\circ \oplus \mathcal{H}$ с индефинитной метрикой

$$(\xi | \xi) = 2 \operatorname{Re}(\xi^- | \xi^+) + \|\xi^\circ\|^2 + \|\xi^+\|_D^2 \quad (17)$$

на тройках $\xi = (\xi^\mu)^{\mu=-, \circ, +} \in \mathcal{E}$. Здесь $\xi^-, \xi^+ \in \mathcal{H}$, $\xi^\circ \in \mathcal{H}^\circ$, $\mathcal{H}^\circ$ – предгильбертово пространство, и $\|\eta\|_D^2 = \langle \eta | D \eta \rangle$.

Каждый оператор $A \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ задан блочной матрицей $[A_\nu^\mu]_{\nu=-, \circ, +}^{\mu=-, \circ, +}$ размера 3×3 .

Псевдоэрмитово сопряженные операторы $(\xi | A^\flat \xi) = (A \xi | \xi)$ определяются через эрмитово сопряженные $A_\nu^{\dagger \mu} = A_\mu^{\nu \dagger}$ как $A^\flat = G^{-1} A^\dagger G$ с помощью индефинитного метрического тензора $G = [G_{\mu\nu}]$ и обратного ему $G^{-1} = [G^{\mu\nu}]$, заданных следующим образом:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & I_\circ^\circ & 0 \\ I & 0 & D \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} -D & 0 & I \\ 0 & I_\circ^\circ & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где D – произвольный и $I_\circ^\circ$ – тождественный операторы в $\mathcal{H}^\circ$; $I_\bullet^\bullet = [I \delta_n^m]_{n=1, \dots, d}^{m=1, \dots, d}$ в случае $\mathcal{H}^\circ = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d = \mathcal{H}^\bullet$.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *Форма (15), определенная посредством $\flat$ -отображения λ с $\lambda_+^-(I) = D$, положительно определена:*

$$\sum_{X, Z} \langle \eta_X | \Delta(X, Z) \eta_Z \rangle \geq 0.$$

- (ii) *Существуют*

- *предгильбертово пространство $\mathcal{H}^\circ$,*
- *унитальное $\dagger$ -представление j алгебры $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H}^\circ)$,*

$$j(B^\dagger B) = j(B)^\dagger j(B), \quad j(I) = I,$$

- *отображение k со свойством*

$$k(B^\dagger B) = j(B)^\dagger k(B) + k(B^\dagger) B$$

- (j, i) -дифференцирования в классе операторов $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\circ$,
- сопряженное отображение $k^*(B) = k(B^\dagger)^\dagger$ со свойством

$$k^*(B^\dagger B) = B^\dagger k^*(B) + k^*(B^\dagger)j(B)$$

- (i, j) -дифференцирования в алгебре операторов $\mathcal{H}^\circ \rightarrow \mathcal{H}$,
- отображение $l: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, имеющее свойство коограниченности

$$l(B^\dagger B) = B^\dagger l(B) + l(B^\dagger)B + k^*(B^\dagger)k(B), \quad (18)$$

с сопряженным $l^*(B) = l(B) + [D, B]$
такие, что

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= l(B) + DB, \\ \gamma_n(B^\dagger) &= k(B)^\dagger L_n^\circ + B^\dagger L_n^- = \gamma^n(B)^\dagger, \end{aligned}$$

и

$$\gamma_n^m(B) = L_m^{\circ\dagger} j(B) L_n^\circ$$

для некоторых операторов $L_n^\circ: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\circ$, имеющих сопряженные $L_n^{\circ\dagger}$ на $\mathcal{H}^\circ$ и $L_n^- \in \mathcal{B}$.

- (iii) Существуют предгильбертово пространство $\mathcal{E}$, унитарное $\flat$ -представление $j: \mathcal{B} \rightarrow A(\mathcal{E})$ и линейный оператор $\mathbf{L}: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}$ такие, что

$$\mathbf{L}^\flat j(B) \mathbf{L} = \gamma(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

- (iv) Отображение $\gamma = \lambda + \delta$ условно ВП относительно матричного представления ι (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) $\Rightarrow$ (ii) обобщает теорему Льюиса–Эванса [2], и его доказательство подобно доказательству теоремы о расширении [20]. Пусть $\mathcal{H}^\circ$ – предгильбертово пространство колмогоровского разложения $\Delta(X, Z) = \mathbf{k}(X)^\dagger \mathbf{k}(Z)$. Оно определено как фактор-пространство $\mathcal{H}^\circ = \mathcal{K}/\mathcal{I}$ $\mathcal{H}$ -оболочки $\mathcal{K} = \{(\eta_B)_{B \in \mathcal{B}}\}$ векторов, где $\eta_B \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet$ не равно нулю только для конечного числа $B \in \mathcal{B}$, относительно ядра

$$\mathcal{I} = \left\{ (\eta_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \mathcal{K} \mid \sum_{X, Z} \langle \eta_X | \Delta(X, Z) \eta_Z \rangle = 0 \right\}$$

положительно определенной формы (15).

Определим операторы $\mathbf{k}(B)^\dagger: \mathcal{H}^\circ \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet$ на классах η° $(\eta_X)_{X \in \mathcal{B}} \in \mathcal{K}$ как сопряженные

$$\langle \mathbf{k}(B)^\dagger \eta^\circ | \eta \rangle = \sum_X \langle \eta_X | \Delta(X, B) \eta \rangle$$

к ограниченным операторам $\mathbf{k}(B): \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^\circ$, отображающим пары $\eta = \eta^\circ \oplus \eta^\bullet$ в классы эквивалентности $\eta^\circ(B) = k(B)\eta + k_\bullet(B)\eta^\bullet$ элементов $(\delta_Z(B)\eta)_{Z \in \mathcal{B}}$, где $\delta_Z(B) = 1$, если $B = Z$, и $\delta_Z(B) = 0$ в противном случае.

Определим линейный оператор $j(B)$ на $\mathcal{H}^\circ$ посредством соотношения

$$j(B) \sum_Z (k(Z)\eta + k_\bullet(Z)\eta^\bullet) = \sum_Z (k(BZ)\eta - k(B)Z\eta + k_\bullet(BZ)\eta^\bullet).$$

Очевидно, что $j(XB) = j(X)j(B)$ и $j(I) = I$, поскольку $k(I) = 0$. Кроме того, из определения диссипативной формы следует, что $j(B)^\dagger = j(B^\dagger)$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Таким образом, j – унитарное $\dagger$ -представление, $k - (j, i)$ -коцикл и $k_\bullet(B) = j(B)L_\bullet^\circ$, где $L_\bullet^\circ = k_\bullet(I)$. При этом

$$\begin{aligned} \gamma(B^\dagger B) + B^\dagger \gamma(I)B &= B^\dagger \gamma(B) + \gamma(B^\dagger)B + k(B)^\dagger k(B), \\ \gamma_\bullet^\bullet(B^\dagger B) &= k_\bullet(B)^\dagger k_\bullet(B), \\ \gamma_\bullet(B^\dagger B) - B^\dagger \gamma_\bullet(B) &= k(B)^\dagger k_\bullet(B) = \gamma^\bullet(B^\dagger B)^\dagger - \gamma^\bullet(B)^\dagger B, \end{aligned}$$

свойство (18) выполнено, $L_\bullet^\circ j(B)L_\bullet^\circ = \gamma_\bullet^\bullet(B)$ при $L_\bullet^\circ = k_\bullet^*(I) = L_\bullet^{\circ\dagger}$, и

$$\gamma_\bullet(B^\dagger) = k(B)^\dagger L_\bullet^\circ + B^\dagger L_\bullet^- = \gamma^\bullet(B)^\dagger,$$

где $L_\bullet^- = \gamma_\bullet(I)$ и $L_+^\bullet = \gamma^\bullet(I) = L_\bullet^{-\dagger}$.

Доказательство утверждения (ii) $\Rightarrow$ (iii) можно получить так же, как в [20], с помощью явного построения $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\circ \oplus \mathcal{H}$ с индефинитным метрическим тензором $G = [G_{\mu\nu}]$, заданным выше для $\mu, \nu = -, \circ, +$, и $D = \gamma(I)$.

Унитарное b -отображение $j = [j_\nu^\mu]_{\nu=-,\circ,+}^{\mu=-,\circ,+}$ алгебры $\mathcal{B}$ на $\mathcal{E}$, для которого

$$j(X^\dagger Z) = j(X)^\dagger j(Z), \quad j(I) = I$$

с $j(B)^\flat = G^{-1}j(B)^\dagger G = j(B^\dagger)$, определяется компонентами, из которых

$$j_\circ^\circ = j, \quad j_+^\circ = k, \quad j_-^\circ = k^*, \quad j_+^- = l, \quad j_-^- = i = j_+^+,$$

а все остальные равны нулю.

Линейный оператор $\mathbf{L}: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}$, где $\mathcal{H}^\bullet = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d$, можно определить через его компоненты $(L^\mu, L_\bullet^\mu)$ следующим образом:

$$L^- = 0, \quad L^\circ = 0, \quad L^+ = I, \quad L_\bullet^- = (L_n^-), \quad L_\bullet^\circ = (L_n^\circ), \quad L_\bullet^+ = 0$$

и

$$L^\flat = \begin{pmatrix} I & 0 & D \\ 0 & L_\bullet^\circ & L_+^\bullet \end{pmatrix} = L^\dagger G,$$

где $L_\bullet^\circ = L_\bullet^{\circ\dagger}$, $L_+^\bullet = L_\bullet^{-\dagger}$. Тогда

$$\mathbf{L}^\flat j \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & L_\bullet^- \\ 0 & L_\bullet^\circ \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\flat \begin{bmatrix} i & k^* & l \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_\bullet^- \\ 0 & L_\bullet^\circ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l + Di & k^* L_\bullet^\circ + i L_\bullet^- \\ L_\bullet^\circ k + L_+^\bullet i & L_\bullet^\circ j L_\bullet^\circ \end{pmatrix} = \gamma.$$

Чтобы доказать утверждение (iii) $\Rightarrow$ (iv), достаточно показать, что векторы $\xi = \sum_B j(B) \mathbf{L} \eta_B$ положительны, если $\sum_B \iota(B) \eta_B = \sum_B B \eta_B = 0$. Это немедленно следует из того, что $\xi^+ = \sum_B j(B) \mathbf{L}^+ \eta_B = \sum_B B \eta_B = 0$, т.е. индефинитная метрика (17) в этом случае положительна.

Последнее утверждение (iv) $\Rightarrow$ (i) получается как частный случай равенства $\sum_B B \eta_B = 0$ при $\eta_I = -\sum_{B \neq I} B \eta_B$. $\square$

5. СТРУКТУРА ОГРАНИЧЕННЫХ ФИЛЬТРУЮЩИХ ГЕНЕРАТОРОВ

Структура (16) форм-генераторов для ВП-коциклов на $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ есть следствие хорошо известного факта, что дифференцирования k, k^* алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таковы, что $k(B) = j(B)L - LB$, $k^*(B) = L^\dagger j(B) - BL^\dagger$. Поэтому

$$l(B) = \frac{1}{2}(L^\dagger k(B) + k^*(B)L + [B, D]) + i[H, B], \quad (19)$$

где $H^\dagger = H$ – эрмитов оператор в $\mathcal{H}$. Отображение γ , чьи компоненты собраны (как в (16)) в сумму компонент φ_ν^μ ВП-матрицы отображения $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{M}(\mathbb{C}^{d+1})$, а также левое и правое умножения, очевидно, условно ВП относительно тождественного представления ι . Как следует из теоремы о расширении, в этом случае существует семейство $L_- = L = L_+$, $L_n = L_n^\circ$, $n = 1, \dots, d$, линейных операторов $L_\nu: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\circ$, имеющих сопряженные $L_\mu^\dagger: \mathcal{H}^\circ \rightarrow \mathcal{H}$ и таких, что $\varphi_\nu^\mu(B) = L_\mu^\dagger j(B)L_\nu$.

Следующая теорема утверждает, что условия, достаточные для полной положительности коциклов, заданные уравнением (11), необходимы, если отображение γ w^* -непрерывно в алгебре операторов $\mathcal{B}$. Следовательно, уравнение (11) для ВП квантового коцикла с ограниченными стохастическими производными имеет следующую общую форму:

$$\begin{aligned} d\phi_t(B) + \phi_t(K^\dagger B + BK - L^\dagger j(B)L) dt = & \sum_{m,n=1}^d \phi_t(L_m^\dagger j(B)L_n - B\delta_n^m) d\Lambda_m^n + \\ & + \sum_{m=1}^d \phi_t(L_m^\dagger j(B)L - K_m^\dagger B) d\Lambda_m^+ + \sum_{n=1}^d \phi_t(L^\dagger j(B)L_n - BK_n) d\Lambda_-^n, \end{aligned} \quad (20)$$

обобщающую уравнение Линдблада [1] для непрерывных по норме полугрупп ВП-отображений. Квантовый стохастический субмартигал $M_t = \phi_t(I)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} M_t + \int_0^t \phi_s(D) ds = I + \int_0^t \sum_{m,n} \phi_s(L_n^\dagger L_m - \delta_m^n) d\Lambda_n^m + \\ + \int_0^t \sum_{m=1}^d \phi_s(L_m^\dagger L - K_m^\dagger) d\Lambda_m^+ + \int_0^t \sum_{n=1}^d \phi_s(L^\dagger L_n - K_n) d\Lambda_-^n. \end{aligned} \quad (21)$$

Если пространство $\mathcal{K}$ может быть вложено в прямую сумму $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d = \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}$ d -копий исходного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ так, что $j(B) = (B\delta_n^m)$, то уравнение (21) имеет решение $\phi_t(B) = F_t^\dagger B F_t$, где $F = (F_t)_{t>0}$ – неограниченный коцикл в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ – фоксовское пространство над гильбертовым пространством $\mathbb{C}^d \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ квантового шума размерности d . Коцикл F удовлетворяет уравнению

$$dF_t + K F_t dt = \sum_{i,n=1}^d (L_n^i - I\delta_n^i) F_t d\Lambda_i^n + \sum_{i=1}^d L^i F_t d\Lambda_i^+ - \sum_{n=1}^d K_n F_t d\Lambda_-^n,$$

где L_n^i и L^i – операторы в $\mathcal{H}$, для которых

$$\begin{aligned}\varphi_n^m(B) &= \sum_{i=1}^d L_m^{i\dagger} B L_n^i, & \varphi(B) &= \sum_{i=1}^d L^{i\dagger} B L^i, \\ \varphi^m(B) &= \sum_{i=1}^d L_m^{i\dagger} B L^i, & \varphi_n(B) &= \sum_{i=1}^d L^{i\dagger} B L_n^i\end{aligned}$$

с $\sum_{i=1}^d L^{i\dagger} L^i = K + K^\dagger$, если M_t – мартингал ($\leq K + K^\dagger$, если M_t – субмартингал).

ТЕОРЕМА 3. Пусть отображение γ квантового стохастического коцикла ϕ над алгеброй фон Неймана $\mathcal{B}$ w^* -непрерывно и ограничено:

$$\|\gamma\| < \infty, \quad \|\gamma_\bullet\| = \left(\sum_{n=1}^d \|\gamma_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\gamma^\bullet\| < \infty, \quad \|\gamma_\bullet^\bullet\| = \|\gamma_\bullet^\bullet(I)\| < \infty,$$

где $\|\gamma\| = \sup\{\|\gamma(B)\| : \|B\| < 1\}$, $\|\gamma_\bullet^\bullet(I)\| = \sup\{\langle \eta^\bullet, \gamma_\bullet^\bullet(I) \eta^\bullet \rangle \mid \|\eta^\bullet\| < 1\}$ и ϕ_t – ВП-коцикл, удовлетворяющий уравнению (11) с $\phi_0(B) = B$ и нормированный на субмартингал (мартингал). Тогда справедливы равенства (16) в форме

$$\gamma(B) = \varphi(B) - \iota(B)\mathbf{K} - \mathbf{K}^\dagger \iota(B), \quad (22)$$

где $\varphi = \varphi_+^-$, $\varphi^m = \varphi_+^m$, $\varphi_n = \varphi_n^-$ и $\varphi_n^m = \gamma_n^m$ образуют ограниченное ВП-отображение

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi_\bullet \\ \varphi^\bullet & \varphi_\bullet^\bullet \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K & K_\bullet \\ K^\bullet & K_\bullet^\bullet \end{pmatrix}$$

с произвольными $K^\bullet$, $K_\bullet^\bullet$ и $K + K^\dagger \geq \varphi(I)$. Уравнение (20) имеет единственное ВП-решение, удовлетворяющее условию $\phi_s(I) \leq \epsilon_s[\phi_t(I)]$ при всех $s < t$ ($\phi_s(I) = \epsilon_s[\phi_t(I)]$, если $K + K^\dagger = \varphi(I)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (22) для ВП-компоненты $\gamma_\bullet^\bullet$ было получено как часть теоремы о расширении в форме Штайншпринга $\gamma_\bullet^\bullet(B) = L_\bullet^\dagger j(B) L_\bullet = \varphi_\bullet^\bullet(B)$, где $L_\bullet = L_\bullet^\circ$. Чтобы получить (22) для ограниченных $\gamma_\bullet$ и $\gamma^\bullet$, мы должны учесть пространственную структуру $k(B) = j(B)L - LB$ ограниченного (j, i) -дифференцирования для алгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ относительно нормального представления j алгебры $\mathcal{B}$ и $i(B) = B$. Тогда

$$\gamma_\bullet(B) = k^*(B) L_\bullet^\circ + B L_\bullet^- = L^\dagger j(B) L_\bullet^\circ - B(L^\dagger L_\bullet^\circ - L_\bullet^-) = L_+^\dagger j(B) L_\bullet - B K_\bullet,$$

где $L_+ = L$, $K_\bullet = L^\dagger L_\bullet^\circ - L_\bullet^-$. Следовательно, $\gamma_\bullet(B) = \varphi_\bullet(B) - B K_\bullet$, $\gamma^\bullet(B) = \varphi^\bullet(B) - K^\bullet B = \gamma_\bullet^*(B)$, где $K^\bullet = K_\bullet^\dagger$, $\varphi^\bullet(B) = L_\bullet^\dagger j(B) L = \varphi_\bullet^*(B)$, причем отображение $\varphi(B) = (L^\mu j(B) L_\nu)_{\nu=+,\bullet}^{\mu=-,\bullet}$ с $L^- = L^\dagger$, $L^\bullet = L_\bullet^\dagger$ является ВП. Принимая во внимание формулу (19) кограницы $l(B) = \gamma(B) - DB$, обусловленную видом $[iH + \frac{1}{2}D, B]$

ограниченного дифференцирования $l(B) = \frac{1}{2}(L^\dagger k(B) + k^*(B)L)$ в $\mathcal{B}$, можно получить представление

$$\gamma(B) = \frac{1}{2}(L^\dagger k(B) + k^*(B)L + DB + BD) + i[H, B] = \varphi(B) - BK - K^\dagger B,$$

где $\varphi(B) = L^\dagger j(B)L$ и $K = iH + \frac{1}{2}(L^\dagger L - D)$.

Существование и единственность решений $\phi_t(B)$ квантовых стохастических уравнений (11) с ограниченными генераторами $\lambda_\nu^\mu(B) = \gamma_\nu^\mu(B) - B\delta_\nu^\mu$ и начальными условиями $\phi_0(B) = B$ в алгебре операторов $\mathcal{B}$ были доказаны в [3]. Положительность решений в случае уравнения (20), соответствующая условно положительной функции (22), может быть доказана с помощью итераций

$$\phi_t^{(n+1)}(B) = V_t^\dagger B V_t + \int_0^t \phi_s^{(n)}(\beta_\nu^\mu(V_t^\dagger(s) B V_t(s))) d\Lambda_\mu^\nu, \quad \phi_t^{(0)}(B) = B$$

квантового стохастического интегрального уравнения

$$\phi_t(B) = V_t^\dagger B V_t + \int_0^t \phi_s(\beta_\nu^\mu(V_t^\dagger(s) B V_t(s))) d\Lambda_\mu^\nu \quad (23)$$

с $\beta_\nu^\mu(B) = \varphi_\nu^\mu(B) - B\delta_\nu^\mu$. Здесь $V_t = V_t(s)V_s$ с $V_t(s) = T_s^\dagger V_{t-s} T_s$ есть векторный коцикл, являющийся решением квантового стохастического дифференциального уравнения

$$dV_t + K V_t dt + \sum_{m=1}^d K_m V_t d\Lambda_-^m = 0 \quad (24)$$

с начальным условием $V_0 = I$ в $\mathcal{H}$. Эквивалентность уравнений (20) и (23), (24) обнаруживается при непосредственном дифференцировании (23). Чтобы доказать ВП-решения, напомним соответствующие итерации

$$\phi_t^{(n+1)}(f^\bullet, B, h^\bullet) = V_t^\dagger B V_t + \int_0^t \mathbf{f}(s)^\dagger \phi_s^{(n)}(f^\bullet, \varphi(V_t^\dagger(s) B V_t(s)), h^\bullet) \mathbf{h}(s) ds$$

обыкновенного интегрального уравнения для операторнозначных ядер когерентных векторов, определенных в (14). Здесь $\mathbf{g}(s) = 1 \oplus g^\bullet(s)$ таково, что

$$\begin{aligned} \sum_{X,Z} \sum_{f,h} \langle \xi_X^f | \phi_t(f^\bullet, X^\dagger Z, h^\bullet) \xi_Z^h \rangle &= \sum_{X,Z} \langle X V_t \eta_X | Z V_t \eta_Z \rangle + \\ &+ \int_0^t \sum_{X,Z} \sum_{f,h} \langle \eta_X^f(s) | \phi_s(f^\bullet, \varphi(X^\dagger Z), h^\bullet) \eta_Z^h(s) \rangle, \end{aligned}$$

где $\eta_B = \sum_g \xi_B^g$, $\eta_B^g(s) = \sum_{g(s)} \xi_B^g \otimes \mathbf{g}(s)$. Теперь ВП-свойство для $\phi_t^{(n)}$ немедленно следует из ВП-свойства $\phi_s^{(n-1)}$, $s < t$, и φ . Прямая итерация этого интегрального соотношения с начальным ВП-условием $\phi_t^{(0)}(B) = B$ дает в пределе $n \rightarrow \infty$ минимальное ВП-решение в форме суммы n -кратных ВП-интегралов по интервалу $[0, t]$. $\square$

Список литературы

- [1] *G. Lindblad.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119–130.
- [2] *D. E. Evans, J. T. Lewis.* Commun. Dublin Institute for Advanced Studies. 1977. V. 24. P. 104.
- [3] *В. П. Белавкин.* УМН. 1992. Т. 47. Вып. 1. С. 47–106.
- [4] *R. S. Hudson, K. R. Parthasarathy.* Commun. Math. Phys. 1984. V. 93. P. 301–323.
- [5] *V. P. Belavkin.* Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 523–528.
- [6] *V. P. Belavkin.* Nondemolition Measurements and Nonlinear Filtering of Quantum Stochastic Processes. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 121. Springer-Verlag, 1988. P. 245–266.
- [7] *V. P. Belavkin.* Nondemolition Calculus and Nonlinear Filtering in Quantum Systems. In: Stochastic Methods in Mathematics and Physics. World Scientific, 1989. P. 310–324.
- [8] *V. P. Belavkin.* J. Multivariate Analysis. 1992. V. 42. № 2. P. 171–201.
- [9] *N. Gisin.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1657–1660.
- [10] *L. Diosi.* Phys. Rev. 1988. V. A40. P. 1165–1174.
- [11] *A. Barchielli, V. P. Belavkin.* J. Phys. A: Math. Gen. 1991. V. 24. P. 1495–1514.
- [12] *V. P. Belavkin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 611–635.
- [13] *H. Carmichael.* Open Systems in Quantum Optics. In: Lecture Notes in Physics. V. 18. Springer-Verlag, 1993.
- [14] *G. Milburn.* Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 744.
- [15] *P. Pearle.* Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 235.
- [16] *G. C. Ghirardi, P. Pearle, A. Rimini.* Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 78–89.
- [17] *V. P. Belavkin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 2930–2934.
- [18] *V. P. Belavkin.* J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. P. L1109–1114.
- [19] *M. J. Collett, C. W. Gardiner.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3761–3774.
- [20] *В. П. Белавкин.* Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 6. С. 135–137.

Перевод с английского А. И. Кириллова

Поступила в редакцию 22.IX.1995 г.,
переработанный вариант 23.VII.1996 г.

V. P. Belavkin
ON THE GENERATORS OF QUANTUM
STOCHASTIC EVOLUTION EQUATIONS

A characterisation of the stochastic bounded generators of quantum irreversible wave equations is given. This suggests the general form of quantum stochastic evolution with respect to the Poisson (jumps), Wiener (diffusion) or general Quantum Noise. The corresponding irreversible Heisenberg evolution in terms of stochastic completely positive maps is found and the general form of the stochastic completely dissipative operator equation is discovered.