Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, С. А. Фролов, Л. О. Чехов, Квантовые динамические R -матрицы для эллиптической модели Руджинарса–Шнайдера, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 182–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1001>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:46:33

Г. Э. Арутюнов*, С. А. Фролов*, Л. О. Чехов*
КВАНТОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ
 R -МАТРИЦЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ РУДЖИНАРСА–ШНАЙДЕРА¹⁾

Показано, что классическая L -операторная алгебра эллиптической модели Руджинарса–Шнайдера может быть реализована как подалгебра алгебры функций на кокасательном расслоении к центрально-расширенной двумерной алгебре токов. Эта алгебра задается двумя динамическими r - и $\bar{r}$ -матрицами, удовлетворяющими замкнутой системе уравнений. Соответствующие квантовые R - и $\bar{R}$ -матрицы являются решениями квантовых аналогов этих уравнений. Построена квантовая L -операторная алгебра, и показано, что система уравнений на R - и $\bar{R}$ -матрицы возникает как условие согласованности для этой алгебры. Оказывается, что R -матрица связана преобразованием твиста с эллиптической R^F -матрицей Фельдера, при этом роль твиста играет матрица $\bar{R}$. Найдено простейшее нетривиальное представление квантовой L -операторной алгебры, отвечающее эллиптической модели Руджинарса–Шнайдера. Установлена связь алгебры квантового L -оператора с фундаментальным соотношением $RLL = LLR$ с эллиптической R -матрицей Белавина. Одним из результатов нашего подхода является новое N -параметрическое эллиптическое решение классического уравнения Янга–Бакстера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникновение классических динамических r -матриц [1, 2] в теории многочастичных интегрируемых систем ставит интересную задачу о квантовании этих матриц.

На сегодняшний день классические динамические r -матрицы известны для рациональных, тригонометрических [2, 3] и эллиптических [4, 5] систем Калоджеро–Мозера (КМ), равно как и для их релятивистских обобщений – рациональных, тригонометрических [6, 7] и эллиптических [8, 9] систем Руджинарса–Шнайдера (РШ) [10]. Общепризнано, что динамические системы типа модели Калоджеро могут быть естественным образом получены исходя из процедуры гамильтоновой редукции [11, 12]. Более того, сама процедура редукции представляет эффективный метод вычисления соответствующих динамических r -матриц [3, 13].

---

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия; arut@class.mi.ras.ru, frolov@class.mi.ras.ru, chekhov@class.mi.ras.ru

Поскольку динамические r -матрицы явно зависят от фазовых переменных, они не удовлетворяют никакому замкнутому уравнению типа уравнения Янга–Бакстера, что сильно усложняет задачу их квантования. В работе [14] было проквантовано спинное обобщение модели Калоджеро–Сазерленда, при этом авторы использовали частное решение [15] уравнения Жерве–Невье–Фельдера [16, 15], а в последующей работе [17] полученное решение было интерпретировано в терминах квазихопфовых алгебр. Хотя указанная система не является интегрируемой, представление нулевого веса квантовой L -операторной алгебры допускает построение нужного числа коммутирующих интегралов движения. Однако важно найти такую квантовую L -операторную алгебру для систем типа Калоджеро, которая обладала бы достаточно большой абелевой подалгеброй.

В недавней работе [18] была предложена алгебраическая схема квантования рациональной модели РШ в R -матричном формализме. Двое из авторов настоящей работы (Г.Э.А. и С.А.Ф.) предложили специальную параметризацию кокасательного расслоения над группой $GL(N, \mathbb{C})$. В новых переменных стандартная симплектическая структура описывается классической (фробениусовой) r -матрицей и новой динамической $\bar{r}$ -матрицей. Классический L -оператор оказывается при этом специальной матрично-значной функцией на кокасательном расслоении. Алгебра скобок Пуассона для L непосредственно следует из симплектической структуры кокасательного расслоения и совпадает с L -операторной алгеброй рациональной модели РШ. Именно по этой причине мы назвали функцию L L -оператором. Квантуя пуассонову структуру для L , мы нашли квантовую L -операторную алгебру и построили ее частное представление, отвечающее рациональной системе РШ. Эта квантовая алгебра обладает замечательными свойствами, в частности, в ней можно выделить семейство из N взаимно коммутирующих операторов прямо на алгебраическом уровне.

Хорошо известно, что эллиптическая модель РШ является наиболее общей среди систем типа КМ и РШ. В данной работе мы предлагаем подход, позволяющий включить эллиптическую модель РШ в вышеизложенную схему. Напомним, что классическая L -операторная алгебра эллиптической модели РШ может быть получена с помощью пуассоновой [19] или гамильтоновой редукции [20]. Напомним, что редукция предполагает наличие исходного “большого” фазового пространства, на котором действует некоторая группа симметрии. Факторизуя свободную динамику по действию этой группы, мы получаем нетривиальную динамическую систему на редуцированном пространстве. В случае пуассоновой редукции в качестве исходного фазового пространства используется аффинный дубль Гейзенберга, а в случае гамильтоновой – кокасательное расслоение над центрально-расширенной группой токов в двумерном пространстве. Таким образом, в настоящей работе мы будем использовать редукцию к эллиптической модели РШ, выбирая в качестве исходного фазового пространства кокасательное расслоение $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$ над центрально-расширенной группой $\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$ двойных петель. В действительности применение подхода [18] в данном случае требует существенной модификации, так как мы имеем дело с бесконечномерным фазовым пространством, и, следовательно, для корректного описания пуассоновой структуры на пространстве $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$ в нужной параметризации мы должны ввести промежуточную регуляризацию.

Вкратце опишем содержание статьи и представленные результаты. Второй раздел

мы начинаем с описания пуассоновой структуры на пространстве $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$, зависящей от двух комплексных параметров k и α . Затем мы вводим специальную параметризацию пространства $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$. В новых переменных пуассонова структура плохо определена из-за наличия сингулярностей. Для того чтобы справиться с этой проблемой, мы вводим промежуточную регуляризацию. Снимая эту регуляризацию, мы обнаруживаем, что только при $\alpha = 1/N$ пуассонова структура, которая в итоге получается, будет хорошо определена. Величина $\alpha = 1/N$ в действительности отвечает случаю, когда центрально расширяется только подгруппа $SL(N)(z, \bar{z})$. Соответствующая пуассонова структура описывается двумя матрицами $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$, зависящими от N динамических переменных q_i . Из тождества Якоби (см. приложение А) следует, что $\mathbf{g}$ является N -параметрическим эллиптическим решением классического уравнения Янга–Бакстера. Интересно отметить, что мы можем извлечь основные эллиптические тождества (см. приложение Б) прямо из условия выполнения этого уравнения для $\mathbf{g}$. По-видимому, матрица $\mathbf{g}$ имеет отношение к специальной фробениусовой подгруппе группы $GL(N)(z, \bar{z})$, поскольку такая связь имеет место в конечномерном случае, см. [18]. Из тождеств Якоби также следует замкнутая система уравнений на матрицы $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$.

Мы определяем специальную матричнозначную функцию L на пространстве $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$. Именно эту функцию мы и будем называть “ L -оператор”, поскольку, как будет показано, пуассонова алгебра для L , следующая из симплектической структуры на $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$, в точности совпадает с алгеброй эллиптической модели РШ [9, 20]. Таким образом, классическая L -операторная алгебра может быть реализована как подалгебра алгебры функций на пространстве $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$. Оказывается, что L -оператор, рассматриваемый как функция на $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$, допускает факторизацию вида $L = WP$, где $p_i = \log P_i$ суть переменные, которые канонически сопряжены переменным q_i , а W лежит в некоторой выделенной подгруппе группы $GL(N)(z, \bar{z})$. Скобка Пуассона величин матричных элементов W задается матрицей $\mathbf{g}$ и совпадает со скобкой Складина, определяющей структуру группы Пуассона–Ли.

Хотя квантовые аналоги уравнений на матрицы $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$ могут быть легко найдены, оказывается, что найти соответствующие квантовые $\mathbf{R}$ - и $\bar{\mathbf{R}}$ -матрицы довольно трудно. Все дело в том, что матрицы $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$ обладают весьма сложной структурой: $\mathbf{g} = r - s \otimes I + I \otimes s$ и $\bar{\mathbf{g}} = \bar{r} - s \otimes I$, в которой существенную роль играет еще одна матрица s . Однако можно заметить, что классическая L -операторная алгебра не зависит от s и, более того, матрицы r и $\bar{r}$ также удовлетворяют замкнутой системе уравнений. Мы показываем, что эта система возникает как условие согласованности для новой пуассоновой алгебры. Эта алгебра содержит как пуассонову алгебру $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$, так и классическую L -операторную алгебру в качестве своих подалгебр. В третьем разделе, используя это ключевое наблюдение, мы переходим к квантованию.

Соответствующие квантовые R - и $\bar{R}$ -матрицы находятся как решения квантовых аналогов уравнений для r и $\bar{r}$. В частности, R -матрица будет удовлетворять новому соотношению треугольников, которое отличается от стандартного квантового уравнения Янга–Бакстера наличием некоторого специального сдвига спектральных параметров. Эллиптическая матрица Фельдера R^F также возникает естественным образом в нашей конструкции. Оказывается, что R -матрица связана преобразованием эквивалентности (твистом) с R^F -матрицей, причем роль твиста играет матрица $\bar{R}$.

Затем мы выводим новую квадратичную алгебру, которой удовлетворяет “квантовый” L -оператор. Эта алгебра описывается в терминах квантовых динамических R -матриц R , R^F и $\bar{R}$:

$$R_{12}L_1\bar{R}_{21}L_2 = L_2\bar{R}_{12}L_1R_{12}^F.$$

Мы показываем, что система уравнений для R -, R^F - и $\bar{R}$ -матриц возникает как условие согласованности для этой алгебры. Мы находим простейшее представление алгебры квантового L -оператора, соответствующее эллиптической модели РШ. Отметим также, что после простого канонического преобразования квантовый L -оператор совпадает в существенном с классическим L -оператором, найденным в [10].

Квантовые интегралы движения эллиптической модели РШ были построены в [10]. В работе [21] было показано, что любой оператор из семейства коммутирующих операторов модели Руджинарса может быть реализован как след соответствующей трансфер-матрицы для специального $\hat{L}$ -оператора, который удовлетворяет соотношениям $R\hat{L}\hat{L} = \hat{L}\hat{L}R$ с эллиптической R -матрицей Белавина [22]. Наш L -оператор калибровочно-эквивалентен оператору $\hat{L}$. Из этого наблюдения следует, что детерминантная формула для $\hat{L}$, являющаяся производящей функцией указанного коммутирующего семейства [21], справедлива также и для L . Мы устанавливаем, что любое представление нашей L -операторной алгебры калибровочно-эквивалентно представлению соотношений $R\hat{L}\hat{L} = \hat{L}\hat{L}R$.

В заключении мы обсуждаем некоторые нерешенные проблемы.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ L -ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Пуассонова структура пространства $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$. Обозначим через T_τ тор, снабженный стандартной комплексной структурой с периодами 1 и τ . Пусть G – группа гладких отображений из T_τ в группу $GL(N, \mathbf{C})$. Тогда $g \in G$ является двоякопериодической матричнозначной функцией $g(z, \bar{z})$. Дуальное пространство к алгебре Ли группы G есть пространство двоякопериодических функций $A(z, \bar{z})$ со значениями в $\text{Mat}(N, \mathbf{C})$. В дальнейшем мы будем часто использовать сокращенную запись $g(z, \bar{z}) = g(z)$ и $A(z, \bar{z}) = A(z)$. Группа G допускает центральные расширения $\widehat{G}$ (см. [23]). Пуассонова структура на пространстве $T^*\widehat{G}$ выглядит следующим образом:

$$\{A_1(z), A_2(w)\} = \frac{1}{2}[C, A_1(z) - A_2(w)]\delta(z - w) - k(C - \alpha I)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\delta(z - w), \quad (2.1)$$

$$\{g_1(z), g_2(w)\} = 0, \quad (2.2)$$

$$\{A_1(z), g_2(w)\} = g_2(w)C\delta(z - w), \quad (2.3)$$

где k , α – фиксированные центральные заряды, а $\delta(z)$ – двумерная δ -функция: $\int_{T_\tau} d^2z f(z)\delta(z) = f(0)$, $d^2z = d\bar{z} \wedge dz$. Мы используем стандартные тензорные обозначения; C – оператор перестановки.

Рассмотрим теперь следующее гамильтоново действие группы G на пространстве $T^*\widehat{G}$:

$$\begin{aligned} A(z) &\rightarrow T^{-1}(z)A(z)T(z) + kT^{-1}(z)\bar{\partial}T(z), \\ g(z) &\rightarrow T^{-1}(z)g(z)T(z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда элементы $A(z)$ — гладкие функции. Тогда элемент $A(z)$ общего вида может быть диагонализирован с помощью следующего преобразования (2.4) (см. [24]):

$$A(z) = T(z)DT^{-1}(z) - k\bar{\partial}T(z)T^{-1}(z). \quad (2.5)$$

Здесь D — постоянная диагональная матрица с матричными элементами D_i , $D_i \neq D_j$, а функция $T(z)$ двоякопериодична. Матрица D задана однозначно с точностью до действия эллиптической группы Вейля. Можно фиксировать D , выбрав фундаментальную камеру Вейля.

Матрица $T(z)$ в уравнении (2.5) задана неоднозначно. Любой элемент $\tilde{T}(z, \bar{z}) = T(z, \bar{z})h(z)$, в котором диагональная матрица $h(z)$ является целой функцией переменной z , также удовлетворяет уравнению (2.5). Накладывая на $\tilde{T}(z, \bar{z})$ условие двоякопериодичности, найдем, что $h(z)$ является постоянной матрицей. Мы устраним эту неоднозначность, наложив условие

$$T(\varepsilon)e = e, \quad (2.6)$$

где вектор e таков, что $e_i = 1 \forall i$, и ε — произвольная точка тора T_τ . В дальнейшем мы обозначаем матрицу $T(z)$, удовлетворяющую уравнениям (2.5) и (2.6), через $T^\varepsilon(z)$. Такие матрицы очевидно образуют группу.

Теперь попробуем переписать пуассонову структуру (2.1) в терминах переменных T и D . Так как D_i суть G -инвариантные функции, они лежат в центре (2.1), а потому нам достаточно вычислить скобку $\{T^\varepsilon(z), T^\varepsilon(w)\}$. Однако прямое вычисление показывает, что сама по себе эта скобка плохо определена. Поэтому мы начнем с вычисления другой скобки $\{T^\varepsilon(z), T^\eta(w)\}$, где $T^\varepsilon(z)$ и $T^\eta(w)$ удовлетворяют (2.6) в различных точках ε и η :

$$\{T_{ij}^\varepsilon(z), T_{kl}^\eta(w)\} = \sum_{mnp} \int d^2z' d^2w' \frac{\delta T_{ij}^\varepsilon(z)}{\delta A_{mn}(z')} \frac{\delta T_{kl}^\eta(w)}{\delta A_{ps}(w')} \{A_{mn}(z'), A_{ps}(w')\}. \quad (2.7)$$

Для вычисления функциональной производной $\frac{\delta T_{ij}^\varepsilon(z)}{\delta A_{mn}(z')}$ проварьируем уравнение (2.5):

$$X(z) = t(z)D - Dt(z) - k\bar{\partial}t(z) + d, \quad (2.8)$$

где $X(z) = T^{-1}(z)\delta A(z)T(z)$, $t(z) = T^{-1}(z)\delta T(z)$ и $d = \delta D$.

Из уравнения (2.8) немедленно получаем, что

$$\frac{\delta D_i}{\delta A_{kl}(z)} = \frac{1}{(\tau - \bar{\tau})} T_{ik}^{-1\varepsilon}(z) T_{li}^\varepsilon(z). \quad (2.9)$$

Зададим $\Phi(z, s)$ — функцию двух комплексных переменных:

$$\Phi(z, s) = \frac{\sigma(z+s)}{\sigma(z)\sigma(s)} e^{-2\zeta(\frac{1}{2})zs} e^{2\pi i s \frac{z-\bar{z}}{\tau-\bar{\tau}}}. \quad (2.10)$$

Здесь $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ суть σ - и ζ -функции Вейерштрасса с периодами 1 и τ . Функция $\Phi(z, s)$ является единственным двоякопериодическим решением следующего уравнения:

$$\bar{\partial}\Phi(z, s) + \frac{2\pi i s}{\tau - \bar{\tau}}\Phi(z, s) = 2\pi i \delta(z). \quad (2.11)$$

Нам также удобно определить функцию $\Phi(z, 0)$:

$$\Phi(z, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\Phi(z, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \zeta(z) - 2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)z + 2\pi i \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}.$$

Эта функция является решением уравнения

$$\bar{\partial}\Phi(z, 0) = 2\pi i \delta(z) - \frac{2\pi i}{\tau - \bar{\tau}}.$$

Зададим также величины $q_{ij} \equiv q_i - q_j$, где $q_i = \frac{\tau - \bar{\tau}}{2\pi i k} D_i$.

С использованием этих функций решение уравнения (2.8), удовлетворяющее дополнительному условию $t(\varepsilon)e = 0$, имеет следующий вид (см. [20]):

$$t(z) = \kappa \sum_{i,j} \int d^2 w (\Phi(\varepsilon - w, q_{ij}) X_{ij}(w) E_{ii} - \Phi(z - w, q_{ij}) X_{ij}(w) E_{ij}). \quad (2.12)$$

Здесь и в дальнейшем мы обозначаем $\frac{1}{2\pi i k}$ через κ .

Варьируя уравнение (2.12) относительно $A_{mn}(w)$, можно получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_{ij}^\varepsilon(z)}{\delta A_{mn}(w)} = & \kappa \left(\sum_k \Phi(\varepsilon - w, q_{jk}) T_{ij}^\varepsilon(z) T_{jm}^{-1\varepsilon}(w) T_{nk}^\varepsilon(w) - \right. \\ & \left. - \sum_k \Phi(z - w, q_{kj}) T_{ik}^\varepsilon(z) T_{km}^{-1\varepsilon}(w) T_{nj}^\varepsilon(w) \right). \end{aligned}$$

Для вычисления скобки (2.7) нам потребуется следующее соотношение между $T^\varepsilon(z)$ и $T^\eta(z)$:

$$T^\varepsilon(z) = T^\eta(z) H^{\eta\varepsilon}, \quad (2.13)$$

где $H^{\eta\varepsilon}$ — постоянная диагональная матрица.

Непосредственные вычисления приводят к следующему результату:

$$\frac{1}{\kappa} \{T_1^\varepsilon(z), T_2^\eta(w)\} = T_1^\varepsilon(z) T_2^\eta(w) (H_1^{\varepsilon\eta} H_2^{\eta\varepsilon} r_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w) - \alpha f^{\varepsilon\eta}(z, w)), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} r_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w) = & \sum_{ij} \Phi(\varepsilon - \eta, q_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z - w, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji} - \\ & - \sum_{ij} \Phi(z - \eta, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(w - \varepsilon, q_{ij}) E_{jj} \otimes E_{ij} \end{aligned} \quad (2.15)$$

и

$$f^{\varepsilon\eta}(z, w) = \Phi(\varepsilon - \eta, 0) + \Phi(\omega - \varepsilon, 0) + \Phi(z - \omega, 0) - \Phi(z - \eta, 0). \quad (2.16)$$

Скобка (2.14) имеет r -матричную форму, причем сама r -матрица зависит не только от координат q_i , но и от дополнительных переменных H .

Предел $\eta \rightarrow \varepsilon$ сингулярен. По этой причине переменная $T(z)$ не годится для описания пуассоновой структуры (2.1). Тем не менее мы можем использовать произвол, состоящий в возможности умножать $T(z)$ на произвольный функционал от A . Таким образом, мы вводим новую переменную

$$\mathbf{T}^\varepsilon(z) = T^\varepsilon(z)(\det T^\varepsilon(\varepsilon))^\beta. \quad (2.17)$$

Нормировка на $\det T^\varepsilon(\varepsilon)$ в определении $\mathbf{T}^\varepsilon(z)$ сохраняет групповую структуру для новых переменных.

С использованием пуассоновой скобки (2.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \{ \mathbf{T}_1^\varepsilon(z), \mathbf{T}_2^\eta(w) \} = & \mathbf{T}_1^\varepsilon(z) \mathbf{T}_2^\eta(w) \left(H_1^{\varepsilon\eta} H_2^{\eta\varepsilon} r_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w) - \alpha f^{\varepsilon\eta}(z, w) + \right. \\ & + \beta I \otimes \text{tr}_3 H_3^{\varepsilon\eta} H_2^{\eta\varepsilon} r_{32}^{\varepsilon\eta}(\varepsilon, w) + \beta \text{tr}_3 H_1^{\varepsilon\eta} H_3^{\eta\varepsilon} r_{13}^{\varepsilon\eta}(z, \eta) \otimes I + \\ & \left. + \beta^2 \text{tr}_{34} H_3^{\varepsilon\eta} H_4^{\eta\varepsilon} r_{34}^{\varepsilon\eta}(\varepsilon, \eta) I \otimes I \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

поскольку $f(\varepsilon, w) = f(z, \eta) = 0$.

Теперь можно перейти к рассмотрению предела $\eta \rightarrow \varepsilon$ ²⁾. Для этого учтем следующее асимптотическое поведение $H^{\varepsilon\eta}$ при $\eta \rightarrow \varepsilon$: $H^{\varepsilon\eta} = 1 + (\varepsilon - \eta)h + o(\varepsilon - \eta)$, где h — постоянная диагональная матрица, являющаяся функционалом от A . Оказывается, существует единственный выбор постоянных α и β , а именно: $\alpha = 1/N$, $\beta = -1/N$, при котором все сингулярности сокращаются и матрица h не дает вклада. В пределе $\eta \rightarrow \varepsilon = 0$ ³⁾ для указанных значений α и β мы получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\kappa} \{ \mathbf{T}_1(z), \mathbf{T}_2(w) \} = \mathbf{T}_1(z) \mathbf{T}_2(w) \mathbf{r}_{12}(z, w). \quad (2.19)$$

Здесь предельная $\mathbf{r}$ -матрица имеет вид

$$\mathbf{r}_{12}(z, w) = r_{12}(z, w) - s(z) \otimes I + I \otimes s(w) - \frac{1}{N} \Phi(z - w, 0) I \otimes I, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} r(z, w) = & \sum_{i \neq j} \Phi(q_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z - w, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji} - \\ & - \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(w, q_{ij}) E_{jj} \otimes E_{ij}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$s(z) = \frac{1}{N} \sum_{ij} (\Phi(q_{ij}) E_{ii} - \Phi(z, q_{ij}) E_{ij}), \quad (2.22)$$

²⁾Без потери общности мы предполагаем, что ε и η вещественны.

³⁾Зависимость от ε легко восстанавливается при сдвиге на ε обеих переменных z и w .

где функция $\Phi(q_{ij})$ обозначает конечную часть $\Phi(\varepsilon, q_{ij})$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\Phi(q_{ij}) &= \zeta(q_{ij}) - 2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)q_{ij}, \quad i \neq j, \\ \Phi(q_{ii}) &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что обе матрицы $\mathbf{r}$ и r кососимметричны: $\mathbf{r}_{12}(z, w) = -\mathbf{r}_{21}(w, z)$.

Приведенная конструкция позволяет предположить, что полученная $\mathbf{r}$ -матрица удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера

$$[[\mathbf{r}, \mathbf{r}]] \equiv [\mathbf{r}_{12}(z_1, z_2), \mathbf{r}_{13}(z_1, z_3) + \mathbf{r}_{23}(z_2, z_3)] + [\mathbf{r}_{13}(z_1, z_3), \mathbf{r}_{23}(z_2, z_3)] = 0. \quad (2.23)$$

Это соотношение может быть проверено как непосредственным вычислением, так и исследованием предельного случая тождества Якоби для скобки (2.18). Последнее рассмотрение приведено в приложении А. Тем самым $\mathbf{r}$ -матрица (2.20) является N -параметрическим решением классического уравнения Янга–Бакстера.

Отметим, что, как и следовало ожидать, условие $\det \mathbf{T}(0) = 1$ совместно со скобкой (2.19), поскольку $\det \mathbf{T}(z)$ является центральным элементом алгебры (2.19).

Единственно возможный выбор $\alpha = 1/N$ отвечает случаю, когда центрально-расширенной является только $sl(N)(z, \bar{z})$ -подалгебра. Выраженные в терминах $\mathbf{T}(z)$ ($\beta = -1/N$) граничные условия принимают следующий вид: $\mathbf{T}(0)e = \lambda e$ и $\det \mathbf{T}(0) = 1$. Можно также проверить, что поле $A(z)$, определенное условием (2.5), после замены $T(z)$ на $\mathbf{T}(z)$ удовлетворяет пуассоновой алгебре (2.1).

Следующий шаг состоит в рассмотрении специальной параметризации поля $g(z)$. Для этого введем новое (дуальное к исходному) поле $\tilde{A}(z)$:

$$\tilde{A} = gAg^{-1} - k\bar{\partial}gg^{-1} + \frac{k}{N} \text{tr} \bar{\partial}gg^{-1}. \quad (2.24)$$

Легко убедиться, что $\tilde{A}(z)$ имеет нулевую скобку Пуассона с $A(w)$ и удовлетворяет пуассоновой алгебре

$$\begin{aligned}\{\tilde{A}_1(z), \tilde{A}_2(w)\} &= -\frac{1}{2}[C, \tilde{A}_1(z) - \tilde{A}_2(w)]\delta(z-w) + k\left(C - \frac{1}{N}I\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\delta(z-w), \\ \{\tilde{A}_1(z), g_2(w)\} &= Cg_2(w)\delta(z-w).\end{aligned} \quad (2.25)$$

Теперь мы факторизуем поле $\tilde{A}(z)$ так же, как это было сделано для $A(z)$,

$$\tilde{A}(z) = \mathbf{U}(z)D\mathbf{U}^{-1}(z) - k\bar{\partial}\mathbf{U}(z)\mathbf{U}^{-1}(z), \quad (2.26)$$

где функция $\mathbf{U}(z)$ удовлетворяет граничным условиям $\mathbf{U}(0)e = \lambda e$ и $\det \mathbf{U}(0) = 1$. Ясно, что $\mathbf{U}(z)$ коммутирует относительно скобки Пуассона с $\mathbf{T}(w)$ и удовлетворяет пуассоновой алгебре

$$\frac{1}{\kappa}\{\mathbf{U}_1(z), \mathbf{U}_2(w)\} = -\mathbf{U}_1(z)\mathbf{U}_2(w)\mathbf{r}_{12}(z, w). \quad (2.27)$$

Из формул (2.24) и (2.26) также следует представление для поля g :

$$g(z) = (\det g(z))^{\frac{1}{N}} \mathbf{U}(z) \mathbf{P} \mathbf{T}^{-1}(z), \quad (2.28)$$

в котором $\mathbf{P}$ – постоянная диагональная матрица.

Вычисляя детерминанты от обеих частей уравнения (2.28), получим

$$\det \mathbf{P} = \det(\mathbf{T}(z)/\mathbf{U}(z)).$$

Поскольку левая часть не зависит от z , а $\det \mathbf{T}(0) = \det \mathbf{U}(0) = 1$, мы получаем, что $\det \mathbf{P} = 1$ и $\det \mathbf{T}(z) = \det \mathbf{U}(z)$.

Вычисляя скобки Пуассона матричных элементов матриц $\mathbf{P}$ и $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_N)$ с использованием той же техники, что и выше, получим

$$\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\kappa} \{Q_1, \mathbf{P}_2\} = \mathbf{P}_2 \left(\sum_{ii} E_{ii} \otimes E_{ii} - \frac{1}{N} I \otimes I \right). \quad (2.30)$$

В действительности это означает, что $\log \mathbf{P}_i = p_i - \frac{1}{N} \sum_i p_i$, где переменные p_i канонически сопряжены q_i .

Оставшиеся скобки Пуассона переменной $\mathbf{P}$ с полями $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$ имеют следующий вид:

$$\frac{1}{\kappa} \{\mathbf{T}_1(z), \mathbf{P}_2\} = \mathbf{T}_1(z) \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{r}}_{12}(z), \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\kappa} \{\mathbf{U}_1(z), \mathbf{P}_2\} = \mathbf{U}_1(z) \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{r}}_{12}(z). \quad (2.32)$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{r}}_{12}(z) = \bar{r}_{12}(z) - s(z) \otimes I - \frac{1}{N} I \otimes \sum_{ij} \Phi(q_{ij}) E_{jj}, \quad (2.33)$$

где мы определили $\bar{r}$ -матрицу:

$$\bar{r}_{12}(z) = \sum_{ij} \Phi(q_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} - \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj}. \quad (2.34)$$

Завершая описание классической пуассоновой структуры кокасательного расслоения, приведем скобку Пуассона $\det g$ с оставшимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \{Q, \det g(w)\} &= \det g(w), \quad \{\mathbf{P}, \det g(w)\} = 0, \\ \frac{1}{\kappa} \{\mathbf{T}(z), \det g(w)\} &= -\det g(w) \mathbf{T}(z) (\Phi(z - w, 0) + \Phi(w, 0)), \\ \frac{1}{\kappa} \{\mathbf{U}(z), \det g(w)\} &= -\det g(w) \mathbf{U}(z) (\Phi(z - w, 0) + \Phi(w, 0)). \end{aligned}$$

Напомним, что тождество Якоби для скобки (2.19) сводится к классическому уравнению Янга–Бакстера для $\mathbf{g}$ -матрицы. Рассматривая пуассоновы соотношения (2.31) и (2.32), мы получим, что тождество Якоби эквивалентно следующему квадратичному по $\bar{\mathbf{g}}$ уравнению:

$$[\bar{\mathbf{r}}_{12}(z), \bar{\mathbf{r}}_{13}(z)] - \mathbf{P}_3^{-1} \{ \bar{\mathbf{r}}_{12}(z), \mathbf{P}_3 \} + \mathbf{P}_2^{-1} \{ \bar{\mathbf{r}}_{13}(z), \mathbf{P}_2 \} = 0, \quad (2.35)$$

и уравнению, связывающему $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$:

$$[\mathbf{r}_{12}(z, w), \bar{\mathbf{r}}_{13}(z) + \bar{\mathbf{r}}_{23}(w)] + [\bar{\mathbf{r}}_{13}(z), \bar{\mathbf{r}}_{23}(w)] - \mathbf{P}_3^{-1} \{ \bar{\mathbf{r}}_{12}(z, w), \mathbf{P}_3 \} = 0. \quad (2.36)$$

Непосредственные вычисления показывают, что матрицы $\mathbf{g}$ и $\bar{\mathbf{g}}$, заданные уравнениями (2.20) и (2.33), действительно удовлетворяют этому уравнению.

Наконец, отметим, что поля $A(z)$ и $g(z)$, определенные уравнениями (2.5) и (2.28), удовлетворяют пуассоновым соотношениям (2.1)–(2.3).

Примечательно, что пуассоновы соотношения для генератора $\mathbf{W}(z) = \mathbf{T}^{-1}(z)\mathbf{U}(z)$ совпадают со скобкой Складина:

$$\frac{1}{\kappa} \{ \mathbf{W}_1(z), \mathbf{W}_2(w) \} = [\mathbf{r}_{12}(z, w), \mathbf{W}_1(z)\mathbf{W}_2(w)], \quad (2.37)$$

которая тем самым задает структуру группы Пуассона–Ли. Эта группа является бесконечномерным аналогом группы Фробениуса, появившейся в работе [18], в которой структура Пуассона–Ли связывалась с существованием невырожденного два-кошкила на соответствующей алгебре Ли. Было бы интересно найти подобную интерпретацию в бесконечномерном случае.

2.2. Классический L -оператор. В настоящем пункте мы определяем специальную функцию на кокасательном расслоении, которую будем называть *классическим L -оператором*. Эту функцию можно считать L -оператором на том основании, что пуассонова алгебра матричных элементов L эквивалентна алгебре, найденной в работе [9] для L -оператора эллиптической модели РШ.

Обозначим через L следующую функцию:

$$L(z) = \mathbf{T}^{-1}(z)g(z)\mathbf{T}(z) = (\det g(z))^{\frac{1}{N}}\mathbf{T}^{-1}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{P}. \quad (2.38)$$

Из формул п. 2.1 вытекает, что скобка Пуассона L и Q выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\kappa} \{ Q_1, L_2(z) \} = L_2(z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \quad (2.39)$$

в то время как пуассонова алгебра L -оператора представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \{ L_1(z), L_2(w) \} = & \mathbf{r}_{12}(z, w)L_1(z)L_2(w) + \\ & + L_1(z)L_2(w)(\bar{\mathbf{r}}_{12}(z) - \bar{\mathbf{r}}_{21}(w) - \mathbf{r}_{12}(z, w)) + \\ & + L_1(z)\bar{\mathbf{r}}_{21}(w)L_2(w) - L_2(w)\bar{\mathbf{r}}_{12}(z)L_1(z). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Очевидно, генераторы Q и L образуют пуассонову подалгебру пуассоновой алгебры кокасательного расслоения. Важным свойством этой подалгебры является то, что величины $I_n(z) = \text{tr } L^n(z)$ образуют набор коммутирующих переменных.

В полной аналогии с конечномерным случаем [18] из уравнения (2.39) следует, что L -оператор факторизуется следующим образом: $L(z) = W(z)P$, где Q и $\log P$ суть канонически сопряженные переменные, W -алгебра задается формулой (2.37), а скобка W и P имеет вид

$$\frac{1}{\kappa} \{W_1(z), P_2\} = -P_2 [\bar{\mathbf{r}}_{12}(z), W_1(z)]. \quad (2.41)$$

Теперь мы имеем все объекты, необходимые для квантования L -операторной алгебры (2.40). Сама проблема квантования сводится к нахождению квантовых $\mathbf{R}$ - и $\bar{\mathbf{R}}$ -матриц, удовлетворяющих квантовым аналогам уравнений (2.23), (2.35) и (2.36):

$$\mathbf{R}_{12}(z_1, z_2) \mathbf{R}_{21}(z_2, z_1) = 1, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{R}_{12}(z_1, z_2) \mathbf{R}_{13}(z_1, z_3) \mathbf{R}_{23}(z_2, z_3) = \mathbf{R}_{23}(z_2, z_3) \mathbf{R}_{13}(z_1, z_3) \mathbf{R}_{12}(z_1, z_2), \quad (2.43)$$

$$\mathbf{R}_{12}(z_1, z_2) \bar{\mathbf{R}}_{13}(z_1) \bar{\mathbf{R}}_{23}(z_2) = \bar{\mathbf{R}}_{23}(z_2) \bar{\mathbf{R}}_{13}(z_1) P_3^{-1} \mathbf{R}_{12}(z_1, z_2) P_3, \quad (2.44)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{12}(z) P_2^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{13}(z) P_2 = \bar{\mathbf{R}}_{13}(z) P_3^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{12}(z) P_3. \quad (2.45)$$

Мы предполагаем, что эти матрицы обладают стандартным поведением в окрестности параметра квантования $\hbar = 0$:

$$\mathbf{R} = 1 + \hbar \mathbf{r} + o(\hbar), \quad \bar{\mathbf{R}} = 1 + \hbar \bar{\mathbf{r}} + o(\hbar).$$

Сформулированная проблема представляется достаточно сложной из-за наличия s -матрицы, входящей в классические $\mathbf{r}$ - и $\bar{\mathbf{r}}$ -матрицы. Однако пуассонова алгебра (2.40) обладает еще одним важным свойством, позволяющим преодолеть указанную трудность. Именно, матрица $s(z)$, входящая в обе матрицы $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, выпадает из правой части уравнения (2.40). Тем самым уравнение (2.40) может быть окончательно переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \{L_1(z), L_2(w)\} = & r_{12}(z, w) L_1(z) L_2(w) - \\ & - L_1(z) L_2(w) (r_{12}(z, w) + \bar{r}_{21}(w) - \bar{r}_{12}(z)) + \\ & + L_1(z) \bar{r}_{21}(w) L_2(w) - L_2(w) \bar{r}_{12}(z) L_1(z). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Кроме того, если обозначить через r_{12}^F сумму

$$r_{12}^F(z, w) = r_{12}(z, w) + \bar{r}_{21}(w) - \bar{r}_{12}(z), \quad (2.47)$$

то, используя (2.21) и (2.34), мы получим

$$r_{12}^F(z - w) = - \sum_{ij} \Phi(q_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z - w, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji}. \quad (2.48)$$

В этом выражении можно узнать эллиптическое решение классического уравнения Жерве–Невье–Фельдера [16, 15]:

$$\begin{aligned} & [r_{12}^F(z_1 - z_2), r_{13}^F(z_1 - z_3) + r_{23}^F(z_2 - z_3)] + \\ & + [r_{13}^F(z_1 - z_3), r_{23}^F(z_2 - z_3)] - P_3^{-1} \{r_{12}^F(z_1 - z_2), P_3\} + \\ & + P_2^{-1} \{r_{13}^F(z_1 - z_3), P_2\} - P_1^{-1} \{r_{23}^F(z_2 - z_3), P_1\} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

В действительности r^F возникает как квазиклассический предел квантовой R -матрицы, найденной в [15].

Отсутствие s -матрицы в алгебре для L -оператора и возникновение r^F -матрицы указывают на то, что, вероятно, существует замкнутая система уравнений, включающая только r - и $\bar{r}$ -матрицы в классическом случае и R - и $\bar{R}$ -матрицы в квантовом. В следующем пункте мы найдем искомую систему уравнений и опишем пуассонову структуру, для которой выполнение этих уравнений обеспечивает выполнение тождества Якоби.

Отметим, что алгебра (2.46) в точности совпадает с алгеброй, полученной в работе [20] с использованием гамильтоновой редукции. Простое преобразование подобия для оператора L переводит алгебру (2.46) в алгебру, найденную в работе [9]. В отличие от [9], где (2.46) явилось результатом прямых вычислений, использующих явный вид L -оператора модели РШ, в нашем рассмотрении явный вид оператора L не требуется.

2.3. Простейшее представление L -операторной алгебры. Чтобы найти L -оператор как функцию канонических переменных, мы используем процедуру гамильтоновой редукции. Как было отмечено в п. 2.2, на пуассоновой структуре (2.1)–(2.3) действует гамильтоновым образом группа токов. Соответствующее отображение момента, принимающее значение в дуальном пространстве к алгебре Ли группы G , имеет следующий вид:

$$M(z) = k\bar{\partial}g(z)g^{-1}(z) + A(z) - g(z)A(z)g^{-1}(z).$$

Легко проверить, что $M(z)$ действительно генерирует действие группы токов. Мы фиксируем значение момента $M(z)$ в соответствии с процедурой, предложенной в работе [20]:

$$M(z) = -\frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}}\gamma + 2\pi ik\delta_\varepsilon(z)\frac{1 - e^{-2\pi ix}}{2\pi i}K. \quad (2.50)$$

Здесь γ (константа связи) и ε суть произвольные комплексные числа,

$$\delta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\tau - \bar{\tau}}\delta_\varepsilon(x)\delta(y),$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\theta\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \theta\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = \frac{1}{4\pi^2 i \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n} (e^{2\pi i n \frac{\varepsilon}{2}} - e^{-2\pi i n \frac{\varepsilon}{2}}) e^{2\pi i n x},$$

K – постоянная матрица, $K = e \otimes e^t$ и $z = x + \tau y$.

Чтобы получить конечномерное редуцированное фазовое пространство, нужно рассмотреть предел, когда ε стремится к нулю. Для нахождения этого предела используем стратегию работы [19]. Умножая обе части уравнения (2.50) на $g(z)$, получим

$$k\bar{\partial}g(z) + A(z)g(z) - g(z)A(z) + \frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}}\gamma g(z) = 2\pi ik\delta_\varepsilon(z)K\frac{1 - e^{-2\pi ix}}{2\pi i}g(z). \quad (2.51)$$

Левая часть этого уравнения не содержит явной зависимости от ε . В правой части, когда ε стремится к нулю, $\delta_\varepsilon(z)$ становится пропорциональной $\delta(x)\delta(y)$, и правая часть остается хорошо определенной, только если функция $\frac{1-e^{-2\pi ix}}{2\pi i}g(x, 0)$ хорошо определена в точке $x = 0$. В этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(z) \frac{1 - e^{-2\pi ix}}{2\pi i} g(z) = \delta(z) Z,$$

где

$$Z = \frac{1 - e^{-2\pi ix}}{i} g(x, 0) \Big|_{x=0}.$$

Таким образом, мы задаем поверхность связей как решение уравнения

$$k\bar{\partial}g(z) + [A(z), g(z)] + \frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}} \gamma g(z) = 2\pi i k \delta(z) K Z. \quad (2.52)$$

В действительности процедура, описанная выше, отвечает фиксации следующего линейризованного отображения момента:

$$M(z) = k\bar{\partial}g(z) + [A(z), g(z)],$$

которое удовлетворяет пуассоновой алгебре

$$\{M_1(z), M_2(w)\} = [C, M_1(z)g_1(z)]\delta(z - w).$$

Описание редуцированного фазового пространства мы начинаем с рассмотрения следующего дифференциального уравнения:

$$k\bar{\partial}g(z) + [D, g(z)] + \frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}} \gamma g(z) = 2\pi i k \delta(z) Y, \quad (2.53)$$

с постоянной диагональной матрицей D и постоянной матрицей Y . Уравнение (2.53) может быть решено аналогично уравнению (2.8), и в итоге мы получим следующее решение для $g(z)$:

$$g(z) = \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij} + \gamma) Y_{ij} E_{ij}. \quad (2.54)$$

Обратимся теперь к уравнению (2.52). Используя калибровочное преобразование общего вида, поле A можно диагонализировать. Тогда уравнение (2.52) превращается в уравнение (2.53):

$$k\bar{\partial}g'(z) + [D, g'(z)] + \frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}} \gamma g'(z) = 2\pi i k \delta(z) K' Z', \quad (2.55)$$

где

$$A(z) = T(z)DT^{-1}(z) - k\bar{\partial}T(z)T^{-1}(z), \quad g(z) = T(z)g'(z)T^{-1}(z)$$

для некоторых T и $Z' = xg'(x, 0)|_{x=0}$. Кроме того,

$$K' = T^{-1}(0)KT(0) = T^{-1}(0)e \otimes e^t T(0) = f \otimes v^t, \quad \langle f, v \rangle = N,$$

т.е. $f = T^{-1}(0)e$ и $e^t T(0) = v^t$. В соответствии с уравнением (2.54) мы получим, что

$$g'(z) = \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij} + \gamma)(K'Z')_{ij} E_{ij}. \quad (2.56)$$

Беря значения функции $xg'(x, 0)$ в точке $x = 0$, приходим к следующему условию согласованности:

$$Z' = K'Z' = f \otimes v^t Z', \quad \langle f, v \rangle = N.$$

Решение этого уравнения имеет вид $Z' = f \otimes l^t$ с произвольным вектором l . Теперь уже легко найти Z :

$$Z = T(0)ZT^{-1}(0) = T(0)f \otimes l^t T(0)^{-1} = e \otimes l^t T^{-1}(0) = e \otimes c^t.$$

Таким образом, получаем

$$k\bar{\partial}g(z) + [A(z), g(z)] + \frac{2\pi ik}{\tau - \bar{\tau}} \gamma g(z) = 2\pi ik(e \otimes c^t)\delta(z). \quad (2.57)$$

Итак, уравнение (2.52) имеет решение для любого поля A и любого поля g такого, что $xg(x, 0)|_{x=0}$ представимо в виде $e \otimes c^t$. Для заданного поля A и вектора c такое решение единственно. Заметим, что, вообще говоря, $\langle c, e \rangle \neq N$.

Из вида правой части уравнения (2.55) следует, что группа изотропии выбранного момента имеет вид

$$G_{\text{isot}} = \{T(z) \in G(z, \bar{z}) \mid T(0)e = \lambda e, \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

Эта группа переводит одно решение уравнения (2.55) в другое, так что редуцированное фазовое пространство определяется как

$$\mathcal{P}_{\text{red}} = \frac{\text{все решения (2.52)}}{G_{\text{isot}}}.$$

Группа G_{isot} также позволяет диагонализировать поле A , и, следовательно, редуцированное фазовое пространство можно параметризовать сечением (D, L) , где L — решение (2.52) с $A = D$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_{\text{red}}$ конечномерно и его размерность равна $2N$; она складывается из N координат D и N координат вектора c . Из (2.56) следует, что соответствующий L -оператор имеет вид

$$L(z) = \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij} + \gamma) c_j E_{ij}. \quad (2.58)$$

Из результатов, полученных в п. 2.2, вытекает соотношение $c_j = b_j P_j$, где b_j суть функции только от переменных q . Оператор (2.58) должен удовлетворять пуассоновой алгебре (2.46), что предполагает выполнение следующих нетривиальных пуассоновых соотношений на c_j :

$$\kappa\{q_i, c_j\} = c_j \delta_{ij}, \quad (2.59)$$

$$\kappa\{c_i, c_j\} = c_i c_j (2\zeta(q_{ij}) - \zeta(q_{ij} + \gamma) - \zeta(q_{ij} - \gamma)). \quad (2.60)$$

Чтобы получить уравнения (2.59), (2.60), заметим, что

$$L_{ii}(z) = \Phi(z, \gamma) c_i, \quad (2.61)$$

и потому для вычисления скобки $\{c_i, c_j\}$ достаточно исследовать только скобку $\{L_{ii}, L_{jj}\}$. Из уравнения (2.46) при $i \neq j$ вытекает уравнение

$$\frac{1}{\kappa} \{L_{ii}(z), L_{jj}(z)\} = L_{ji}(z) L_{ij}(w) \Phi(z - w, q_{ij}) - L_{ij}(z) L_{ji}(w) \Phi(z - w, q_{ji}), \quad (2.62)$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \{c_i, c_j\} = c_i c_j \frac{1}{\Phi(z, \gamma) \Phi(w, \gamma)} & \left(\Phi(z, q_{ji} + \gamma) \Phi(w, q_{ij} + \gamma) \Phi(z - w, q_{ij}) - \right. \\ & \left. - \Phi(z, q_{ij} + \gamma) \Phi(w, q_{ji} + \gamma) \Phi(z - w, q_{ji}) \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Используя эллиптическое тождество (формула (Б.3) из приложения Б), мы получим (2.60). Уравнение (2.59) доказывается аналогично.

Чтобы найти представление переменных b_j через q_i , можно обратиться к рациональному случаю. Действительно, в рациональном пределе алгебра (2.46) переходит в алгебру, полученную в работе [18]. При этом коэффициенты b_j L -оператора имеют вид

$$b_j = \prod_{a \neq j} \frac{q_{aj} + \gamma}{q_{aj}}. \quad (2.64)$$

И потому естественно предположить, что эллиптический аналог представления (2.64) выглядит как

$$b_j = \prod_{a \neq j} \Phi(\gamma, q_{aj}). \quad (2.65)$$

Непосредственные вычисления показывают, что уравнение (2.65) при этом выполняется.

Следует отметить, что величины b_j определены лишь с точностью до канонического преобразования (q, p) -переменных. Например, переменные

$$\tilde{b}_j = \prod_{a \neq j} \frac{\sigma(q_{aj} + \gamma)}{\sigma(\gamma) \sigma(q_{aj})} \quad (2.66)$$

связаны с b_j каноническим преобразованием $q_i \rightarrow q_i$ и

$$P_i \rightarrow e^{\alpha \sum_a q_{ai}} P_i,$$

где $\alpha = 2\zeta(1/2)\gamma - 2\pi i \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{\tau - \bar{\tau}}$.

Связь L -оператора (2.58) с L -оператором, найденным в работе [10], будет объяснена в разделе 3.

2.4. Квадратичная пуассонова алгебра с производными. В п. 2.1 мы построили матрицы $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, удовлетворяющие системе уравнений (2.23), (2.35) и (2.36). Ясно, что эти уравнения не выполняются при замене $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$ на r и $\bar{r}$. Однако после такой замены при вычислении левых частей этих уравнений получаются соответственно следующие достаточно простые ответы:

$$\begin{aligned} & [r_{12}(z_1, z_2), r_{13}(z_1, z_3) + r_{23}(z_2, z_3)] + [r_{13}(z_1, z_3), r_{23}(z_2, z_3)] = \\ & = -(\partial_1 + \partial_2)r_{12}(z_1, z_2) + (\partial_1 + \partial_3)r_{13}(z_1, z_3) - \\ & - (\partial_2 + \partial_3)r_{23}(z_2, z_3), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{r}_{12}(z), \bar{r}_{13}(z)] - P_3^{-1}\{\bar{r}_{12}(z), P_3\} + \\ & + P_2^{-1}\{\bar{r}_{13}(z), P_2\} = -\partial(\bar{r}_{12}(z) - \bar{r}_{13}(z)), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} & [r_{12}(z_1, z_2), \bar{r}_{13}(z_1) + \bar{r}_{23}(z_2)] + [\bar{r}_{13}(z_1), \bar{r}_{23}(z_2)] - P_3^{-1}\{r_{12}(z_1, z_2), P_3\} = \\ & = -(\partial_1 + \partial_2)r_{12}(z_1, z_2) + \partial_1\bar{r}_{13}(z_1) - \partial_2\bar{r}_{23}(z_2), \end{aligned} \quad (2.69)$$

здесь $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, где $x = \operatorname{Re} z$. Заметим, что уравнения (2.35) и (2.36) были сформулированы с использованием оператора $\mathbf{P}$. Но поскольку все матрицы зависят лишь от разности $q_{ij} = q_i - q_j$, мы можем просто заменить $\mathbf{P}$ на P .

Сравнивая уравнения (2.67)–(2.69) для матриц r и $\bar{r}$ с уравнениями (2.23), (2.35) и (2.36) для матриц $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, мы приходим к выводу, что $s(z)$ -матрица, входящая в $\mathbf{r}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, фактически играет роль производной по спектральному параметру.

Сделаем еще одно замечание: уравнения (2.67)–(2.69), выведенные для случая r - и $\bar{r}$ -матриц, могут быть переписаны в виде уравнений (2.23), (2.35) и (2.36), если мы заменим r и $\bar{r}$ на $r_{12} - \partial_1 + \partial_2$ и $\bar{r}_{12} - \partial_1$. В частности, для уравнения (2.67) получим

$$\begin{aligned} & [r_{12} - \partial_1 + \partial_2, r_{13} - \partial_1 + \partial_3] + [r_{13} - \partial_1 + \partial_3, r_{23} - \partial_2 + \partial_3] + \\ & + [r_{12} - \partial_1 + \partial_2, r_{23} - \partial_2 + \partial_3] = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Таким образом, $r_{12} - \partial_1 + \partial_2$ является матричнозначным дифференциальным оператором первого порядка, удовлетворяющим стандартному классическому уравнению Янга–Бакстера. Используя это обстоятельство, мы получим пуассонову алгебру, порожденную полями $T(z)$, $U(z)$, Q и P , для которых уравнения (2.67)–(2.69) эквивалентны выполнению тождеств Якоби:

$$\frac{1}{\kappa}\{T_1(z), T_2(w)\} = T_1(z)T_2(w)r_{12}(z, w) + T_1'T_2 - T_1T_2', \quad (2.71)$$

$$\frac{1}{\kappa}\{U_1(z), U_2(w)\} = -U_1(z)U_2(w)r_{12}(z, w) - U_1'U_2 + U_1U_2', \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{\kappa}\{T_1(z), P_2\} = P_2T_1(z)\bar{r}_{12}(z) + P_2T_1'(z), \quad (2.73)$$

$$\frac{1}{\kappa}\{U_1(z), P_2\} = P_2U_1(z)\bar{r}_{12}(z) + P_2U_1'(z), \quad (2.74)$$

$$\{Q_1, P_2\} = P_2 \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \quad \{Q_1, T_2\} = \{Q_1, U_2\} = 0, \quad (2.75)$$

где $T' = \partial T$.

Заметим, что пуассонова структура (2.71)–(2.75) не согласована с граничным условием $T(0)e = \lambda e$.

Наконец, отметим, что в нашем случае мы можем выделить пуассонову подалгебру пуассоновой алгебры (2.71)–(2.75), образованную генераторами

$$A(z) = T(z)DT^{-1}(z) - k\bar{\partial}T(z)T^{-1}(z), \quad g(z) = U(z)PT^{-1}(z),$$

которая совпадает с пуассоновой алгеброй кокасательного расслоения с центральным зарядом $\alpha = 0$.

Задавая L -оператор выражением $L(z) = T^{-1}(z)g(z)T(z) = T^{-1}(z)U(z)P$, мы найдем для оператора L полученную ранее алгебру (2.46). Как и в предыдущем разделе, коммутативность $I_n(z)$ следует из того, что все $g(z)$ коммутируют между собой.

Главное преимущество пуассоновой алгебры (2.71)–(2.75) заключается в том, что она может быть легко проквантована.

3. КВАНТОВАНИЕ

В этом разделе мы квантуем классические r - и $\bar{r}$ -матрицы и выводим квантовую L -операторную алгебру, следуя идеологии метода квантовой обратной задачи рассеяния [25, 26].

3.1. Квантовые R -матрицы. Начнем с квантования соотношений (2.67)–(2.69). Пусть $T(z), U(z)$ – матричнозначные производящие функции, представляемые формальными рядами Фурье по переменным x и y :

$$T(z) = \sum_{mn} T_{mn} e^{2\pi i(mx+ny)}, \quad U(z) = \sum_{mn} U_{mn} e^{2\pi i(mx+ny)},$$

где $z = x + \tau y$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ свободную ассоциативную унитарную алгебру над полем $\mathbb{C}$, порожденную матричными элементами фурье-мод полей $T(z), U(z)$, и элементами диагональных матриц P и Q , удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$T_1(z)T_2(w - \hbar) = T_2(w)T_1(z - \hbar)R_{12}(-\hbar, z, w), \quad (3.1)$$

$$U_1(z)U_2(w + \hbar) = U_2(w)U_1(z + \hbar)R_{12}(\hbar, z, w), \quad (3.2)$$

$$T_1(z + \hbar)P_2\bar{R}_{12}(\hbar, z) = P_2T_1(z), \quad (3.3)$$

$$U_1(z + \hbar)P_2\bar{R}_{12}(\hbar, z) = P_2U_1(z), \quad (3.4)$$

$$[Q_1, P_2] = -\hbar P_2 \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \quad (3.5)$$

$$[T_1(z), U_2(w)] = [T_1(z), Q_2] = [U_1(z), Q_2] = [P_1, P_2] = [Q_1, Q_2] = 0.$$

Здесь $R(\hbar, z, w)$ и $\bar{R}_{12}(\hbar, z)$ суть двоякопериодические матричнозначные функции спектральных параметров. Эти функции зависят также от координат q_i и обладают следующим квазиклассическим поведением при $\hbar \rightarrow 0$:

$$R = 1 + \hbar r + o(\hbar), \quad \bar{R} = 1 + \hbar \bar{r} + o(\hbar). \quad (3.6)$$

Следующий шаг состоит в выяснении условий, которые обеспечивают согласованность определяющих соотношений для алгебры $\mathcal{A}$. В дальнейшем мы часто будем для краткости обозначать $R(\hbar, z, w)$ просто через $R(z, w)$.

Условие согласованности соотношений (3.1) или (3.2) сводится к квантовому уравнению Янга–Бакстера со спектральными параметрами, сдвинутыми на $\hbar$:

$$R_{12}(z, w)R_{13}(z - \hbar, s - \hbar)R_{23}(w, s) = R_{23}(w - \hbar, s - \hbar)R_{13}(z, s)R_{12}(z - \hbar, w - \hbar). \quad (3.7)$$

По аналогии с классическим случаем можно ввести следующий матричнозначный дифференциальный оператор: $\mathcal{R}(z, w) = e^{\hbar \frac{\partial}{\partial w}} R(z, w) e^{-\hbar \frac{\partial}{\partial z}}$, в терминах которого уравнение (3.7) принимает вид стандартного квантового уравнения Янга–Бакстера:

$$\mathcal{R}_{12}(z, w)\mathcal{R}_{13}(z, s)\mathcal{R}_{23}(w, s) = \mathcal{R}_{23}(w, s)\mathcal{R}_{13}(z, s)\mathcal{R}_{12}(z, w). \quad (3.8)$$

Соотношение (3.1) также предполагает выполнение условия “унитарности” для матрицы R , а именно:

$$R_{12}(z, w)R_{21}(w, z) = 1. \quad (3.9)$$

Совершенно аналогично получим следующие условия согласованности, вытекающие из уравнения (3.3):

$$P_3^{-1}\bar{R}_{12}(z)P_3\bar{R}_{13}(z - \hbar) = P_2^{-1}\bar{R}_{13}(z)P_2\bar{R}_{12}(z - \hbar), \quad (3.10)$$

$$P_3^{-1}R_{12}(z, w)P_3\bar{R}_{13}(z - \hbar)\bar{R}_{23}(w) = \bar{R}_{23}(w - \hbar)\bar{R}_{13}(z)R_{12}(z - \hbar, w - \hbar). \quad (3.11)$$

Теперь с учетом уравнения (3.6) можно легко видеть, что в квазиклассическом пределе

$$-\frac{1}{\kappa}\{\cdot, \cdot\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar}[\cdot, \cdot]$$

соотношения (3.1)–(3.5) задают пуассонову структуру (2.71)–(2.75), в то время как соотношения (3.7), (3.10) и (3.11) превращаются соответственно в (2.67), (2.68) и (2.69) в порядке $\hbar^2$. В первом порядке по $\hbar$ из условия унитарности (3.9) следует, что матрица r должна быть антисимметричной. Следовательно, алгебра $\mathcal{A}$, задаваемая соотношениями (3.1)–(3.5), где R и $\bar{R}$ суть такие решения уравнений (3.7)–(3.11), которые также удовлетворяют (3.6), представляет собой *квантование* пуассоновой структуры (2.71)–(2.75).

Теперь мы можем найти матрицы R и $\bar{R}$ в явном виде. Начнем с R -матрицы, которую будем искать в следующем естественном виде:

$$\begin{aligned} fR(\hbar, z, w) = & \sum_{ij} \Phi(\hbar_1, q_{ij} + \hbar_2) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z - w + \hbar_3, q_{ij} + \hbar_4) E_{ij} \otimes E_{ji} - \\ & - \sum_{ij} \Phi(z + \hbar_5, q_{ij} + \hbar_6) E_{ij} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(w + \hbar_7, q_{ij} + \hbar_8) E_{jj} \otimes E_{ij}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Такой вид матрицы R согласован со структурой классической r -матрицы. Здесь $\hbar_1, \dots, \hbar_8$ – произвольные (пока) параметры, которые должны быть определены из

уравнений (3.7) и (3.9), а f — скалярная функция, которая может зависеть только от $\hbar_i$ и спектральных параметров. Впоследствии окажется, что параметры $\hbar_i$ почти однозначно определяются условием унитарности (3.9). Подставляя (3.12) в уравнение (3.9) и используя тождества для эллиптических функций, получаем

$$\hbar_2 = \hbar_3 = \hbar_4 = \hbar_6 = \hbar_8 = 0, \quad \hbar_5 = \hbar_1 + \hbar_7, \quad f^2(z, w) = \mathcal{P}(\hbar_1) - \mathcal{P}(z - w),$$

где $\mathcal{P}(z)$ — $\mathcal{P}$ -функция Вейерштрасса.

Непосредственные вычисления показывают, что уравнение (3.7) выполнено при $\hbar_1 = \hbar$. Оставшийся параметр $\hbar_7$ несуществен, так как он отвечает произвольному общему сдвигу обоих спектральных параметров z и w . В дальнейшем мы положим $\hbar_7 = 0$. Таким образом, полученное решение уравнений (3.7) и (3.6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(z, w)R(\hbar, z, w) = & \sum_{ij} \Phi(\hbar, q_{ij})E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z - w, q_{ij})E_{ij} \otimes E_{ji} - \\ & - \sum_{ij} \Phi(z + \hbar, q_{ij})E_{ij} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(w, q_{ij})E_{jj} \otimes E_{ii}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $f(z, w) = \sqrt{\mathcal{P}(\hbar) - \mathcal{P}(z - w)}$. Отметим, что задание матрицы $R(-\hbar, z, w)$ требует некоторой аккуратности. Эта матрица определяется соотношением (3.13) при заменах $\hbar \rightarrow -\hbar$ и $f \rightarrow -f$. Таким образом, $R(\hbar, z, w)$ и $R(-\hbar, z, w)$ связаны соотношением

$$R_{12}(-\hbar, z, w) = R_{21}(\hbar, w - \hbar, z - \hbar). \quad (3.14)$$

$\bar{R}$ -матрицу мы ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(\hbar)}\bar{R}_{12}(\hbar, z) = & \sum_{ij} \Phi(\hbar_1, q_{ij} + \hbar_2)E_{ii} \otimes E_{jj} - \\ & - \sum_{ij} \Phi(z + \hbar_3, q_{ij} + \hbar_4 + \delta_{ij}\hbar_5)E_{ij} \otimes E_{jj}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Эта матрица имеет практически ту же матричную структуру, что и классическая $\bar{r}$ -матрица. Поскольку гораздо легче работать с уравнением (3.10), чем с (3.11), сначала подставим выражение (3.15) в уравнение (3.10) и тем самым получим $\bar{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(\hbar)}\bar{R}_{12}(\hbar, z) = & \sum_{i \neq j} \Phi(\hbar, q_{ij})E_{ii} \otimes E_{jj} - \sum_{i \neq j} \Phi(z + \hbar_3, q_{ij})E_{ij} \otimes E_{jj} - \\ & - \Phi(z + \hbar_3, -\hbar) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\hbar_3$ остается произвольным.

Уравнение (3.11) включает как R -, так и $\bar{R}$ -матрицу, и оно алгебраически независимо от уравнений (3.7) и (3.10). Непосредственными вычислениями можно убедиться в том,

что матрицы R и $\bar{R}$, заданные уравнениями (3.13) и (3.16), удовлетворяют также (3.11) при условии, что $\hbar_3 = \hbar$.

В случае вещественного параметра $\hbar$ можно легко проверить, что матрицы R и $\bar{R}$ имеют правильный квазиклассический предел (3.6).

В дальнейшем нам также потребуется матрица $\bar{R}^{-1}$:

$$\frac{1}{\sigma(\hbar)} \bar{R}_{12}^{-1}(\hbar, z) = - \sum_{ij} \Phi(-\hbar, q_{ij} + \hbar) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij} + \hbar) E_{ij} \otimes E_{jj}. \quad (3.17)$$

Отметим, что, в точности как в рациональном случае в отсутствие спектрального параметра [18], мы можем ввести формальную переменную $W(z) = T^{-1}(z)U(z)$, коммутационные соотношения для которой следуют из уравнений (3.1)–(3.5):

$$R_{12}(z, w)W_1(z)W_2(w + \hbar) = W_2(w)W_1(z + \hbar)R_{12}(z, w), \quad (3.18)$$

$$W_1(z + \hbar)P_2\bar{R}_{12}(z) = P_2\bar{R}_{12}(z)W_1(z). \quad (3.19)$$

По аналогии с рациональным случаем естественно интерпретировать уравнения (3.18) как определяющие соотношения квантовой эллиптической группы Фробениуса.

3.2. Квантовая L -операторная алгебра. В полном соответствии с классическим случаем введем новую переменную

$$L(z) = T^{-1}(z)U(z)P = W(z)P, \quad (3.20)$$

которую будем называть *квантовым L -оператором*. Используя соотношения алгебры $\mathcal{A}$, можно формально вывести следующие алгебраические соотношения, которым должен удовлетворять квантовый L -оператор:

$$[Q_1, L_2(z)] = -\hbar L_2(z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} R_{12}(z, w)L_1(z)\bar{R}_{21}(w)L_2(w) = \\ = L_2(w)\bar{R}_{12}(z)L_1(z)\bar{R}_{21}(w - \hbar)R_{12}(z - \hbar, w - \hbar)\bar{R}_{12}^{-1}(z - \hbar). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Несмотря на то что L может быть представлен в виде $L(z) = W(z)P$, мы не в состоянии восстановить из уравнений (3.21) и (3.22) соотношения (3.18) и (3.19), которым удовлетворяют соответственно операторы W и P . Поэтому в дальнейшем мы не предполагаем наличия каких-либо соотношений между W и P .

Введем новую R -матрицу

$$R_{12}^F(z, w) = \bar{R}_{21}(w)R_{12}(z, w)\bar{R}_{12}^{-1}(z). \quad (3.23)$$

Теперь, имея явные выражения для R - и $\bar{R}$ -матриц и используя эллиптические тождества, мы найдем, что

$$\begin{aligned} fR_{12}^F(z-w) = & - \sum_{i \neq j} \Phi(-\hbar, q_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \\ & + \sum_{i \neq j} \Phi(z-w, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji} + \Phi(z-w, \hbar) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

но эта матрица является не чем иным, как R -матрицей Фельдера [15], т.е. эллиптическим решением квантового уравнения Жерве–Невье–Фельдера [16, 15]:

$$\begin{aligned} P_1^{-1} R_{23}^F(w-s) P_1 R_{13}^F(z-s) P_3^{-1} R_{12}^F(z-w) P_3 = \\ = R_{12}^F(z-w) P_2^{-1} R_{13}^F(z-s) P_2 R_{23}^F(w-s). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Напомним, что одним из свойств матрицы R^F является условие “нулевого веса”:

$$[P_1 P_2, R_{12}^F(z-w)] = 0. \quad (3.26)$$

Разлагая R^F в ряд по степеням $\hbar$, получим $R^F = 1 + \hbar r^F + o(\hbar)$, где матрица r^F задана уравнением (2.48).

Подчеркнем, что в нашем рассмотрении матрица R^F возникает как некоторая комбинация матриц R и $\bar{R}$; в то же время уравнение Жерве–Невье–Фельдера не связано с системой уравнений (3.7)–(3.11). Из формулы (3.23) следует, что матрица $\bar{R}$ играет роль твиста, переводящего матрицу $R(z, w)$ – частное решение уравнения (3.7) – в такое решение уравнения (3.25), которое зависит только от разности $z - w$.

Таким образом, квантовая L -операторная алгебра (3.22) может быть представлена в следующем виде:

$$R_{12}(z, w) L_1(z) \bar{R}_{21}(w) L_2(w) = L_2(w) \bar{R}_{12}(z) L_1(z) R_{12}^F(z-w). \quad (3.27)$$

На первый взгляд квантовая L -операторная алгебра кажется автоматически совместной, если только совместна сама алгебра $\mathcal{A}$. Однако простой анализ показывает, что алгебра $\mathcal{A}$ и алгебра (3.27) могут иметь различные представления. Например, простейшее представление оператора L , которое мы опишем ниже, не отвечает алгебре (3.18), (3.19). По этой причине нам следует провести прямое доказательство совместности уравнений (3.27). В ходе этого доказательства мы придем к уравнению (3.25), а также найдем новое соотношение между матрицами R^F и $\bar{R}$.

Умножим обе части уравнения (3.27) на

$$P_2^{-1} \bar{R}_{31}(s + \hbar) P_2 \bar{R}_{32}(s) L_3(s),$$

а затем, используя уравнение (3.27), преобразуем последовательность $L_1 \cdots L_2 \cdots L_3$ в последовательность $L_3 \cdots L_2 \cdots L_1$. В левой части уравнения мы получим

$$\begin{aligned}
 & R_{12}(z, w) L_1 \bar{R}_{21}(w) L_2 P_2^{-1} \bar{R}_{31}(s + \hbar) P_2 \bar{R}_{32}(s) L_3 = \\
 & = R_{12}(z, w) L_1 \bar{R}_{21}(w) \bar{R}_{31}(s + \hbar) L_2 \bar{R}_{32}(s) L_3 = \\
 & = R_{12}(z, w) L_1 \bar{R}_{21}(w) \bar{R}_{31}(s + \hbar) R_{32}(s, w) L_3 \bar{R}_{23}(w) L_2 R_{23}^F(w - s) = \\
 & = R_{12}(z, w) R_{32}(s + \hbar, w + \hbar) L_1 \bar{R}_{31}(s) L_3 P_3^{-1} \bar{R}_{21}(w + \hbar) P_3 \bar{R}_{23}(w) L_2 R_{23}^F(w - s) = \\
 & = R_{12}(z, w) R_{32}(s + \hbar, w + \hbar) R_{31}(s, z) L_3 \bar{R}_{13}(z) L_1 \times \\
 & \quad \times R_{13}^F(z - s) P_3^{-1} \bar{R}_{21}(w + \hbar) P_3 \bar{R}_{23}(w) L_2 R_{23}^F(w - s). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

В этом месте мы прервем цепь вычислений, заметив, что следующий шаг предполагает возможность каким-либо образом поменять местами матрицу R^F и комбинацию $P_3^{-1} \bar{R}_{21}(w + \hbar) P_3 \bar{R}_{23}(w)$. Это может быть сделано при учете следующего нового соотношения, связывающего матрицы R^F и $\bar{R}$:

$$R_{12}^F(z) P_2^{-1} \bar{R}_{31}(w) P_2 \bar{R}_{32}(w - \hbar) = P_1^{-1} \bar{R}_{32}(w) P_1 \bar{R}_{31}(w - \hbar) R_{12}^F(z), \tag{3.29}$$

которое, в свою очередь, проверяется с использованием явных формул (3.24) и (3.16) соответственно для матриц R^F и $\bar{R}$.

Теперь мы продолжим вычисление формулы (3.28), применяя соотношение (3.29). Получим

$$\begin{aligned}
 & R_{12}(z, w) R_{32}(s + \hbar, w + \hbar) R_{31}(s, z) L_3 \bar{R}_{13}(z) \bar{R}_{23}(w + \hbar) \times \\
 & \quad \times L_1 \bar{R}_{21}(w) L_2 P_2^{-1} R_{13}^F(z - s) P_2 R_{23}^F(w - s).
 \end{aligned}$$

В правой части уравнения та же техника дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
 & L_2 \bar{R}_{12}(z) L_1 R_{12}^F(z - w) P_2^{-1} \bar{R}_{31}(s + \hbar) P_2 \bar{R}_{32}(s) L_3 = \\
 & = L_2 \bar{R}_{12}(z) \bar{R}_{32}(s + \hbar) L_1 \bar{R}_{31}(s) L_3 P_3^{-1} R_{12}^F(z - w) P_3 = \\
 & = L_2 \bar{R}_{12}(z) \bar{R}_{32}(s + \hbar) R_{31}(s, z) L_3 \bar{R}_{13}(z) L_1 R_{13}^F(z - s) P_3^{-1} R_{12}^F(z - w) P_3 = \\
 & = R_{31}(s + \hbar, z + \hbar) L_2 \bar{R}_{32}(s) L_3 P_3^{-1} \bar{R}_{12}(z + \hbar) P_3 \times \\
 & \quad \times \bar{R}_{13}(z) L_1 R_{13}^F(z - s) P_3^{-1} R_{12}^F(z - w) P_3 = \\
 & = R_{31}(s + \hbar, z + \hbar) R_{32}(s, w) L_3 \bar{R}_{23}(w) \bar{R}_{13}(z + \hbar) L_2 \bar{R}_{12}(z) L_1 \times \\
 & \quad \times P_1^{-1} R_{23}^F(w - s) P_1 R_{13}^F(z - s) P_3^{-1} R_{12}^F(z - w) P_3 = \\
 & = R_{31}(s + \hbar, z + \hbar) R_{32}(s, w) R_{12}(z + \hbar, w + \hbar) L_3 \bar{R}_{13}(z) \bar{R}_{23}(w + \hbar) L_1 \bar{R}_{21}(w) \times \\
 & \quad \times L_2 R_{21}^F(w - z) P_1^{-1} R_{23}^F(w - s) P_1 R_{13}^F(z - s) P_3^{-1} R_{12}^F(z - w) P_3. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Таким образом, сравнивая полученные выражения, мы заключаем, что условия согласования L -операторной алгебры (3.27) сводятся к четырем уравнениям (3.7), (3.11), (3.24) и (3.29).

Тот факт, что в классическом случае мы имели набор функций $I_n(z)$, коммутирующих относительно скобки Пуассона, прямо указывает на то, что такое семейство должно существовать и в квантовом случае. Существование этого семейства должно следовать из внутренних свойств самой алгебры (3.27), без использования явного вида ее представления. Покажем сначала, что простейшие комбинации, составленные из оператора L , а именно $\text{tr } L(z)$ и $\text{tr } L^{-1}(z)$, действительно коммутируют между собой. Обсуждение общего случая отложим до следующего раздела. Для доказательства нам понадобится еще одно соотношение на матрицы R^F , R и $\bar{R}$.

По аналогии с рациональным случаем полезно ввести переменную $g(z) = U(z)PT^{-1}(z)$. Вычисляя коммутатор $[g_1(z), g_2(w)]$ с помощью определяющих соотношений для $\mathcal{A}$, мы приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} [g_1(z), g_2(w)] = & U_2(w)U_1(z+\hbar)(R_{12}(\hbar, z, w)P_1\bar{R}_{21}(w)P_2\bar{R}_{12}(z-\hbar)R_{12}(-\hbar, z, w)- \\ & - P_2\bar{R}_{12}(z)P_1\bar{R}_{21}(w-\hbar))T_2^{-1}(w-\hbar)T_1^{-1}(z). \end{aligned}$$

В отсутствие спектрального параметра алгебра $\mathcal{A}$ позволяет установить связь с квантовым кокасательным расслоением (детали см. в [18]). Тогда, в частности, величина $[g_1, g_2]$ равна нулю. В рассматриваемом случае мы не можем построить такую подалгебру алгебры $\mathcal{A}$, которая была бы изоморфна квантовому кокасательному расслоению. Отметим однако, что в эллиптическом случае коммутативность $g(z)$ и $g(w)$ следует из тождества

$$R_{12}(\hbar, z, w)P_1\bar{R}_{21}(w)P_2\bar{R}_{12}(z-\hbar)R_{12}(-\hbar, z, w) = P_2\bar{R}_{12}(z)P_1\bar{R}_{21}(w-\hbar).$$

Из определения матрицы R^F , соотношения (3.14) и условия “нулевого веса” (3.26) последнюю формулу можно переписать в следующем элегантном виде:

$$R_{12}(z, w) = P_2\bar{R}_{12}(z)P_2^{-1}R_{12}^F(z-w)P_1\bar{R}_{21}^{-1}(w)P_1^{-1}. \quad (3.31)$$

Тождество (3.31) играет определяющую роль в доказательстве коммутативности семейства операторов $\text{tr } L(z)$. Для доказательства умножим обе части уравнения

$$L_2(w)\bar{R}_{12}(z)L_1(z) = R_{12}(z, w)L_1(z)\bar{R}_{21}(w)L_2(w)R_{21}^F(w-z)$$

на комбинацию $P_2\bar{R}_{12}^{-1}(z)P_2^{-1}$ и возьмем следы в первом и втором матричных пространствах. В итоге получим

$$\begin{aligned} \text{tr}_{12} P_2\bar{R}_{12}^{-1}(z)P_2^{-1}L_2(w)\bar{R}_{12}(z)L_1(z) = \\ = \text{tr}_{12} P_2\bar{R}_{12}^{-1}(z)P_2^{-1}R_{12}(z, w)L_1(z)\bar{R}_{21}(w)L_2(w)R_{21}^F(w-z). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Удобно переписать $\bar{R}_{12}^{-1}$ в факторизованном виде:

$$\bar{R}_{12}^{-1}(z) = \sum_{ij} \bar{R}_{ij}^{-1} \otimes E_{jj}, \quad (3.33)$$

где

$$\bar{R}_{ij}^{-1} = -\sigma(\hbar)\Phi(-\hbar, q_{ij} + \hbar)E_{ii} + \sigma(\hbar)\Phi(z, q_{ij} + \hbar)E_{ij}.$$

Тогда левая часть (3.32) перейдет в

$$\sum_{ij} \text{tr}_{12}(P_j \bar{R}_{ij}^{-1} P_j^{-1} \otimes E_{jj}) L_2 \bar{R}_{12}(z) L_1.$$

С учетом того, что матрица $\bar{R}_{12}$ диагональна во втором матричном пространстве, и используя свойство цикличности следа, получим

$$\sum_{ij} \text{tr}_{12}(P_j \bar{R}_{ij}^{-1} P_j^{-1} \otimes I)(I \otimes L E_{jj}) \bar{R}_{12}(z) L_1.$$

Поскольку $L = WP$, где все матричные элементы W коммутируют с q_i , мы приходим к следующему тождеству:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \text{tr}_{12}(P_j \bar{R}_{ij}^{-1} P_j^{-1} \otimes I)(I \otimes W P_j E_{jj}) \bar{R}_{12}(z) L_1 &= \\ &= \sum_{ij} \text{tr}_{12} L_2(\bar{R}_{ij}^{-1} \otimes E_{jj}) \bar{R}_{12}(z) L_1 = \text{tr } L(w) \text{tr } L(z). \end{aligned}$$

Для вычисления правой части уравнения (3.32) мы используем тождество (3.31), чтобы переписать ее в виде

$$\text{tr}_{12} R_{12}^F(z - w) P_1 \bar{R}_{21}^{-1}(w) P_1^{-1} L_1(z) \bar{R}_{21}(w) L_2(w) R_{21}^F(w - z).$$

Учитывая, что матрица $\bar{R}_{21}$ диагональна в первом матричном пространстве, и используя свойство (3.26), можно легко убедиться, что под знаком следа матрица R^F может быть перенесена направо, где она сократится с матрицей R_{21}^F . Таким образом, мы получили выражение

$$\text{tr}_{12} P_1 \bar{R}_{21}^{-1}(w) P_1^{-1} L_1(z) \bar{R}_{21}(w) L_2(w). \quad (3.34)$$

Применяя теперь к нему технику, которую мы использовали выше при обработке правой части уравнения (3.32), заключаем, что выражение (3.34) равно $\text{tr } L(z) \text{tr } L(w)$. Тем самым мы доказали, что $\text{tr } L(z)$ коммутирует с $\text{tr } L(w)$. Совершенно аналогично можно доказать, что $\text{tr } L^{-1}(z)$ коммутирует с $\text{tr } L^{-1}(w)$ и с $\text{tr } L(w)$.

Приведем теперь пример простейшего представления алгебры (3.21) и (3.27), ассоциированного с эллиптической моделью РШ. Именно, следующий L -оператор удовлетворяет алгебре (3.27):

$$L(z) = \sum_{ij} \Phi(z, q_{ij} + \gamma) b_j P_j E_{ij}, \quad (3.35)$$

где

$$b_j = \prod_{a \neq j} \Phi(\gamma, q_{aj})$$

и параметр γ играет роль константы связи эллиптической модели РШ. Интересно отметить, что L -оператор того же вида (3.35) уже возникал в разделе 2 как результат гамильтоновой редукции, примененной к алгебре $T^*\widehat{GL}(N)(z, \bar{z})$. Таким образом, мы видим, что квантование сохраняет вид L -оператора, если только правильно выбрано упорядочение канонических переменных.

Назовем этот оператор L *квантовым L -оператором эллиптической модели РШ*. В самом деле, выбирая гамильтониан модели в виде $H = \text{tr } L(z)$, несложно убедиться, что квантовое каноническое преобразование

$$P_i^R = \prod_{a \neq i} \left(\frac{\sigma(q_{ai} + \gamma)}{\sigma(q_{ai})} \right)^{1/2} P_i \prod_{a \neq i} \left(\frac{\sigma(q_{ai})}{\sigma(q_{ai} - \gamma)} \right)^{1/2}, \quad (3.36)$$

где P_i^R — импульс в гамильтониане Руджинарса, переводит H в первый интеграл движения S_1 из семейства коммутирующих интегралов модели Руджинарса [10]. Более того, после канонического преобразования (3.36) L -оператор (3.35) в существенном совпадает с классическим L -оператором модели РШ.

Производящая функция для этого коммутирующего семейства может быть представлена в терминах L в следующем виде:

$$I(z, \mu) = : \det(L(z) - \mu) : = \sum_k (-\mu)^{N-k} I_k(z), \quad (3.37)$$

где нормальное упорядочение $::$ означает, что все операторы импульсов перенесены направо.

4. СВЯЗЬ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ СООТНОШЕНИЕМ $RLL = LLR$

В этом разделе мы устанавливаем связь квантовой L -операторной алгебры (3.27) с фундаментальным соотношением $RLL = LLR$.

В работе [21] коммутирующее семейство операторов модели Руджинарса было получено с помощью специального представления $\hat{L}$ алгебры

$$R_{12}^B(z - w) \hat{L}_1(z) \hat{L}_2(w) = \hat{L}_2(w) \hat{L}_1(z) R_{12}^B(z - w), \quad (4.1)$$

где $R^B(z)$ — R -матрица Белавина, являющаяся эллиптическим решением квантового уравнения Янга–Бакстера [22]. Явная форма матрицы R^B , которую мы используем в данной работе, хорошо известна и может быть найдена, например, в [27]. Для удобства читателя мы приводим конструкцию оператора $\hat{L}$ [28, 29].

Обозначим через $\mathbf{h}^*$ пространство весов алгебры $sl_N(\mathbf{C})$, которое может быть реализовано в $\mathbf{C}^N$ с базисом ϵ_i , $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$, как ортогональное дополнение к вектору $\sum_{i=1}^N \epsilon_i$. Обозначим через $\bar{\epsilon}_k$ ортогональную проекцию величин ϵ_k : $\bar{\epsilon}_k = \epsilon_k - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i$.

Для каждого $q \in \mathbf{h}^*$ можно ввести сплетающие векторы [30, 31]

$$\phi(z)_q^{q + \hbar \bar{\epsilon}_k} = \theta_j \left(\frac{z}{N} - \langle q, \bar{\epsilon}_k \rangle \right) / i\eta(\tau), \quad (4.2)$$

где

$$\theta_j(z) = \sum_{n \in \frac{N}{2} - j + N\mathbf{Z}} \exp 2\pi i \left[n \left(z + \frac{1}{2} \right) + \frac{n^2}{2N} \tau \right],$$

а $\eta(\tau) = p^{1/24} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - p^m)$ — эта-функция Ледекинда с $p = \exp 2\pi i \tau$.

Следуя работе [28], мы обозначим через $\bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j}$ элементы матрицы, обратной к $\phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j}$. Тогда соотношения ортогональности имеют вид

$$\sum_{j=1}^n \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_{k'} j} = \delta_{kk'}, \quad \sum_{k=1}^n \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j} \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j'} = \delta_{jj'}. \quad (4.3)$$

В дальнейшем будет активно использоваться следующая формула (см. [21]):

$$\sum_{m=1}^n \bar{\phi}(z)_{q'}^{q'+\hbar\bar{\epsilon}_j m} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_i m} = \frac{\theta(z + \langle q', \bar{\epsilon}_j \rangle - \langle q, \bar{\epsilon}_i \rangle)}{\theta(z)} \prod_{j' \neq j} \frac{\theta(\langle q', \bar{\epsilon}_{j'} \rangle - \langle q, \bar{\epsilon}_i \rangle)}{\theta(\langle q', \bar{\epsilon}_{j'} \rangle - \langle q', \bar{\epsilon}_j \rangle)}, \quad (4.4)$$

здесь $\theta(z)$ — θ -функция Якоби:

$$\theta(z) = - \sum_n e^{2\pi i(z + \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2}) + i\pi\tau(n + \frac{1}{2})^2} = \theta'(0) e^{-\zeta(\frac{1}{2})z^2} \sigma(z).$$

Формула (4.4) является следствием обобщенного тождества Коши

$$\det \left[\frac{\theta_j(u_k)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \right]_{j,k=1,\dots,n} = (-1)^{n-1} \frac{\theta(\sum_j u_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\theta(u_k - u_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)}.$$

В работах [29, 32] показано, что $\hat{L}$ -оператор

$$\hat{L}_{ij}(z) = \sum_{k=1}^N \phi(z + \gamma N)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k} \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j} e^{\hbar\bar{\epsilon}_k \frac{\partial}{\partial q_k}}, \quad (4.5)$$

действующий на пространстве функций на $\mathbf{h}^*$, удовлетворяет соотношению (4.1). Этот оператор $\hat{L}$ является $N \times N$ -обобщением 2×2 -мерного L -оператора Складина [33].

Сплетающие векторы $\phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k j}$, входящие в определение оператора $\hat{L}$, связывают матрицу R^B с болцмановскими весами для плакетной модели $A_{n-1}^{(1)}$. Напомним (см. [31]), что ненулевые болцмановские веса, зависящие от спектрального параметра z , явно задаются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{W} \begin{bmatrix} q + \hbar\bar{\epsilon}_i & & \\ q & z & q + 2\hbar\bar{\epsilon}_i \\ & q + \hbar\bar{\epsilon}_i & \end{bmatrix} &= \frac{\theta(z + \hbar)}{\theta(\hbar)}, \\ \tilde{W} \begin{bmatrix} q + \hbar\bar{\epsilon}_i & & \\ q & z & q + \hbar(\bar{\epsilon}_i + \bar{\epsilon}_j) \\ & q + \hbar\bar{\epsilon}_i & \end{bmatrix} &= \frac{\theta(-z + q_{ij})}{\theta(q_{ij})} \quad (i \neq j), \\ \tilde{W} \begin{bmatrix} q + \hbar\bar{\epsilon}_i & & \\ q & z & q + \hbar(\bar{\epsilon}_i + \bar{\epsilon}_j) \\ & q + \hbar\bar{\epsilon}_j & \end{bmatrix} &= \frac{\theta(z)}{\theta(\hbar)} \frac{\theta(\hbar + q_{ij})}{\theta(q_{ij})} \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $q_{ij} = \langle q, \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}_j \rangle$.

Матричные элементы R^B и плакетные веса связаны следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \sum_{i'j'} R^B(z-w)_{ij}^{i'j'} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k} \phi(w)_{q+\hbar\bar{\epsilon}_k}^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m)} \phi(w)_{q+\hbar\bar{\epsilon}_k}^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m)} = \\ = \sum_s \phi(w)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_s} \phi(z)_{q+\hbar\bar{\epsilon}_s}^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m)} \check{W} \begin{bmatrix} q+\hbar\bar{\epsilon}_k & & \\ q & z-w & q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m) \\ & q+\hbar\bar{\epsilon}_s & \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В дальнейшем мы будем использовать сокращенную запись

$$W_s^k[k+m] = \check{W} \begin{bmatrix} q+\hbar\bar{\epsilon}_k & & \\ q & z-w & q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m) \\ & q+\hbar\bar{\epsilon}_s & \end{bmatrix}.$$

Тогда формула, дуальная к (4.7), имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i'j'} \bar{\phi}(w)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k} \bar{\phi}(z)_{q+\hbar\bar{\epsilon}_k}^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m)} R^B(z-w)_{i'j'}^{ij} = \\ = \sum_s W_s^s[k+m] \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_s} \bar{\phi}(w)_{q+\hbar\bar{\epsilon}_s}^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_m)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В работе [21] был введен другой L -оператор $\tilde{L}$. Он связан с оператором $\hat{L}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ij}(z) \rightarrow \tilde{L}_{ij}(z) = \sum_{i'j'} \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_i} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_j} \hat{L}_{i'j'}(z) = \\ = \frac{\theta(z+\gamma+q_{ij})}{\theta(z)} \prod_{n \neq i} \frac{\theta(\gamma+q_{nj})}{\theta(q_{ni})} e^{\hbar\bar{\epsilon}_j \frac{\partial}{\partial q_j}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В дальнейшем нам также понадобится устранить из квантовой L -операторной алгебры (3.27) неголоморфную зависимость от спектрального параметра и параметра квантования. Этого можно добиться, если рассмотреть следующее преобразование L -оператора:

$$L(z) \rightarrow e^{\alpha(z)Q} e^{-\beta Q} L(z) e^{\beta Q} e^{-\alpha(z)Q}, \quad (4.10)$$

с $\alpha(z)$ — произвольной функцией спектрального параметра и β — некоторым комплексным числом. Поскольку преобразованный L -оператор также обладает структурой WP , то справедлива следующая формула:

$$L_2(w) e^{\alpha(z)Q_1} = e^{\alpha(z)Q_1} L_2(w) e^{\hbar\alpha(z)r_0}, \quad (4.11)$$

где мы использовали обозначение $r_0 = \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}$.

Вспоминая, что L -оператор (3.35) удовлетворяет квантовой L -операторной алгебре (3.27), и используя уравнение (4.11), мы можем легко найти алгебру, которой удовлетворяет преобразованный оператор L :

$$\check{R}_{12}(z, w)L_1(z)\check{\bar{R}}_{21}(w)L_2(w) = L_2(w)\check{\bar{R}}_{12}(z)L_1(z)\check{R}_{12}^F(z - w),$$

где матрицы $\check{R}$, $\check{\bar{R}}$ и $\check{R}^F$ имеют следующий вид:

$$\check{R}_{12}(z, w) = e^{-\alpha(z)Q_1 - \alpha(w)Q_2 + \beta Q_2} R_{12}(z, w) e^{\alpha(z)Q_1 + \alpha(w)Q_2 - \beta Q_1}, \quad (4.12)$$

$$\check{\bar{R}}_{12}(z) = e^{\hbar\alpha(z)r_0 - \alpha(z)Q_1 + \beta Q_2} \bar{R}_{12}(z) e^{\alpha(z)Q_1 - \beta Q_1}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \check{R}_{12}^F(z, w) &= e^{-\alpha(z)Q_1 - \alpha(w)Q_2 + \frac{\hbar}{2}(\alpha(w) - \alpha(z))r_0 + \beta Q_1} \times \\ &\times R_{12}^F(z, w) e^{\alpha(z)Q_1 + \alpha(w)Q_2 + \frac{\hbar}{2}(\alpha(w) - \alpha(z))r_0 - \beta Q_2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поскольку рассматриваемое преобразование оставляет вид квантовой L -операторной алгебры неизменным, преобразованные матрицы $\check{R}$, $\check{\bar{R}}$ и $\check{R}^F$ также удовлетворяют всем условиям согласованности. В частности, преобразование (4.14) задает еще одно решение уравнения (3.25). В случае $\beta = 0$ этот факт был отмечен в работе [14].

В частном случае $\beta = 2\pi i \frac{\hbar - \bar{\hbar}}{\tau - \bar{\tau}}$ и $\alpha(z) = 2\pi i \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} + \beta$ мы обнаруживаем, что матрицы $\check{R}$, $\check{\bar{R}}$ и $\check{R}^F$ задаются прежними формулами (3.13), (3.16) и (3.24) с глобальной заменой функции $\Phi(z, s) = \frac{\theta(z+s)}{\theta(z)\theta(s)}\theta'(0)e^{2\pi i \frac{z-\bar{z}}{\tau-\bar{\tau}}}$ на мероморфную функцию $\frac{\theta(z+s)}{\theta(z)\theta(s)}$. Преобразование с таким выбором параметров α и β переводит (с точностью до несущественных множителей) L -оператор (3.35) в оператор

$$L_{ij}(z) = \frac{\theta(z + q_{ij} + \gamma)}{\theta(z)\theta(q_{ij} + \gamma)} \prod_{n \neq j} \frac{\theta(q_{nj} + \gamma)}{\theta(q_{nj})} \mathbf{P}_j, \quad (4.15)$$

который является квазипериодической мероморфной матричнозначной функцией спектрального параметра:

$$L(z + 1) = L(z), \quad L(z + \tau) = e^{-2\pi i(\gamma + \hbar)} e^{-2\pi i Q} L(z) e^{2\pi i Q}.$$

Мы предполагаем, что L -оператор имеет вид $W\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}_i = e^{\hbar\bar{\epsilon}_i \frac{\partial}{\partial q_i}}$. Замена P на $\mathbf{P}$ сохраняет все условия согласования, поскольку все R -матрицы зависят лишь от разностей $q_i - q_j$. Таким образом, уравнение (3.27), в котором R -матрицы теперь заданы с помощью функции $\Phi(z, s) = \frac{\theta(z+s)}{\theta(z)\theta(s)}$, представляет собой мероморфную версию квантовой L -операторной алгебры, а уравнение (4.15) задает ее специальное мероморфное представление. В дальнейшем мы используем только эту мероморфную форму.

Сравнивая (4.15) и (4.9), мы устанавливаем, что L и $\tilde{L}$ связаны следующим образом:

$$\tilde{L}_{ij}(z) = \frac{\prod_{n \neq j} \theta(q_{nj})}{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ni})} L_{ij}(z). \quad (4.16)$$

Так как комбинированное преобразование (4.9), (4.16) от $\hat{L}$ к оператору L зависит только от параметра q , то можно сделать предположение, что *любое* представление L квантовой L -операторной алгебры (3.27) калибровочно-эквивалентно некоторому представлению $\hat{L}$ алгебры (4.1), причем калибровочная эквивалентность задается с помощью формулы

$$\hat{L}_{ij}(z) = \sum_{i'j'} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_{i'}} \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_{j'}} \frac{\prod_{n \neq j'} \theta(q_{nj'})}{\prod_{n \neq i'} \theta(q_{ni'})} L_{i'j'}(z). \quad (4.17)$$

Докажем это предположение. Пусть $\hat{L}$ – абстрактный L -оператор, удовлетворяющий алгебре (4.1). Введем оператор $\tilde{L}$ в соответствии с (4.9). Предположим, что оператор $\tilde{L}$ имеет структуру $W\mathbf{P}$, где ненулевые компоненты диагональной матрицы $\mathbf{P}$ имеют вид $\mathbf{P}_i = e^{\hbar\bar{\epsilon}_i \frac{\partial}{\partial q_i}}$, а элементы W коммутируют со всеми q_i . Тогда, подставляя оператор $\hat{L}$, выраженный через $\tilde{L}$, в уравнение (4.1) и пользуясь соотношением (4.8), мы найдем алгебру, которой удовлетворяют операторы $\tilde{L}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i'j' \\ abcd}} W_k^a [a+c] \delta_{a+c, i+k} \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_a} \phi(z)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_b} \times \\ & \quad \times \bar{\phi}(w)_q^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_a+\bar{\epsilon}_c)} \phi(w)_q^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_j+\bar{\epsilon}_d)} \tilde{L}_{bj}(z) \tilde{L}_{dl}(w) = \\ & = \sum_{\substack{i'j' \\ abcd}} W_a^j [j+l] \delta_{j+l, a+c} \bar{\phi}(w)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_k} \phi(w)_q^{q+\hbar\bar{\epsilon}_d} \times \\ & \quad \times \bar{\phi}(z)_q^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_k+\bar{\epsilon}_i)} \phi(z)_q^{q+\hbar(\bar{\epsilon}_c+\bar{\epsilon}_b)} \tilde{L}_{dc}(w) \tilde{L}_{ba}(z). \end{aligned}$$

Суммируя по индексам i' и j' и используя тождество (4.4), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{abc} W_k^b [b+a] \delta_{a+b, i+k} \frac{\theta(w+q_{ac}+\hbar\delta_{ab}-\hbar\delta_{jc})}{\theta(w)} \times \\ & \quad \times \prod_{n \neq a} \frac{\theta(q_{nc}+\hbar\delta_{nb}-\hbar\delta_{jc})}{\theta(q_{na}+\hbar\delta_{nb}-\hbar\delta_{ab})} \tilde{L}_{bj}(z) \tilde{L}_{cl}(w) = \\ & = \sum_{abc} W_a^j [j+l] \delta_{j+l, a+c} \frac{\theta(z+q_{ib}+\hbar\delta_{ik}-\hbar\delta_{bc})}{\theta(z)} \times \\ & \quad \times \prod_{n \neq i} \frac{\theta(q_{nb}+\hbar\delta_{nk}-\hbar\delta_{bc})}{\theta(q_{ni}+\hbar\delta_{nk}-\hbar\delta_{ik})} \tilde{L}_{kc}(w) \tilde{L}_{ba}(z). \end{aligned}$$

Зададим теперь оператор L , обращая соотношение (4.16). Подставляя этот оператор L в последнюю формулу, учитывая только ненулевые компоненты бoльцмановских весов и умножая обе части уравнения на функцию

$$\frac{\prod_{n \neq k} \theta(q_{nk})}{\prod_{n \neq j} \theta(q_{nj})} \frac{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ni}+\hbar\delta_{nk}-\hbar\delta_{ik})}{\prod_{n \neq l} \theta(q_{nl}+\hbar\delta_{nj}-\hbar\delta_{jl})},$$

мы в конце концов получим алгебру, которой удовлетворяют операторы L :

$$\begin{aligned}
 & \sum_s W_k^k [2k] \delta_i^k \frac{\theta(w + q_{ks} + \hbar - \hbar\delta_{js})}{\theta(w)} \frac{\prod_{n \neq k} \theta(q_{ns} - \hbar\delta_{js})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nj} - \hbar\delta_{js})} L_{kj}(z) L_{sl}(w) + \\
 & + \sum_s W_k^k [k + i] \frac{\theta(w + q_{is} - \hbar\delta_{js})}{\theta(w)} \frac{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nk} - \hbar\delta_{js})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nj} - \hbar\delta_{js})} L_{kj}(z) L_{sl}(w) + \\
 & + \sum_s W_k^i [i + k] \frac{\theta(q_{ki} + \hbar)}{\theta(q_{ki} - \hbar)} \frac{\theta(w + q_{ks} - \hbar\delta_{js})}{\theta(w)} \times \\
 & \quad \times \frac{\prod_{n \neq k} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{ni} - \hbar\delta_{js})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nj} - \hbar\delta_{js})} L_{ij}(z) L_{sl}(w) = \\
 & = \sum_s W_j^j [j + l] \left(\frac{\theta(q_{lj} + \hbar)}{\theta(q_{lj} - \hbar)} + 2\delta_{lj} \right) \frac{\theta(z + q_{is} + \hbar\delta_{ik} - \hbar\delta_{ls})}{\theta(z)} \times \\
 & \quad \times \frac{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nk} - \hbar\delta_{ls})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nl} - \hbar\delta_{ls})} L_{kl}(w) L_{sj}(z) + \\
 & + \sum_s W_l^j [j + l] \frac{\theta(z + q_{is} + \hbar\delta_{ik} - \hbar\delta_{js})}{\theta(z)} \times \\
 & \quad \times \frac{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nk} - \hbar\delta_{js})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nj} - \hbar\delta_{js})} L_{kj}(w) L_{sl}(z), \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

здесь во второй и третьей строках $i \neq k$. Отношение произведений тета-функций, возникающее в каждом члене уравнения (4.18), позволяет снять суммирование по s . Например, при $i \neq k$ получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\prod_{n \neq i} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nk} - \hbar\delta_{js})}{\prod_{n \neq s} \theta(q_{ns} + \hbar\delta_{nj} - \hbar\delta_{js})} = \\
 & = \delta_{is} \left(\delta_{ij} \frac{\theta(q_{ki})}{\theta(q_{ki} - \hbar)} \Big|_{j \neq k} + \delta_{kj} (1 - \delta_{ij}) + \frac{\theta(q_{ki} + \hbar) \theta(q_{ji})}{\theta(q_{ki}) \theta(q_{ji} + \hbar)} \Big|_{j \neq i} \right) + \\
 & + \delta_{ks} (1 - \delta_{kj}) \left(\delta_{ij} \frac{\theta(\hbar)}{\theta(q_{ik} + \hbar)} + \frac{\theta(q_{jk}) \theta(\hbar)}{\theta(q_{jk} + \hbar) \theta(q_{ik})} \Big|_{j \neq i} \right) + \\
 & + \delta_{js} \frac{\theta(q_{kj}) \theta(\hbar)}{\theta(q_{kj} - \hbar) \theta(q_{ji} + \hbar)} \Big|_{j \neq i}.
 \end{aligned}$$

Чтобы сравнить формулу (4.18) с (3.27), перепишем соотношение (3.27) с помощью уравнения (3.31) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & R_{12}^F(z - w) P_1 \bar{R}_{21}^{-1}(w) P_1^{-1} L_1(z) \bar{R}_{21}(w) L_2(w) = \\
 & = P_2 \bar{R}_{12}^{-1}(z) P_2^{-1} L_2(w) \bar{R}_{12}(z) L_1(z) R_{12}^F(z - w). \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

В компонентах алгебра (4.19) явно выписана в приложении В. Сравнивая компоненты (4.18) с такими же структурами из формулы (4.19), мы обнаружим, что они совпадают с точностью до общего множителя $\theta(z-w)\theta(\hbar)^2$. Тем самым мы показали, что любое представление алгебры (3.27) при преобразовании (4.17) переходит в представление алгебры (4.1). Установленное соответствие позволяет утверждать, что алгебра (3.27) обладает семейством из N коммутирующих интегралов движения и что формула детерминантного типа (3.37), доказанная для коммутирующего семейства в работе [21], также верна для L -оператора (3.35).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы описали динамическую R -матричную структуру квантовой эллиптической модели РШ. Квантовая L -операторная алгебра обладает семейством коммутирующих операторов. Мы обнаружили, что эта алгебра имеет неожиданно простую структуру и может быть явно проанализирована в компонентном разложении. Более того, мы питаем надежду, что проблема построения новых представлений для полученной алгебры может быть проще, чем соответствующая проблема для алгебры $RLL = LLR$.

В заключение приведем список интересных нерешенных проблем.

Напомним, что в классическом случае мы получили две различные пуассоновы алгебры, которые приводят к одной и той же классической L -операторной алгебре. Только одна из этих алгебр была проквантована. Интересно понять, можно ли проквантовать вторую алгебру, и показать, что соответствующая квантовая L -операторная алгебра изоморфна алгебре, описанной в данной работе.

Эллиптическая модель РШ, которая обсуждалась в статье, соответствует корневой системе A_{N-1} . Представляется возможным распространить указанный подход на случай других корневых систем и вычислить соответствующие L -операторные алгебры. Для этого необходимо найти подходящую параметризацию соответствующего кокасательного расслоения.

Обобщая наше рассмотрение на кокасательные расслоения над центрально-расширенными группами гладких отображений из римановых поверхностей старших родов в группу Ли, можно ожидать, что на этом пути удастся получить новые интегрируемые системы.

Известно, что системы КМ обобщаются на случай спиновых систем [34, 35, 36]. Недавно спиновое обобщение было также построено для эллиптической модели РШ [37]. Однако до настоящего времени не найдена гамильтонова формулировка этой модели. Можно надеяться, что в нашем подходе спиновые модели возникают как старшие представления L -операторной алгебры.

Вероятно, наиболее интересной и сложной проблемой является проблема разделения переменных в квантовой эллиптической модели РШ. До сих пор был явно решен только трехчастичный случай в тригонометрической модели РШ [38]. Можно было бы ожидать, что L -операторная алгебра, обсуждаемая в работе, окажется полезной при решении этой проблемы.

Авторы благодарны М. А. Ольшевскому и Н. А. Славнову за ценные обсуждения. Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00608, 96-02-19085 и 96-01-00551 и грантом ISF a96-1516.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Докажем, что предельная $\mathbf{r}$ -матрица (2.20) удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера. Для этого выпишем уравнение, которое следует из тождества Якоби для скобки (2.18):

$$\begin{aligned} & [\mathbf{r}_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w), \mathbf{r}_{13}^{\varepsilon\rho}(z, s) + \mathbf{r}_{23}^{\eta\rho}(w, s)] + [\mathbf{r}_{13}^{\varepsilon\rho}(z, s), \mathbf{r}_{23}^{\eta\rho}(w, s)] + \\ & + \frac{1}{\kappa} T_3^{\rho-1}(s) \{T_3^\rho(s), \mathbf{r}_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w)\} + \frac{1}{\kappa} T_1^{\varepsilon-1}(z) \{T_1^\varepsilon(z), \mathbf{r}_{23}^{\eta\rho}(w, s)\} - \\ & - \frac{1}{\kappa} T_2^{\eta-1}(w) \{T_2^\eta(w), \mathbf{r}_{13}^{\varepsilon\rho}(z, s)\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w) = & H_1^{\varepsilon\eta} H_2^{\eta\varepsilon} r_{12}^{\varepsilon\eta}(z, w) - \alpha f^{\varepsilon\eta}(z, w) + \beta I \otimes \text{tr}_3 H_3^{\varepsilon\eta} H_2^{\eta\varepsilon} r_{32}^{\varepsilon\eta}(z, w) + \\ & + \beta \text{tr}_3 H_1^{\varepsilon\eta} H_3^{\eta\varepsilon} r_{13}^{\varepsilon\eta}(z, w) \otimes I + \beta^2 \text{tr}_{34} H_3^{\varepsilon\eta} H_4^{\eta\varepsilon} r_{34}^{\varepsilon\eta}(z, w) I \otimes I. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Для исследования (A.1) нам нужно знать скобку Пуассона матрицы $\mathbf{T}^\varepsilon(z)$ с $H^{\eta\rho}$. Эта скобка легко выводится из уравнений (2.13), (2.14) и (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}_1^{\varepsilon-1}(z) \{ \mathbf{T}_1^\varepsilon(z), H_2^{\eta\rho} \} = & \sum_{i \neq j} H_i^{\varepsilon\rho} H_j^{\eta\varepsilon} \Phi(\varepsilon - \rho, q_{ij}) \left(E_{ii} - \frac{1}{N} I \right) \otimes E_{jj} - \\ & - \sum_{i \neq j} H_i^{\varepsilon\eta} H_j^{\eta\varepsilon} H_j^{\eta\rho} \Phi(\varepsilon - \eta, q_{ij}) \left(E_{ii} - \frac{1}{N} I \right) \otimes E_{jj} - \\ & - \sum_{i \neq j} H_i^{\varepsilon\rho} H_j^{\eta\varepsilon} \Phi(z - \rho, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj} + \\ & + \sum_{i \neq j} H_i^{\varepsilon\eta} H_j^{\eta\varepsilon} H_j^{\eta\rho} \Phi(z - \eta, q_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj} + \\ & + \sum_j \frac{1}{N} H_j^{\eta\rho} (\Phi(\varepsilon - \rho, 0) + \Phi(\eta - \varepsilon, 0) + \\ & + \Phi(z - \eta, 0) - \Phi(z - \rho, 0)) \left(E_{jj} - \frac{1}{N} I \right) \otimes E_{jj}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Уравнение (A.1) выполнено при любых значениях всех его параметров. Без потери общности мы можем положить $\rho = 0$ и $\eta = a\varepsilon$, где параметры a и ε вещественны. Сделаем замену переменных $H_i^{\varepsilon\eta}$: $H_i^{\varepsilon\eta} = 1 + h_i^{\varepsilon\eta}$, и разложим левую часть уравнения (A.1) по степеням ε и h .

Заметим, что матрица $\mathbf{r}^{\varepsilon\eta}(z, w)$ допускает следующее разложение по степеням h при $\varepsilon - \eta \rightarrow 0$:

$$\mathbf{r}^{\varepsilon\eta}(z, w) = \mathbf{r}(z, w) + \mathbf{r}_{\text{reg}}^{(1)}(z, w, \varepsilon)h + \mathbf{r}^{(2)}(z, w, \varepsilon)h^2 + o(\varepsilon - \eta), \quad (\text{A.4})$$

где $\mathbf{r}(z, w)$ задается уравнением (2.20). Матрица $\mathbf{r}_{\text{reg}}^{(1)}(z, w, \varepsilon)$ регулярна при $\varepsilon \rightarrow 0$, а зависимость от ε матрицы $\mathbf{r}^{(2)}(z, w, \varepsilon)$ несущественна. Подставляя выражение (A.4) в скобку $\mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{T}, \mathbf{r}\}$, получим

$$\mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{T}, \mathbf{r}\} = \mathbf{r}_{\text{reg}}^{(1)}(\varepsilon)\mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{T}, h\} + \mathbf{r}^{(2)}(\varepsilon)h\mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{T}, h\}. \quad (\text{A.5})$$

Ясно, что уравнение (A.1) должно выполняться во всех порядках по h и ε . Поскольку нам нужно найти уравнение для $\mathbf{r}$, мы рассматриваем только члены, не зависящие от h и ε в разложении уравнения (A.1). Члены нулевого порядка по h и ε в формуле (A.1) появляются из $\mathbf{r}^{\varepsilon\eta}$ и первого члена в формуле (A.5). Однако из явного выражения для скобки $\{\mathbf{T}, H\}$ следует, что

$$\{\mathbf{T}, h\}|_{h=0} = o(\varepsilon).$$

Теперь, принимая во внимание, что матрица $\mathbf{r}_{\text{reg}}^{(1)}(\varepsilon)$ регулярна в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, мы видим, что последние три члена в формуле (A.1) не дают вклада. Таким образом, в нулевом порядке по h и ε уравнение (A.1) сводится к классическому уравнению Янга–Бакстера на матрицу $\mathbf{r}(z, w)$.

Интересно, что основные эллиптические тождества (см. приложение Б) следуют из тождества Якоби для скобки (2.18), или, что эквивалентно, из уравнения Янга–Бакстера для $\mathbf{r}(z, w)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В этом приложении собраны основные тождества для эллиптических функций, сформулированные как набор функциональных соотношений на функцию $\Phi(z, w)$ [8]:

$$\Phi(z, x)\Phi(w, y) = \Phi(z, x - y)\Phi(z + w, y) + \Phi(z + w, x)\Phi(w, y - x), \quad (\text{B.1})$$

$$\Phi(z, x)\Phi(z, y) = \Phi(z, x + y)(\Phi(z, 0) + \Phi(x, 0) + \Phi(y, 0) - \Phi(z + x + y, 0)), \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} & \Phi(z - w, a - b)\Phi(z, x + b)\Phi(w, y + a) - \Phi(z - w, x - y)\Phi(z, y + a)\Phi(w, x + b) = \\ & = \Phi(z, x + a)\Phi(w, y + b)(\Phi(a - b, 0) + \Phi(x + b, 0) - \Phi(x - y, 0) - \Phi(a + y, 0)). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Уравнение (B.2) является предельным случаем уравнения (B.1) при $w \rightarrow z$, а уравнение (B.3) следует из (B.1) и (B.2). Заметим, что член с экспонентой $e^{-2\zeta(1/2)zs + 2\pi i s \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}}$ в $\Phi(z, s)$, равно как и линейный член $-2\zeta(1/2)z + 2\pi i \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}$ в $\Phi(z, 0)$, не важны, так как оба эти члена выпадают из соотношений (B.1), (B.2).

Для доказательства соотношения унитарности для матрицы R нам также требуется тождество, включающее $\mathcal{P}$ -функцию Вейерштрасса:

$$\Phi(z, s)\Phi(z, -s) = \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(s).$$

А чтобы доказать уравнение (2.67), мы используем следующее соотношение между производными функции Φ :

$$\frac{\partial \Phi(z, q_{ij})}{\partial z} = \frac{\partial \Phi(z, q_{ij})}{\partial q_{ij}} - (\Phi(z, 0) - \Phi(q_{ij}))\Phi(z, q_{ij}).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом приложении мы приводим явный вид квантовой L -операторной алгебры

$$\begin{aligned} R_{12}^F(z-w)P_1\bar{R}_{21}^{-1}(w)P_1^{-1}L_1(z)\bar{R}_{21}(w)L_2(w) = \\ = P_2\bar{R}_{12}^{-1}(z)P_2^{-1}L_2(w)\bar{R}_{12}(z)L_1(z)R_{12}^F(z-w) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

в компонентной форме. Левая часть уравнения (B.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)L_{ij}(z)L_{kl}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} - \\ - \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{ij} - \hbar)\Phi(w, q_{kj} - \hbar)L_{ij}(z)L_{jl}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(w, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{ij} - \hbar)L_{ij}(z)L_{il}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(z-w, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{ij} - \hbar)L_{kj}(z)L_{il}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} - \\ - \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(z-w, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)\Phi(w, q_{ij} - \hbar)L_{kj}(z)L_{jl}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(z-w, q_{ik})\Phi(w, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)L_{kj}(z)L_{kl}(w)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{j, k, l} \Phi(z-w, \hbar)\Phi(w, \hbar)\Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)L_{kj}(z)L_{kl}(w)E_{kj} \otimes E_{kl} - \\ - \sum_{j, k, l} \Phi(z-w, \hbar)\Phi(w, \hbar)\Phi(w + \hbar, q_{kj} - \hbar)L_{kj}(z)L_{jl}(w)E_{kj} \otimes E_{kl}. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (B.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k; j \neq l} \Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{il} - \hbar)\Phi(\hbar, q_{lj})L_{kl}(w)L_{ij}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(\hbar, q_{ki})\Phi(\hbar, q_{ij} - \hbar)\Phi(z-w, q_{lj} + \hbar\delta_{lj})L_{kj}(w)L_{il}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} - \\ - \sum_{i \neq k; j \neq l} \Phi(\hbar, q_{kl} - \hbar)\Phi(z, q_{il} - \hbar)\Phi(\hbar, q_{lj})L_{kl}(w)L_{lj}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} - \\ - \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)\Phi(z, q_{ij} - \hbar)\Phi(z-w, q_{lj} + \hbar\delta_{lj})L_{kj}(w)L_{jl}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j \neq l} \Phi(z, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{kl} - \hbar)\Phi(\hbar, q_{lj})L_{kl}(w)L_{kj}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} + \\ + \sum_{i \neq k; j, l} \Phi(z, q_{ik})\Phi(\hbar, q_{kj} - \hbar)\Phi(z-w, q_{lj} + \hbar\delta_{lj})L_{kj}(w)L_{kl}(z)E_{ij} \otimes E_{kl} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \neq l; i} \Phi(z, \hbar) \Phi(\hbar, q_{il} - \hbar) \Phi(\hbar, q_{lj}) L_{il}(w) L_{ij}(z) E_{ij} \otimes E_{il} + \\
& + \sum_{i, j, l} \Phi(z, \hbar) \Phi(\hbar, q_{ij} - \hbar) \Phi(z - w, q_{lj} + \hbar \delta_{lj}) L_{ij}(w) L_{il}(z) E_{ij} \otimes E_{il} - \\
& - \sum_{j \neq l; i} \Phi(z, \hbar) \Phi(z + \hbar, q_{il} - \hbar) \Phi(\hbar, q_{lj}) L_{il}(w) L_{lj}(z) E_{ij} \otimes E_{il} - \\
& - \sum_{i, j, l} \Phi(z, \hbar) \Phi(z + \hbar, q_{ij} - \hbar) \Phi(z - w, q_{lj} + \hbar \delta_{jl}) L_{ij}(w) L_{jl}(z) E_{ij} \otimes E_{il}.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *O. Babelon, C. M. Viallet.* Phys. Lett. B. 1990. V. 237. P. 411.
- [2] *J. Avan, M. Talon.* Phys. Lett. B. 1993. V. 303. P. 33-37.
- [3] *Ж. Аван, О. Бабелон, М. Талон.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 67-89.
- [4] *Е. К. Склянин.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 227-237.
- [5] *H. W. Braden, T. Suzuki.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 30. P. 147.
- [6] *J. Avan, G. Rollet.* The classical r -matrix for the relativistic Ruijsenaars-Schneider system. Preprint BROWN-HET-1014, 1995.
- [7] *Yu. B. Suris.* Why are the rational and hyperbolic Ruijsenaars-Schneider hierarchies governed by the same R -matrix as the Calogero-Moser ones? hep-th/9602160.
- [8] *F. W. Nijhoff, V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin, O. Ragnisco.* Dynamical r -matrix for the elliptic Ruijsenaars-Schneider model. solv-int/9603006.
- [9] *Yu. B. Suris.* Elliptic Ruijsenaars-Schneider and Calogero-Moser hierarchies are governed by the same r -matrix. solv-int/9603011.
- [10] *S. N. Ruijsenaars.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191.
- [11] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313.
- [12] *A. Gorsky, N. Nekrasov.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 414. P. 213; 1995. V. 436. P. 582; *A. Gorsky.* Integrable many body systems in the field theories. Preprint UUITP-16/94, 1994.
- [13] *G. E. Arutyunov, P. B. Medvedev.* Phys. Lett. A. 1996. V. 223. P. 66-74.
- [14] *J. Avan, O. Babelon, E. Billey.* The Gervais-Neveu-Felder equation and the quantum Calogero-Moser systems. Preprint PAR LP THE 95-25, May 1995; hep-th/9505091 (to appear in Commun. Math. Phys.).
- [15] *G. Felder.* Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves. hep-th/9407154.
- [16] *J. L. Gervais, A. Neveu.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 238. P. 125.
- [17] *O. Babelon, D. Bernard, E. Billey.* A quasi-Hopf algebra interpretation of quantum 3-j and 6-j symbols and difference equations. Preprint PAR LP THE 95-51, IHES/P/95/91, q-alg/9511019.
- [18] *G. E. Arutyunov, S. A. Frolov.* Quantum dynamical R -matrices and quantum Frobenius group. q-alg/9610009.
- [19] *G. E. Arutyunov, S. A. Frolov, P. B. Medvedev.* Elliptic Ruijsenaars-Schneider model via the Poisson reduction of the affine Heisenberg double. hep-th/9607170.
- [20] *G. E. Arutyunov, S. A. Frolov, P. B. Medvedev.* Elliptic Ruijsenaars-Schneider model from the cotangent bundle over the two-dimensional current group. hep-th/9608013.
- [21] *K. Hasegawa.* Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices. q-alg/9512029.
- [22] *A. A. Belavin.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 180. P. 189-200.
- [23] *P. I. Etingof, I. B. Frenkel.* Central extensions of current groups in two dimensions. hep-th/9303047.
- [24] *F. Falceto, K. Gawedski.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 159. P. 549.

- [25] *L. D. Faddeev*. Integrable models in $(1 + 1)$ -dimensional quantum field theory. In: Recent advances in field theory and statistical mechanics. Eds J. B. Zuber, R. Stora (Les Houches Summer School Proc. Session XXXIX, 1982). Elsevier Sci. Publ., 1984. P. 561.
- [26] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin*. Quantum spectral transform method. Recent developments. In: Integrable quantum field theories. Eds J. Hietarinta, C. Montonen; Lect. Notes. Phys. 1982. V. 51. P. 61.
- [27] *M. P. Richey, C. A. Tracy*. J. Stat. Phys. 1986. V. 42. P. 311–348.
- [28] *Y. Quano, A. Fujii*. Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. № 17. P. 1585–1597.
- [29] *K. Hasegawa*. J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 3211–3228.
- [30] *R. J. Baxter*. Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 1–24; P. 25–47; P. 48–71.
- [31] *M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado*. Lett. Math. Phys. 1987. V. 14. P. 123–131; Nucl. Phys. B. 1988. V. 300. P. 74–108.
- [32] *K. Hasegawa*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 11. P. 6158–6171.
- [33] *Е. К. Склянин*. Функци. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. В. 4. С. 27–34; Т. 17. В. 4. С. 34–48.
- [34] *I. M. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon*. Spin generalization of Calogero–Moser system and the matrix KP equation. hep-th/9411160.
- [35] *N. Nekrasov*. Holomorphic bundles and many-body systems. hep-th/9503157.
- [36] *B. Enriquez, V. Rubtsov*. Math. Research Lett. 1996. V. 3. № 3. P. 343–358.
- [37] *I. M. Krichever, A. V. Zabrodin*. Spin generalizations of the Ruijsenaars–Schneider model, non-abelian 2D Toda chain and representations of Sklyanin algebra. hep-th/9505039.
- [38] *V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin*. Separation of variables for A_2 Ruijsenaars model and new integral representation for A_2 Macdonald polynomials. q-alg/9602023.

Поступила в редакцию 30.XII.1996 г.

G. E. Arutyunov, S. A. Frolov, L. O. Chekhov
 R -MATRIX QUANTIZATION OF THE ELLIPTIC
RUIJSENAARS–SCHNEIDER MODEL

It is shown that the classical L -operator algebra of the elliptic Ruijsenaars–Schneider model can be realized as a subalgebra of the algebra of functions on the cotangent bundle over the centrally extended current group in two dimensions. It is governed by two dynamical r and $\bar{r}$ -matrices satisfying a closed system of equations. The corresponding quantum R and $\bar{R}$ -matrices are found as solutions to quantum analogs of these equations. We present the quantum L -operator algebra and show that the system of equations for R and $\bar{R}$ arises as the compatibility condition for this algebra. It turns out that the R -matrix is twist-equivalent to the Felder elliptic R^F -matrix with $\bar{R}$ playing the role of the twist. The simplest representation of the quantum L -operator algebra corresponding to the elliptic Ruijsenaars–Schneider model is obtained. The connection of the quantum L -operator algebra to the fundamental relation $RLL = LLR$ with Belavin's elliptic R -matrix is established. As a byproduct of our construction, we find a new N -parameter elliptic solution to the classical Yang–Baxter equation.