Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Гох, Причинная структура квантовых стохастических мер, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 218–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:19:44

Дж. Гох*

ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕР

Обсуждается взаимосвязь микропричинности квантового поля и макропричинности квантового шума, соответствующего этому полю. Выведено квантовое стохастическое дифференциальное уравнение в форме Стратоновича для оператора эволюции. Установлена связь этого уравнения с уравнением, возникающим в теории квантового стохастического предела Аккарди, Фриджеро и Лю. Определен класс некоммутативных представлений исчисления Стратоновича. Выяснена связь этого исчисления с квантовым исчислением Ито–Хадсона–Партасарати. В приближении слабой связи квантовое поле, взаимодействующее с квантово-механической системой, описано с помощью квантового шума. Предложен синтез стохастических исчислений Ито и Стратоновича, и объяснен их физический смысл.

ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории поля широко используется теория источников в качестве метода построения порождающих функционалов, ассоциированных с квантовыми полями. В данной статье мы исследуем поведение квантового поля в присутствии источника. Квантовое поле является термостатом по отношению к квантово-механической системе, которая, если пользоваться терминологией [1], выступает в роли источника. Для простоты мы предполагаем, что термостат находится в основном состоянии. В отличие от специалистов по теории поля, которые исследуют пределы типа S -матрицы, мы рассматриваем масштабный предел (в сущности, предел ван Хова, или слабой связи). Если λ – безразмерная константа связи, определяющая силу взаимодействия система–термостат, то для вычисления предела мы изменяем масштаб времени пропорционально λ^{-2} и устремляем λ к нулю. Это отделяет макроскопическую шкалу времени от исходной микроскопической. Мы исследуем предельную динамику, в которой квантовое поле выступает в качестве источника квантового шума для системы.

На микроскопическом уровне мы вводим понятие упорядочения по времени квантового поля в гейзенберговом представлении. Оно играет центральную роль в определении причинной функции Грина, т.е. пропагатора. На макроскопическом уровне мы используем упорядочение по времени, заимствованное, по существу, из трактовки таких проблем, как согласованность процессов. Как хорошо известно, пропагатор является комбинацией запаздывающей и опережающей функций Грина [2]. Аналогичным образом про-

*Department of Mathematical Physics, St.Patrick's College Maynooth, Co. Kildare, Ireland

цесс, по которому вычисляется интеграл Стратоновича, т.е. стохастическая мера, есть сумма запаздывающей и опережающей компонент. Этот факт имеет место как в классическом стохастическом исчислении, так и в квантовом (некоммутативном) исчислении, развиваемом в данной статье. Наш основной тезис состоит в том, что если квантовый броуновский шум получается из квантового поля в пределе слабой связи, то *микрпричинная структура квантового поля, определяемая пропагатором, заменяется в точности макрпричинной структурой квантового броуновского шума в форме Стратоновича*. Схематически это можно представить в виде:

пропагатор	–	исчисление Стратоновича;
запаздывающая функция Грина	–	исчисление Ито.

Статья организована следующим образом. В первом разделе мы напоминаем стандартное построение квантового броуновского движения по бозонным квантовым шумовым полям и основы квантовых исчислений Ито и Стратоновича. Во втором разделе введено понятие “расщепленной” дельта-функции, которую мы используем при построении полей Стратоновича. В разделе 3 изложено конкретное построение объекта, который мы называем квантовым шумом Стратоновича, и показано, как этот шум соотносится с шумом в форме Ито. В разделе 4 обсуждается предел слабой связи в классическом случае система–источник. С помощью функциональных методов, аналогичных используемым в квантовой теории поля, выведены предельные уравнения движения. Эти методы неприменимы в случае квантового источника, который рассматривается в разделе 5, где мы выводим предельные динамические уравнения в форме Стратоновича, т.е. в терминах шумовых полей Стратоновича, построенных в разделе 3. Затем мы доказываем несколько теорем, обобщающих результаты раздела 4 на квантовые системы. В частности, мы показываем, что преобразование в форму Ито приводит к результатам Аккарди, Фриджеро и Лю [3].

Хочется надеяться, что данная статья откроет новые перспективы для теории Аккарди, Фриджеро и Лю, в частности, сделав ясным ее физический смысл для специалистов по квантовой теории поля. Кроме того, есть надежда, что предлагаемая некоммутативная версия стохастического исчисления Стратоновича станет эффективным средством трактовки квантовых стохастических процессов.

1. НЕКОММУТАТИВНЫЕ ШУМОВЫЕ ПОЛЯ

Введем следующие обозначения: $[A, B]$ – коммутатор операторов A и B , K – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$, $t \geq 0$ – время и $\beta^\sharp(h, t)$ ($h \in K$) – операторы бозонного поля, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\beta(h, t), \beta^\dagger(k, s)] = \langle h, k \rangle \delta(t - s), \quad (1.1)$$

$$[\beta(h, t), \beta(k, s)] = 0. \quad (1.2)$$

Предполагается, что существует вектор Ψ , называемый вакуумным, для которого $\beta(h, t)\Psi = 0$.

С помощью этих операторов может быть построено некоммутативное стохастическое исчисление [4]. Для этого положим

$$B^\sharp(h, t) := \int_0^t \beta^\sharp(h, s) ds. \quad (1.3)$$

Тогда оператор $Q(h, t) := B(h, t) + B^\dagger(h, t)$ в состоянии Ψ соответствует классическому броуновскому движению с коэффициентом диффузии $\|h\|^2$. При этом стохастические меры Ито $\delta B^\sharp(h, t) := B^\sharp(h, t + dt) - B^\sharp(h, t)$, относящиеся к различным инфинитезимальным интервалам $(t, t + dt)$, независимы. Причинная интерпретация стохастических мер Ито заключается в том, что они *направлены в будущее*. Для согласованного процесса X_t формально определяется интеграл Ито [4]

$$\int_0^t X_s \delta B^\sharp(h, s) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N X_{\frac{nt}{N}} \left\{ B^\sharp\left(h, \frac{(n+1)t}{N}\right) - B^\sharp\left(h, \frac{nt}{N}\right) \right\}. \quad (1.4)$$

Меры Ито коммутируют с подынтегральным выражением, т.е.

$$\int_0^t X_s \delta B^\sharp(h, s) \equiv \int_0^t \delta B^\sharp(h, s) X_s. \quad (1.5)$$

Как в классическом, так и в некоммутативном случае в исчислении Ито не выполняется правило Лейбница. В частности,

$$\delta\{B(f, t)B^\dagger(g, t)\} = B(f, t)\delta B^\dagger(g, t) + \delta B(f, t)B^\dagger(g, t) + \langle f, g \rangle dt. \quad (1.6)$$

Вообще для процессов Ито [4] X_t и Y_t имеем

$$\delta\{X_t Y_t\} = X_t \delta Y_t + \delta X_t Y_t + \delta X_t \delta Y_t. \quad (1.7)$$

Произведение мер имеет порядок $(dt)^2$, за исключением

$$\delta B(f, t) \delta B^\dagger(g, t) = \langle f, g \rangle dt. \quad (1.8)$$

Помимо исчисления Ито существует стохастическое исчисление Стратоновича. В последнем используется мера $dB^\sharp(h, t) = B^\sharp(h, t + \frac{1}{2}dt) - B^\sharp(h, t - \frac{1}{2}dt)$, интеграл по которой называется интегралом Стратоновича и определяется формулой

$$\int_0^t X_s dB^\sharp(h, s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N X_{\frac{nt}{N}} \left\{ B^\sharp\left(h, \frac{(n+1/2)t}{N}\right) - B^\sharp\left(h, \frac{(n-1/2)t}{N}\right) \right\}. \quad (1.9)$$

Стохастические меры Стратоновича $dB^\sharp(h, t)$ *симметричны относительно прошлого и будущего*. Они не коммутируют с согласованными подынтегральными выражениями. В исчислении Стратоновича выполняется правило Лейбница. При замене детерминированного физического уравнения классическим стохастическим представление Стратоновича ближе по форме к оригиналу, чем представление Ито. Ниже мы увидим, что в квантовом случае это тоже так.

В данной статье мы покажем, как построить исчисление Стратоновича с помощью полевых операторов бозонного поля. Главную роль в этом построении играют обобщенные функции, которые мы называем “расщепленными” δ -функциями. Проблема, которую мы хотим решить, иллюстрируется в исчислении Ито путем вычисления следующего интеграла с использованием формального соотношения $\delta B^\sharp(h, t) = \beta^\sharp(h, t)dt$:

$$\int_0^t B(g, t_1) \delta B^\dagger(f, t_1) = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \beta(g, t_2) \beta^\dagger(f, t_1), \quad (1.10)$$

где $\theta(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Процесс $B(g, t)$ согласован. Поэтому его можно переставить с мерой в (1.10). Таким образом мы получаем, что

$$[\beta(g, t_2), \beta^\dagger(f, t_1)] \theta(t_1 - t_2) \equiv 0. \quad (1.11)$$

2. “РАСЩЕПЛЕННЫЕ” ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

Обозначим через S_P пространство пробных функций вещественной переменной с конечным числом точек разрыва первого рода. В S_P задана топология равномерной сходимости. Аналогично определяется пространство $S_P(I)$ функций, заданных на некотором замкнутом интервале I . Мы не намерены определять производные обобщенных функций и поэтому не накладываем на пробные функции какие-либо условия гладкости.

Расщепленные дельта-функции $\delta_+(t)$ и $\delta_-(t)$ суть элементы дуального пространства S'_P , определяемые равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \delta_\pm(t) := f(0^\pm) \quad \forall f \in S_P, \quad (2.1)$$

где $f(0^\pm)$ – это предел $f(t)$ при стремлении t к нулю справа или слева, соответственно.

ЛЕММА. Пусть функция $G(t)$ интегрируема. Тогда справедливо следующее равенство в смысле сходимости обобщенных функций класса S'_P :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} G\left(\frac{t}{a}\right) = G_+ \delta_+(t) + G_- \delta_-(t), \quad (2.2)$$

где $G_+ := \int_0^\infty G(t) dt$ и $G_- := \int_{-\infty}^0 G(t) dt$.

Доказательство непосредственно следует из того, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} G\left(\frac{t}{a}\right) f(t) dt &= \int_0^\infty G(u) f(au) du + \int_{-\infty}^0 G(u) f(au) du \rightarrow \\ &\rightarrow G_+ f(0^+) + G_- f(0^-) \end{aligned}$$

при $a \rightarrow 0^+$.

Заметим, что сужение $a\delta_+(t) + b\delta_-(t)$ на пространство гладких функций S эквивалентно $(a+b)\delta(t)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ШУМОВЫХ ПОЛЕЙ СТРАТОНОВИЧА

Пусть $\kappa(\cdot, \cdot)$ – комплексная форма на K , антилинейная по первой переменной и линейная по второй. Рассмотрим бозонные поля $\gamma^\sharp(h, t)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\gamma(f, t), \gamma^\dagger(h, s)] = \kappa(f, h)\delta_+(t - s) + \overline{\kappa(h, f)}\delta_-(t - s), \quad (3.1)$$

$$[\gamma(f, t), \gamma(h, s)] = 0. \quad (3.2)$$

Для совместности с коммутационными соотношениями (1.1) и (1.2) мы потребуем, чтобы правые части (1.1) и (3.1) совпадали на гладких функциях, т.е.

$$\kappa(f, h) + \overline{\kappa(h, f)} \equiv \langle f, h \rangle. \quad (3.3)$$

Это означает, что $\kappa(f, h) = \frac{1}{2}\langle f, h \rangle + \frac{i}{2}\sigma(f, h)$, где σ – полуторалинейная форма на K .

Определим операторы $\Gamma^\sharp(h, t)$ следующим образом:

$$\Gamma^\sharp(h, t) := \int_0^t \gamma^\sharp(h, s) ds. \quad (3.4)$$

Тогда

$$[\Gamma(h, t), \Gamma^\dagger(f, s)] = \min(t, s)\langle h, f \rangle, \quad (3.5)$$

поскольку левая часть равна

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \int_0^s ds' \left\{ \kappa(h, f)\delta_+(t' - s') + \overline{\kappa(f, h)}\delta_-(t' - s') \right\} = \\ & = \left\{ \kappa(h, f) + \overline{\kappa(f, h)} \right\} \int_0^t dt' \int_0^s ds' \delta(t' - s'). \end{aligned}$$

Наряду с (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t d\Gamma(h, t_1) \Gamma^\dagger(f, t_1) &= \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_2 - t_1) \gamma(h, t_2) \gamma^\dagger(f, t_1) = \\ &= \int dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_2 - t_1) \gamma^\dagger(f, t_1) \gamma(h, t_2) + \kappa(h, f)t, \end{aligned}$$

поскольку $\theta(0^+) = 1$ и $\theta(0^-) = 0$. Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^t \Gamma(h, t_1) d\Gamma(f, t_1) &= \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \gamma(h, t_2) \gamma^\dagger(f, t_1) = \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \gamma^\dagger(f, t_1) \gamma(h, t_2) + \overline{\kappa(f, h)}t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t \Gamma(h, t_1) d\Gamma^\dagger(f, t_1) + \int_0^t d\Gamma(h, t_1) \Gamma^\dagger(f, t_1) = \\ = \Gamma(h, t) \Gamma^\dagger(f, t) \equiv \Gamma^\dagger(f, t) \Gamma(h, t) + \langle h, f \rangle t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Итак, наши предположения корректны. Заметим, что шум в данном случае – это модификация шума Стратоновича, который соответствует случаю $\sigma \equiv 0$.

Конкретно построение шума может быть выполнено следующим образом. Пусть $L_P^2(\mathbf{R}^+) = L^2(\mathbf{R}^+) \cap S_P(\mathbf{R}^+)$, $L_P^2(\mathbf{R}^+, K) = K \otimes L_P^2(\mathbf{R}^+)$ и $\mathcal{H}$ – бозонное фоковское пространство над $L_P^2(\mathbf{R}^+, K)$ с вакуумным вектором Ψ . Элемент ξ из $L_P^2(\mathbf{R}^+, K)$ можно рассматривать как K -значное отображение $t \mapsto \xi_t$, заданное на $\mathbf{R}^+$ и имеющее в каждой точке односторонние пределы $\xi_{t\pm}$. Положим

$$\Psi(\xi) := \bigotimes_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \otimes^n \xi \right\}.$$

Тогда оператор $\gamma(f, t)$ определяется равенством

$$\gamma(f, t) \Psi(\xi) := \left\{ \kappa(f, \xi_{t+}) + \overline{\kappa(\xi_{t-}, f)} \right\} \Psi(\xi). \quad (3.7)$$

Для $\delta t > 0$ определим $\delta B^\sharp(f, t)$ равенством

$$\delta B^\sharp(f, t) := \int_t^{t+\delta t} ds \gamma^\sharp(f, s). \quad (3.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta B(f, t) \Psi(\xi) &= \int_t^{t+\delta t} ds \left\{ \kappa(f, \xi_{s+}) + \overline{\kappa(\xi_{s-}, f)} \right\} \Psi(\xi) = \\ &= \int_t^{t+\delta t} ds \left\{ \frac{1}{2} \langle f, \xi_{s+} + \xi_{s-} \rangle + i\sigma(f, \xi_{s+}) - i\sigma(f, \xi_{s-}) \right\} \Psi(\xi) = \\ &= \int_t^{t+\delta t} ds \langle f, \xi_s \rangle \Psi(\xi). \end{aligned}$$

Это позволяет отождествить $\delta B^\sharp(f, t)$ с приращением квантового броуновского движения в исчислении Хадсона–Партасарати. Таким образом,

$$\int_t^{t+\delta t} ds \gamma^\sharp(f, s) = \delta B^\sharp(f, t) \equiv \beta^\sharp(f, t) \delta t. \quad (3.9)$$

Заметим, что стохастическая мера Стратоновича $d\Gamma^\sharp(f, t) = \gamma^\sharp(f, t) dt$ отличается от стохастической меры Ито, определенной в (3.8).

4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

С физической точки зрения вышеприведенные рассуждения напоминают методы, используемые в теореме Вика. Ниже мы приведем конкретный пример того, как шумовые поля могут возникать в квантовой теории поля.

Пусть $\phi_\omega(\mathbf{r}, t)$ – квантовое поле. Его можно разложить на положительно- и отрицательно-частотные компоненты: $\phi_\omega(\mathbf{r}, t) = \phi_\omega^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \phi_\omega^{(-)}(\mathbf{r}, t)$, где

$$\begin{aligned}\phi_\omega^{(+)}(\mathbf{r}, t) &:= \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} e^{-i[(\omega(\mathbf{k}) - \omega)t - \mathbf{k}\mathbf{r}]} a(\mathbf{k}), \\ \phi_\omega^{(-)}(\mathbf{r}, t) &:= \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} e^{i[(\omega(\mathbf{k}) - \omega)t - \mathbf{k}\mathbf{r}]} a^\dagger(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Спектр частот $\omega(\mathbf{k})$ можно выбрать ограниченным снизу. Предполагается, что поля $a^\dagger(\mathbf{k})$ подчиняются следующим бозонным коммутационным соотношениям:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = z(\mathbf{k})\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0. \quad (4.2)$$

Если в качестве $z(\mathbf{k})$ взять $(2\pi)^2 2\omega(\mathbf{k})$, то формулы становятся явно ковариантными.

Двухточечная функция Грина для вакуумного состояния $\langle \cdot \rangle_R$ имеет вид

$$\Delta^\omega(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') := \langle \phi_\omega(\mathbf{r}, t) \phi_\omega(\mathbf{r}', t') \rangle_R = \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} e^{i[(\omega(\mathbf{k}) - \omega)(t - t') - \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}.\quad (4.3)$$

Пропагатор (запаздывающая функция Грина) – это

$$\begin{aligned}\Delta_T^\omega(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &:= \langle T \phi_\omega(\mathbf{r}, t) \phi_\omega(\mathbf{r}', t') \rangle_R = \\ &= \Delta^\omega(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \theta(t - t') + \Delta^\omega(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) \theta(t' - t) = \\ &= \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} e^{-i[(\omega(\mathbf{k}) - \omega)|t - t'| - \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

где T обозначает упорядочение по времени.

Пусть $L_z^2(\mathbf{R}^3)$ – гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_z := \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} \overline{f(\mathbf{k})} g(\mathbf{k}) \quad (4.5)$$

и $\mathcal{H}_R$ – бозонное фоковское пространство над этим гильбертовым пространством. Операторы рождения и уничтожения на $\mathcal{H}_R$ определяются формулами

$$A^\dagger(g) \equiv \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} g(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (4.6)$$

и т.п. Они удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям вида

$$[A(f), A^\dagger(g)] = \langle f, g \rangle_z. \quad (4.7)$$

Заметим, что если $j(\mathbf{r}, t) = j(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ и $g(\mathbf{k}) = z(\mathbf{k}) \int d^3r j(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, то

$$\int d^3r j(\mathbf{r}, t)\phi_0^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r j(\mathbf{r})\phi_\omega^{(-)}(\mathbf{r}, t) \equiv A^\dagger(S_t^\omega g), \quad (4.8)$$

где S_t^ω — однопараметрическая унитарная группа на $L_z^2(\mathbf{R}^3)$, действие которой определяется следующим равенством:

$$(S_t^\omega g)(\mathbf{k}) := e^{i[\omega(\mathbf{k}) - \omega]t} g(\mathbf{k}). \quad (4.9)$$

Введем поля

$$\begin{aligned} b_\lambda^\dagger(f, \omega, t) &:= \frac{1}{\lambda} \int d^3r \hat{f}(\mathbf{r}) \phi_\omega^{(-)}(\mathbf{r}, t/\lambda^2) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int \frac{d^3k}{z(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}) e^{i[\omega(\mathbf{k}) - \omega]t/\lambda^2} a^\dagger(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\lambda} A^\dagger(S_{t/\lambda^2}^\omega g). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [b_\lambda(g, \omega, t), b_\lambda^\dagger(f, \omega', s)] &= \frac{1}{\lambda^2} e^{i(\omega - \omega')s/\lambda^2} \int \frac{d^3k}{z(\mathbf{k})} \overline{g(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}) e^{i[\omega(\mathbf{k}) - \omega](s-t)/\lambda^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} e^{i(\omega - \omega')s/\lambda^2} \langle S_{(t-s)/\lambda^2}^\omega g, f \rangle_z. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если $\lambda \rightarrow 0$, то по лемме Римана–Лебега при $\omega \neq \omega'$ коммутатор (4.11) стремится к нулю. Используя лемму из раздела 2, получаем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [b_\lambda(g, \omega, t), b_\lambda^\dagger(f, \omega', s)] = \delta_{\omega\omega'} \left\{ (g | f)_\omega^T \delta_+(t-s) + \overline{(f | g)_\omega^T} \delta_-(t-s) \right\}, \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} (g | f)_\omega^T &= \int_0^\infty d\tau \langle S_\tau^\omega g, f \rangle_z = \int_{-\infty}^0 d\tau \langle g, S_\tau^\omega f \rangle_z = \\ &= \int \frac{d^3k}{z(\mathbf{k})} \overline{g(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i[\omega(\mathbf{k}) - \omega]\tau} = (g | f)_\omega + i\sigma_\omega(g, f). \end{aligned} \quad (4.13)$$

С помощью тождества

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{ixt} = \frac{1}{i(x - i0^+)} = \pi\delta(x) - i\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

устанавливаем, что

$$(g | f)_\omega = \pi \int \frac{d^3k}{z(\mathbf{k})} \overline{g(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega), \quad (4.14a)$$

$$\sigma_\omega(g, f) = \mathcal{P} \int \frac{d^3k}{z(\mathbf{k})} \overline{g(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}) \frac{1}{\omega(\mathbf{k}) - \omega}. \quad (4.14b)$$

Для описания квантового поля, взаимодействующего с классической системой, важен волновой оператор $U_t(\lambda)$, определяемый равенством

$$U_t(\lambda) := T \exp \left\{ \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t d\tau H_I(\tau) \right\}, \quad (4.15)$$

где $H_I(t)$ – гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия, т.е.

$$H_I(t) := \hbar \int d^3 r \left\{ j(\mathbf{r}, t) \phi_0^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{э. с.} \right\}. \quad (4.16)$$

Заметим, что

$$\left\langle \exp \left\{ i \int d^4 x \left\{ j(x) \phi_0^{(-)}(x) + \text{э. с.} \right\} \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' j(x) \overline{j(x')} \Delta^0(x, x') \right\} \quad (4.17a)$$

и

$$\left\langle T \exp \left\{ i \int d^4 x \left\{ j(x) \phi_0^{(-)}(x) + \text{э. с.} \right\} \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' j(x) \overline{j(x')} \Delta_T^0(x, x') \right\}. \quad (4.17b)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle U_{t/\lambda^2}(\lambda) \rangle_R &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \int_0^{t/\lambda^2} d\tau' \int d^3 r \int d^3 r' j(\mathbf{r}) \overline{j(\mathbf{r}')} \Delta_T^\omega(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau') \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \int_0^{t/\lambda^2} d\tau' \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} e^{-i[\omega(\mathbf{k}) - \omega]|\tau - \tau'|} |g(\mathbf{k})|^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \int_0^{t/\lambda^2} d\tau' \langle g, S_{|\tau - \tau'|}^\omega g \rangle \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} t \int_{-\infty}^{\infty} du \langle g, S_{|u|}^\omega g \rangle \right\} \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\langle U_t \rangle := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle U_{t/\lambda^2}(\lambda) \rangle_R = e^{-t(g|g)_\omega^T}. \quad (4.18)$$

Иными словами, возникает декремент затухания

$$\frac{1}{2} \Gamma + i\hbar\omega' = (g | g)_\omega^T, \quad (4.19)$$

где вещественный коэффициент затухания равен

$$\Gamma = 2 \operatorname{Re}(g | g)_\omega^T = 2(g | g)_\omega > 0, \quad (4.19a)$$

а сдвиг энергии есть

$$\hbar\omega' = \text{Im}(g | g)_{\omega}^T = \sigma_{\omega}(g, g). \quad (4.196)$$

В более общей ситуации необходимо исследовать поведение волнового оператора не только в вакуумном, но и в других состояниях. С этой целью мы введем операторы типа Вейля на $\mathcal{H}_R$, определяемые как

$$\begin{aligned} W_{\lambda}(f, \omega, t) &:= \exp \left\{ i\lambda \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \{A^{\dagger}(S_{\tau}^{\omega} f) + \text{э. с.}\} \right\} \equiv \\ &\equiv \exp \left\{ i \int_0^t ds \{b_{\lambda}^{\dagger}(f, \omega, s) + \text{э. с.}\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

и исследуем предел при $\lambda \rightarrow 0$ выражения

$$\langle W_{\lambda}(f, \omega', t') U_{t/\lambda^2}(\lambda) W_{\lambda}(h, \omega'', t'') \rangle_R. \quad (4.21)$$

Этот предел не равен нулю только при $\omega = \omega' = \omega''$. Учитывая тождества

$$\begin{aligned} e^{iA(f)} A^{\dagger}(g) &= [A^{\dagger}(g) + i\langle f, g \rangle] e^{iA(f)}, \\ A(g) e^{iA^{\dagger}(h)} &= e^{iA(h)} [A(g) + i\langle g, h \rangle], \end{aligned}$$

находим, что (4.21) равняется

$$\langle \tilde{U}_{t/\lambda^2}(\lambda) \rangle_R \langle W_{\lambda}(f, \omega, t') W_{\lambda}(h, \omega, t'') \rangle_R,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{t/\lambda^2}(\lambda) &= T \exp \frac{1}{i} \left\{ \int_0^t d\tau b_{\lambda}^{\dagger}(g, \omega, \tau) + i\lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \int_0^{t'/\lambda^2} du \langle S_u^{\omega} f, S_{\tau}^{\omega} g \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t d\tau b_{\lambda}(g, \omega, \tau) + i\lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} d\tau \int_0^{t''/\lambda^2} du \langle S_{\tau}^{\omega} g, S_u^{\omega} h \rangle \right\} = \\ &= U_{t/\lambda^2}(\lambda) \exp \left\{ \lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} \left[\int_0^{t'/\lambda^2} du \langle S_u^{\omega} f, S_{\tau}^{\omega} g \rangle + \int_0^{t''/\lambda^2} du \langle S_{\tau}^{\omega} g, S_u^{\omega} h \rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, предел выражения (4.21) при $\lambda \rightarrow 0$ равен

$$\langle U_t \rangle \exp \left\{ \int_0^t d\tau \chi_{[0, t']}(\tau) (f | g)_{\omega} \right\} \exp \left\{ \int_0^t d\tau \chi_{[0, t'']}(\tau) (g | h)_{\omega} \right\} \langle W(f, \omega, t') W(h, \omega, t'') \rangle,$$

где $W(f, \omega, t)$ обозначает оператор Вейля

$$\exp \left\{ i[A_{\omega}^{\dagger}(f \otimes \chi_{[0, t]}) + \text{э. с.}] \right\} \quad (4.22)$$

на бозонном фокковском пространстве $\mathcal{H}_\omega$ над $K_\omega \otimes L^2(\mathbf{R}^+)$ и $A_\omega^\sharp(\cdot)$ – операторы рождения или уничтожения в этом фокковском пространстве. Здесь K_ω – пополнение $L_z^2(\mathbf{R}^3)$ относительно полуторалинейной формы $(\cdot | \cdot)_\omega$, определенной равенством (4.14а).

Предельный оператор U_t можно рассматривать как квантовый стохастический процесс на $\mathcal{H}_\omega$, удовлетворяющий квантовому стохастическому дифференциальному уравнению

$$idU_t = \{dB_\omega^\dagger(g, t) + dB_\omega(g, t) - i(g | g)_\omega^T dt\} U_t, \quad (4.23)$$

где

$$B_\omega^\sharp(g, t) = A_\omega(g \otimes \chi_{[0, t]}). \quad (4.24)$$

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОЙ СВЯЗИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим квантово-механическую систему S , взаимодействующую с полем, которое действует на систему как термостат R . Пусть $\mathcal{H}_S$ и $\mathcal{H}_R$ обозначают гильбертовы пространства состояний системы и поля, соответственно. Полный гамильтониан имеет вид $H_\lambda = H_0 + \lambda H_I$, где

$$H_0 = H_S \otimes 1_R + 1_S \otimes H_R \quad (5.1)$$

– невозмущенная часть,

$$H_R = \int \frac{d^3 k}{z(\mathbf{k})} \hbar \omega(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (5.2)$$

и H_I – гамильтониан взаимодействия, который мы примем в виде

$$H_I = \hbar [D \otimes A^\dagger(g) + D^\dagger \otimes A(g)]. \quad (5.3)$$

Оператор D предполагается ограниченным в пространстве состояний системы $\mathcal{H}_S$ и имеющим гармоническую свободную эволюцию, т.е.

$$e^{-\frac{t}{\hbar} H_S} D e^{\frac{t}{\hbar} H_S} = D e^{-i\omega t}. \quad (5.4)$$

Итак, в представлении взаимодействия

$$H_I(t) = \hbar [D \otimes A^\dagger(S_t^\omega g) + \text{э. с.}]. \quad (5.5)$$

Такое взаимодействие эквивалентно введению квантового источника $j(\mathbf{r}, t) D$, поскольку $[D, D^\dagger]$ не предполагается нулевым. Волновой оператор с измененным масштабом времени имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{t/\lambda^2}(\lambda) &= T \exp \left\{ -i \left[D \otimes b_\lambda^\dagger(g, \omega, t) + \text{э. с.} \right] \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \times \\ &\quad \times \left[D \otimes b_\lambda^\dagger(g, \omega, t_1) + \text{э. с.} \right] \dots \left[D \otimes b_\lambda^\dagger(g, \omega, t_n) + \text{э. с.} \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Пусть $D^\eta = D$, $D^\dagger$ и $b^\eta(\cdot) = b^\dagger(\cdot)$, $b(\cdot)$ при $\eta = 0, 1$, соответственно. Тогда

$$U_{t/\lambda^2}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \times \\ \times \sum_{\eta \in \{0,1\}^n} D^{\eta_1} \dots D^{\eta_n} \otimes b_{\lambda}^{\eta_1}(g, \omega, t_1) \dots b_{\lambda}^{\eta_n}(g, \omega, t_n). \quad (5.7)$$

Формально получается, что при $f \in K_\omega$ операторы $b_{\lambda}^{\sharp}(f, \omega, t)$ в вакуумном состоянии слабо сходятся к шумовым полям $\gamma_{\omega}^{\sharp}(f, t)$, аналогичным тем, которые были построены в разделе 3. До сих пор мы показали только, что сходятся коммутаторы, однако этого достаточно, поскольку допредельные и предельные поля гауссовы. Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ поля $b_{\lambda}^{\sharp}(f, \omega, t)$ и $b_{\lambda}^{\sharp}(g, \omega, s)$ становятся независимыми, если $\omega \neq \omega'$.

С физической точки зрения изменение масштаба, которое мы использовали, чтобы выделить квантовый (т.е. некоммутативный) стохастический предел, эквивалентно предельному переходу ван Хофа, или слабой связи [5, 6]. Операторы $\int_0^t b_{\lambda}^{\sharp}(f, \omega, t) dt$ сходятся к некоммутативным процессам броуновского движения $B_{\omega}^{\sharp}(f, t)$ на $K_{\omega} \otimes L^2(\mathbf{R}^+)$. Теперь мы можем сделать следующие физические утверждения.

ТЕОРЕМА 1. При $\lambda \rightarrow 0$ операторы $b_{\lambda}^{\sharp}(g, \omega, t)$ слабо сходятся к бозонным полям $\gamma_{\omega}^{\sharp}(g, t)$, удовлетворяющим следующим каноническим коммутационным соотношениям на бозонном фоковском пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{\omega}$ над $L_{\mathcal{P}}^2(\mathbf{R}^+, K_{\omega})$:

$$[\gamma_{\omega}(f, t), \gamma_{\omega'}^{\dagger}(g, s)] = \delta_{\omega, \omega'} \left\{ (f | g)_{\omega}^T \delta_+(t - s) + \overline{(g | f)_{\omega}^T} \delta_-(t - s) \right\}. \quad (5.8)$$

ТЕОРЕМА 2. Предел $U_{t/\lambda^2}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ равен оператору U_t на $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{\omega}$, определяемому равенством

$$U_t = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t \geq t_1 \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \sum_{\eta \in \{0,1\}^n} D^{\eta_1} \dots D^{\eta_n} \otimes \gamma_{\omega}^{\eta_1}(g, t_1) \dots \gamma_{\omega}^{\eta_n}(g, t_n). \quad (5.9)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть Ψ_{ω} обозначает вакуум пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{\omega}$ и $\langle \cdot \rangle = \langle \Psi_{\omega}, \cdot \Psi_{\omega} \rangle$ – соответствующее состояние. Тогда

$$\langle U_t \rangle = e^{-t D^{\dagger} D (g | g)_{\omega}^T}. \quad (5.10)$$

Для проверки теоремы 3 нужно учесть, что вакуумное среднее от (5.9) содержит выражения вида

$$\langle \gamma_{\omega}^{\eta_1}(g, t_1) \dots \gamma_{\omega}^{\eta_n}(g, t_n) \rangle_R,$$

из которых следует, что $n = 2k$. Затем учтем, что спаривание, например, $\gamma_{\omega}(g, t_j)$ и $\gamma_{\omega}^{\dagger}(g, t_l)$ (где $t_j \geq t_l$) дает вклад

$$(g | g)_{\omega}^T \delta_+(t_j - t_l) + \overline{(g | g)_{\omega}^T} \delta_-(t_j - t_l). \quad (5.11a)$$

Здесь отлично от нуля только слагаемое

$$(g | g)_{\omega}^T \delta_+(t_j - t_l). \quad (5.116)$$

Допустим, что t_k и t_l не соседствуют в последовательности $t_1, \dots, t_n$. Тогда существует по крайней мере одна переменная t_m такая, что $t_k \geq t_m \geq t_l$. Поэтому слагаемое (5.116) при интегрировании дает ограничение $t_j = t_m = t_l$, т.е. область интегрирования становится множеством меры ноль.

Следовательно, единственные наборы $\eta \in \{0, 1\}^{2k}$, дающие вклад в вакуумное среднее от (5.9), — это те, которые имеют вид типа $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$. Итак,

$$\begin{aligned} \langle U_t \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^{2k} \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \times \\ &\quad \times (D^{\dagger} D)^k \{ (g | g)_{\omega}^T \}^k \delta_+(t_1 - t_2) \dots \delta_-(t_{2k-1} - t_{2k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \{ t D^{\dagger} D (g | g)_{\omega}^T \}^k, \end{aligned}$$

откуда следует (5.10).

Теорема 3 является некоммутативным аналогом (4.18). Выражение $2D^{\dagger} D (g | g)_{\omega}^T$ можно интерпретировать как комплексный оператор затухания, который может быть разделен на два слагаемых: самосопряженное (затухание) и антисамосопряженное (сдвиг энергии). Рассуждение относительно сужения области интегрирования для спариваний операторов, переменные времени которых не являются соседними, легко проверяется непосредственным определением области интегрирования при конечном значении λ и последующим выяснением того, что она действительно становится множеством меры ноль при $\lambda \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Оператор U_t удовлетворяет следующему интегродифференциальному уравнению:*

$$U_t = 1 - i \int_0^t ds \left\{ D \otimes \gamma_{\omega}^{\dagger}(g, s) + D^{\dagger} \otimes \gamma_{\omega}(g, s) \right\} U_s, \quad (5.12)$$

или, что эквивалентно, квантовому стохастическому дифференциальному уравнению в форме Стратоновича:

$$i \frac{dU_t}{dt} = \left\{ D \otimes \gamma_{\omega}^{\dagger}(g, t) + D^{\dagger} \otimes \gamma_{\omega}(g, t) \right\} U_t. \quad (5.13)$$

ТЕОРЕМА 5. *Оператор U_t унитарный.*

Чтобы в этом убедиться, заметим, что уравнение, сопряженное к (5.13), имеет вид

$$-i \frac{dU_t^{\dagger}}{dt} = U_t^{\dagger} \left\{ D \otimes \gamma_{\omega}^{\dagger}(g, t) + D^{\dagger} \otimes \gamma_{\omega}(g, t) \right\}.$$

Поэтому

$$-i \frac{dU_t^{\dagger}}{dt} U_t = i U_t^{\dagger} \frac{dU_t}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} (U_t^{\dagger} U_t) = \frac{dU_t^{\dagger}}{dt} U_t + U_t^{\dagger} \frac{dU_t}{dt} = 0. \quad (5.14)$$

ТЕОРЕМА 6. Если $t > s$, то $\gamma_\omega^\dagger(f, t)$ коммутирует с U_s . При равных временах имеем

$$[\gamma_\omega(f, t), U_t] = -iD \otimes (f | g)_\omega^T U_t, \quad (5.15a)$$

$$[\gamma_\omega^\dagger(f, t), U_t] = iD^\dagger \otimes (g | f)_\omega^T U_t. \quad (5.15b)$$

Чтобы проверить это, подставим ряд (5.9) в коммутатор $[\gamma_\omega(f, t), U_s]$. Получится ряд, n -й член которого содержит выражение

$$[\gamma_\omega(f, t), \gamma_\omega^{\eta_1}(g, t_1) \dots \gamma_\omega^{\eta_n}(g, t_n)],$$

просуммированное по $\eta \in \{0, 1\}^n$ и проинтегрированное по симплексу $s \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0$. Нетривиальные коммутаторы возникают, когда при некотором k $\eta_k \equiv \dagger$. Они содержат выражения

$$(f | g)_\omega^T \delta_+(t - t_k) + \overline{(g | f)_\omega^T} \delta_-(t - t_k).$$

Сингулярные точки таких обобщенных функций не попадают в область интегрирования при $t > s$. Поэтому коммутатор обращается в ноль. Если же $t = s$, то аналогично тому, как была получена теорема 3, можно показать, что интегрирование дает ненулевой результат только для старшей переменной времени t_1 (в предположении $\eta_1 \equiv \dagger$). И так, n -е слагаемое после интегрирования принимает вид

$$(-i)^n \sum_{\eta \in \{0, 1\}^{n-1}} DD^{\eta_1} \dots D^{\eta_n} \otimes \int_{t \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_2 \dots dt_n (f | g)_\omega^T \gamma_\omega^{\eta_2}(g, t_2) \dots \gamma_\omega^{\eta_n}(g, t_n),$$

и суммирование по n дает

$$-iD \otimes (f | g)_\omega^T U_t.$$

Доказательство (5.15b) аналогично.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathcal{H}^\omega$ – бозонное фоксовское пространство над пространством $L^2(\mathbf{R}^+, K_\omega)$ квадратично интегрируемых функций $\mathbf{R}^+ \rightarrow K_\omega$ (см. раздел 4). Уравнение Стратоновича (5.13) для U_t эквивалентно следующему квантовому стохастическому дифференциальному уравнению Ито на $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}^\omega$:

$$\delta U_t = \left\{ D \otimes \delta B_\omega^\dagger(g, t) + D^\dagger \otimes \delta B_\omega(g, t) - iD^\dagger D (g | g)_\omega^T \otimes \delta t \right\} U_t. \quad (5.16)$$

Для того чтобы доказать эту теорему, заметим, что при $\delta t > 0$

$$\begin{aligned}
i\delta U_t &= i \int_t^{t+\delta t} dU_s = \int_t^{t+\delta t} ds \left\{ D \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, s) + D^\dagger \otimes \gamma_\omega(g, s) \right\} U_s = \\
&= \int_t^{t+\delta t} ds \left\{ D \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, s) + D^\dagger \otimes \gamma_\omega(g, s) \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ U_t - i \int_s^t d\tau \left[D \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, \tau) + D^\dagger \otimes \gamma_\omega(g, \tau) \right] \right\} U_\tau = \\
&= \int_t^{t+\delta t} ds \left\{ D \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, s) + D^\dagger \otimes \gamma_\omega(g, s) \right\} U_t - \\
&\quad - i \int_t^{t+\delta t} ds \int_t^s d\tau \left\{ D^2 \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, s) \gamma_\omega^\dagger(g, \tau) + D D^\dagger \otimes \gamma_\omega^\dagger(g, s) \gamma_\omega(g, \tau) + \right. \\
&\quad \left. + D^\dagger D \otimes \gamma_\omega(g, s) \gamma_\omega^\dagger(g, \tau) + D^\dagger D^\dagger \otimes \gamma_\omega(g, s) \gamma_\omega(g, \tau) \right\} U_\tau \equiv \\
&\equiv \left\{ D \otimes \delta B_\omega^\dagger(g, t) + D^\dagger \otimes \delta B_\omega(g, t) \right\} U_t - \\
&\quad - i D^\dagger D \otimes \int_t^{t+\delta t} ds \int_t^s d\tau \left\{ (g | g)_\omega^T \delta_+(s - \tau) + \overline{(g | g)_\omega^T} \delta_-(s - \tau) \right\} U_\tau = \\
&= \left\{ D \otimes \delta B_\omega^\dagger(g, t) + D^\dagger \otimes \delta B_\omega(g, t) - i D^\dagger D (g | g)_\omega^T \otimes \delta t \right\} U_t.
\end{aligned}$$

Здесь использовался тот факт, что при интегрировании слагаемые, содержащие $\gamma_\omega^{\eta_1}(g, s) \gamma_\omega^{\eta_2}(g, \tau)$, имеют порядок $(\delta t)^2$, за исключением случая $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$, в котором мы использовали (5.8). В силу теоремы 6 операторы U_t коммутируют со стохастическими мерами $\delta B_\omega^\dagger(f, t)$ для всех $f \in K_\omega$.

Рассмотрим квантовый источник с гамильтонианом взаимодействия

$$H_I + \hbar \sum_{\omega \in F} \sum_{j=1}^{N(\omega)} \left\{ D_j^\omega \otimes A^\dagger(g_j) + \text{э. с.} \right\}, \quad (5.17)$$

в котором F — дискретный набор гармонических частот, $N(\omega)$ обозначает кратность частоты $\omega \in F$ и D_j^ω изменяется с частотой ω в процессе свободной эволюции. Известно, что в пределе слабой связи шумовые поля с различными частотами независимы и предельный оператор эволюции удовлетворяет следующему уравнению Стратоновича:

$$idU_t = \left\{ \sum_{\omega \in F} \sum_{j=1}^{N(\omega)} D_j^\omega \otimes \gamma_\omega^\dagger(g_j, t) + \text{э. с.} \right\} U_t. \quad (5.18)$$

Представленное в форме Ито это уравнение согласуется с квантовым стохастическим дифференциальным уравнением, выведенным для линейных взаимодействий общего вида [7]. Легко проверить, что

$$\langle U_t \rangle = \exp \left\{ -i \sum_{\omega \in F} \sum_{j,k=1}^{N(\omega)} D_j^{\omega\dagger} D_k(g_j | g_k)_\omega^T \right\}. \quad (5.19)$$

Уравнения в форме Ито и в модифицированной форме Стратоновича можно объединить, разлагая соотношения Ито

$$\delta B_\omega(f, t) \delta B_\omega^\dagger(g, t) = (f | g)_\omega dt \quad (5.20)$$

на пары упорядоченных во времени соотношений

$$T \delta B_\omega(f, t) \delta B_\omega^\dagger(g, t) = (f | g)_\omega^T dt, \quad (5.21a)$$

$$T \delta B_\omega^\dagger(g, t) \delta B_\omega(f, t) = \overline{(g | f)}_\omega^T dt. \quad (5.21b)$$

Таким образом, причинное описание физических шумовых полей проявляется в квантовом стохастическом пределе.

Эта статья была частично написана во время пребывания автора в институте центра Вольтерра при финансовой поддержке министерства иностранных дел Италии (грант № 20924/95). Автор благодарен профессору Л. Аккарди за гостеприимство. Автор благодарен также профессору И. В. Воловичу за стимулирующие обсуждения проблемы квантового шума и за ознакомление с его трактовкой теории Аккарди, Фриджеро и Лю. Автор благодарен профессорам О. Г. Смолянову (Москва) и А. О'Фарреллу (Мейн-нот) за их полезные замечания по поводу данной статьи.

Список литературы

- [1] Ю. Швингер. Частицы, источники, поля. Т. 1. М.: Мир, 1973; Т. 2. М.: Мир, 1976.
- [2] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] L. Accardi, A. Frigerio, Y. G. Lu. Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 537–570.
- [4] R. Hudson, K. R. Parthasarathy. Commun. Math. Phys. 1984. V. 106. P. 301–323.
- [5] E. B. Davies. Commun. Math. Phys. 1974. V. 39. P. 91–110.
- [6] J. V. Pule. Commun. Math. Phys. 1974. V. 38. P. 241–256.
- [7] L. Accardi, J. Gough, Y. G. Lu. Rep. Math. Phys. 1995. V. 36. № 2/3. P. 155–187.

Перевод с английского А. И. Кириллова

Поступила в редакцию 6.I.1997 г.

J. Gough

CAUSAL STRUCTURE OF QUANTUM STOCHASTIC INTEGRATORS

A class of concrete representations of a non-commutative Stratonovich calculus is defined and its relationship with the quantum Ito calculus of Hudson and Parthasarathy is made explicit. Given a quantum field interacting with a quantum mechanical system, it is possible to extract a quantum noise description for the field using a suitable scaling limit (here the weak coupling limit). The motivation for our construction is to discuss the relationship between the micro-causality of a quantum field and the notion of macro-causality of the quantum noise which replaces it. We derive the Stratonovich quantum stochastic differential equation for the limit evolution operator and show that it agrees with the quantum stochastic limit theory of Accardi, Frigerio and Lu when we convert to the Ito form. The Stratonovich approach, being inherently closer to the physical microscopic equations, leads to an overwhelmingly simplified derivation of the quantum stochastic limit equations of motion. The unification of the two quantum stochastic calculi is given and their physical origins explained.