Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, Суперсле́ды на алгебре наблюдаемых рациональной модели Калоджеро, основанной на классической системе корней, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 252–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:16:39

С. Е. Конштейн*

СУПЕРСЛЕДЫ НА АЛГЕБРЕ НАБЛЮДАЕМЫХ РАЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО, ОСНОВАННОЙ НА КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КОРНЕЙ

Определен полный набор суперследов на алгебрах $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$ наблюдаемых рациональных моделей Калоджеро с гармоническим потенциалом, основанных на системах корней $\mathbf{R}$ типов B_N , C_N и D_N . Эти результаты обобщают результаты, известные для случая A_{N-1} . Показано, что $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$ имеет $q(\mathbf{R})$ независимых суперследов, где $q(B_N) = q(C_N)$ – число разбиений числа N в сумму целых положительных чисел, а $q(D_N)$ есть число разбиений числа N в сумму целых положительных чисел с четным числом четных слагаемых.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы продолжаем исследование некоторых свойств ассоциативных алгебр, которые, как было показано в [1, 2], лежат в основе интегрируемости рациональной модели Калоджеро [3]. Мы распространили результаты, полученные в [4], на ассоциативные алгебры наблюдаемых рациональной модели Калоджеро, связанной с системами корней [5] классических алгебр Ли B_N , C_N и D_N , показав, что и на этих супералгебрах существуют нетривиальные суперследы.

Пусть $H_G(\nu)$ – ассоциативная алгебра полиномов, порожденная N парами (деформированных) осцилляторов Гейзенберга–Вейля a_i^α , $\alpha = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, образующих базис в паре N -мерных пространств $a_i^\alpha \in \mathcal{H}_N^\alpha$, и элементами некоторой конечной группы G , удовлетворяющая следующим условиям:

1. На $H_G(\nu)$ задана четность π : $\pi(a_i^\alpha) = 1$, $\pi(g) = 0 \ \forall g \in G$.
2. $ga_i^\alpha = \sum_j T_{ij}(g^{-1})a_j^\alpha g \ \forall g \in G$ и для всех $\alpha = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, $a_i^\alpha \in \mathcal{H}_N^\alpha$, где ортогональные матрицы $T_{ij}(g)$ реализуют N -мерное представление группы G .
3. $[a_i^\alpha, a_j^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta} A_{ij}$, где $\epsilon^{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор и компоненты $A_{ij} = A_{ji} \in \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ – групповая алгебра группы G) зависят от одного или более параметров ν .

Чтобы сформулировать следующее условие, введем подпространства $\mathcal{E}^\alpha(g) \subset \mathcal{H}_N^\alpha$, равные

$$\mathcal{E}^\alpha(g) = \{h \in \mathcal{H}_N^\alpha : gh = -hg\}, \quad (1)$$

*Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева, отдел теоретической физики им. И. Е. Тамма, Москва, Россия

и градуировку E на $\mathfrak{G}$

$$E(g) = \dim \mathcal{E}^\alpha(g). \quad (2)$$

4. $E(\mathcal{P}([h_0, h_1])g) = E(g) - 1 \quad \forall g \in G, \quad \forall h_\alpha \in \mathcal{E}^\alpha(g)$. Через $\mathcal{P}(g)$ здесь обозначен проектор $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, определенный как $\mathcal{P}(\sum_i \alpha_i g_i) = \sum_{i: g_i \neq 1} \alpha_i g_i$ для любых $g_i \in G$ и произвольных констант α_i .

Суперслед определяется как линейная комплекснозначная функция $\text{str}(\cdot)$ на алгебре $H_G(\nu)$ такая, что

$$\text{str}(fg) = (-1)^{\pi(f)\pi(g)} \text{str}(gf) \quad \forall f, g \in H_G(\nu). \quad (3)$$

В [4] на примере $G = S_N$ была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если супералгебра $H_G(\nu)$ удовлетворяет условиям 1–4, то количество независимых нетривиальных суперследов на $H_G(\nu)$ равно количеству независимых суперследов на алгебре $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих уравнению*

$$\text{str}([h_0, h_1]g) = 0 \quad \forall h_\alpha \in \mathcal{E}^\alpha(g), \quad \forall g \in G. \quad (4)$$

В настоящей работе эта теорема применяется к случаю, когда G является группой Вейля $W(\mathbf{R})$ системы корней $\mathbf{R}$ классической алгебры Ли типа A_{N-1} , B_N , C_N или D_N . Мы будем рассматривать три (т.к. $W(B_N) = W(C_N)$) различных случая одновременно. Заметим, что алгебра $SH_N(\nu)$, рассматривавшаяся в [6, 4], совпадает в наших обозначениях с $H_{W(A_{N-1})}(\nu) = H_{S_N}(\nu)$.

Рассмотрим 3-параметрическую деформацию $H_G(\nu)$ ассоциативной алгебры Гейзенберга–Вейля N пар осцилляторов. Эта деформация порождена N парами порождающих элементов a_i^α , $\alpha = 1, 2$, и отражениями K_{ij} и R_i , $i, j = 1, \dots, N$, удовлетворяющими следующим соотношениям¹⁾:

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad K_{ij}K_{ij} = 1, \quad K_{ij}K_{jl} = K_{jl}K_{li} = K_{li}K_{ij} \quad \text{для } i \neq j \neq l \neq i, \quad (5)$$

$$K_{ij}K_{kl} = K_{kl}K_{ij}, \quad \text{если } i, j, k, l \text{ попарно различны}, \quad (6)$$

$$R_i R_j = R_j R_i \quad \forall i, j, \quad R_i R_i = 1 \quad \forall i, \quad (7)$$

$$K_{ij}R_j = R_i K_{ij}, \quad K_{ij}R_k = R_k K_{ij} \quad \text{для } i \neq j \neq k \neq i, \quad (8)$$

$$R_i a_i^\alpha = -a_i^\alpha R_i, \quad R_i a_j^\alpha = a_j^\alpha R_i \quad \text{для } i \neq j, \quad (9)$$

$$K_{ij} a_j^\alpha = a_i^\alpha K_{ij}, \quad K_{ij} a_k^\alpha = a_k^\alpha K_{ij} \quad \text{для } i \neq j \neq k \neq i, \quad (10)$$

$$[a_i^\alpha, a_j^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta} A_{ij}, \quad (10)$$

где $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$, $\epsilon^{01} = 1$ и

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \delta_{ij} + \nu_0 \tilde{A}_{ij}^0 + \nu_1 \tilde{A}_{ij}^1 + \nu_2 \tilde{A}_{ij}^2, \\ \tilde{A}_{ij}^0 &= \delta_{ij} \sum_{l=1, l \neq i}^N K_{il} - \delta_{i \neq j} K_{ij}, \\ \tilde{A}_{ij}^1 &= \delta_{ij} R_i, \\ \tilde{A}_{ij}^2 &= \delta_{ij} \sum_{l \neq i} K_{il} R_i R_l + \delta_{i \neq j} K_{ij} R_i R_j. \end{aligned} \quad (11)$$

¹⁾ В настоящей статье одинаковые латинские индексы $i, j, k, \dots$ не обозначают суммирование.

Коммутационные соотношения, определенные таким образом, являются непротиворечивыми, если выполнено одно из следующих условий:

А) $\nu_1 = \nu_2 = 0$, и образующих R_i в алгебре нет,

В, С) $\nu_0 = \nu_2$,

Д) $\nu_0 = \nu_2$, $\nu_1 = 0$, и каждый моном в $H_G(\nu)$ содержит четное число отражений R_i .

Отражения K_{ij} и R_i определяют группу Вейля системы корней A_{N-1} , B_N , C_N или D_N соответственно этим случаям, а для операторов a_i^α имеется представление

$$a_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + (-1)^\alpha D_i(x)), \quad (12)$$

где $D_i(x)$ — дифференциально-разностные операторы Данкла [7], связанные с соответствующей системой корней

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \nu_1 \frac{1}{x_i}(1 - R_i) + \sum_{l \neq i}^N \left(\nu_0 \frac{1}{x_i - x_l}(1 - K_{il}) + \nu_2 \frac{1}{x_i + x_l}(1 - K_{il}R_iR_l) \right) \quad (13)$$

и удовлетворяющие соотношениям

$$[D_i, D_j] = 0 \quad \forall i, j \quad (14)$$

для значений параметров ν , перечисленных выше²⁾.

Гамильтониан рациональной модели Калоджеро, связанной с соответствующей системой корней, идентифицируется с дифференциальным оператором второго порядка $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{a_i^0, a_i^1\}$. При этом операторы a_i^1 , действуя на фоковский вакуум $|0\rangle$ такой, что $a_i^0|0\rangle = 0$, дают волновые функции этой модели.

Знание суперследов на $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$ полезно в различных отношениях. Они определяют полилинейные инвариантные формы

$$\text{str}(a_1 a_2 \dots a_n),$$

что позволяет, например, строить лагранжианы при работе с динамическими теориями, основанными на этих алгебрах. Кроме того, т.к. нуль-векторы некоторой инвариантной билинейной формы образуют двусторонний идеал алгебры, то знание суперследов дает мощный инструмент для исследования таких идеалов (как, например, в случае $H_{W(A_1)}(\nu)$, соответствующем обычной двухчастичной модели Калоджеро при полущеллах ν [8]).

Важной мотивацией для анализа суперследов на $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$ является то, что они имеют тесную связь с представлениями этой алгебры, а значит, и с анализом волновых функций модели Калоджеро. Например, имея представление $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$, можно предположить, что оно индуцирует некоторый суперслед этой алгебры как (регуляризованный тем или иным способом) суперслед (бесконечной) матрицы представления. Когда соответствующая билинейная форма при некоторых значениях параметров ν вырождается, это может означать, что представление становится приводимым.

²⁾ В формуле (13) отражения действуют на функции от x_i по правилу $K_{ij}f(x_i, x_j) = f(x_i, x_j)$, $R_i f(x_i) = f(-x_i)$.

Почти для всех рассмотренных в настоящей работе алгебр ситуация является довольно интересной, т.к. почти все они имеют более одного суперследа. Для конечномерных алгебр этого достаточно, чтобы они имели двусторонние идеалы, однако для рассматриваемых бесконечномерных алгебр существование идеалов пока является открытой проблемой.

Ниже в разделе 2 доказана лемма, обеспечивающая существование суперследов на $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$, а в разделе 3 при помощи теоремы, доказанной в приложении, подсчитано их количество.

2. ОДНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ ВЕЙЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

В этом разделе доказывается, что $H_G(\nu)$ обладает свойством 4, описанным выше, если группа G есть группа Вейля классической системы корней, порожденная отражениями K_{ij} и R_i .

Всякий элемент $g \in G$ при $G = W(A_{N-1})$, $G = W(B_N)$, $G = W(C_N)$ и $G = W(D_N)$ может быть представлен в виде $g = \sigma \prod_{i \in M_g} R_i$, где $\sigma \in S_N$ — подстановка, а M_g — некоторое подмножество индексов $1, \dots, N$. Хорошо известно, что всякая подстановка $\sigma \in S_N$ разбивает множество индексов $1, \dots, N$ на подмножества $C_1, \dots, C_{t_\sigma}$, на которых она действует транзитивно циклическими подстановками $c_1, \dots, c_{t_\sigma}$, соответственно. При этом $\sigma = \prod_{m=1}^{t_\sigma} c_m$.

Введем элементы

$$r_m = \prod_{i \in M_g \cap C_m} R_i. \quad (15)$$

Тогда g может быть представлен в виде

$$g = \prod_{m=1}^{t_\sigma} \hat{c}_m, \quad \text{где} \quad \hat{c}_m = c_m r_m. \quad (16)$$

Эти элементы $\hat{c}_m$ далее будем называть циклами.

Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие вместо базисных элементов $\{a_i^\alpha\}$ новое множество базисных элементов $\mathfrak{B}_g = \{b^I\}$ следующим образом. Для каждого цикла $\hat{c}_m$ в разложении (16) ($m = 1, \dots, t$) зафиксируем какой-нибудь индекс l_m , принадлежащий подмножеству C_m , ассоциированному с циклом $\hat{c}_m$. Введем базисные элементы b_{mj}^α , $j = 1, \dots, |\hat{C}_m|$, реализующие 1-мерные представления коммутативной циклической группы, порожденной $\hat{c}_m$, в виде

$$b_{mj}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|C_m|}} \sum_{k=1}^{|C_m|} (\lambda_m)^{jk} \hat{c}_m^{-k} a_{l_m}^\alpha \hat{c}_m^k, \quad (17)$$

где

$$\lambda_m = \exp \left(\frac{1 + (|\hat{c}_m| + |C_m|) \bmod 2}{|C_m|} \pi i \right). \quad (18)$$

Здесь через $|C_m|$ обозначено количество элементов в подмножестве C_m , а через $|\hat{c}_m|$ — длина цикла $\hat{c}_m$. Длина $|g|$ элемента $g \in G$ определяется как минимальное количество отражений, произведение которых равно g ³⁾.

Из определения (17) следует, что

$$\hat{c}_m b_{mj}^\alpha = (\lambda_m)^j b_{mj}^\alpha \hat{c}_m, \quad (19)$$

$$\hat{c}_m b_{nj}^\alpha = b_{nj}^\alpha \hat{c}_m \quad \text{для} \quad n \neq m \quad (20)$$

и, следовательно,

$$g b_{mj}^\alpha = (\lambda_m)^j b_{mj}^\alpha g. \quad (21)$$

Теперь легко получить, что для всякого цикла $\hat{c}_m$ с четной длиной матрица $T_{ij}(\hat{c}_m)$ не имеет собственных значений, равных -1 , а для циклов с нечетной длиной существует ровно одно собственное значение, равное -1 . Вследствие этого определенная ранее функция $E(g)$ есть не что иное, как число нечетных циклов в разложении (16) элемента g .

В дальнейшем вместо обозначения b_{mj}^α мы будем использовать обозначение b^I , в котором индекс I несет всю информацию об индексе α , индексе m , нумерующем циклы в (16), и индексе j , нумерующем различные элементы b_{mj}^α , связанные с циклом $\hat{c}_m$, т.е. I ($I = 1, \dots, 2N$) перенумеровывает все возможные тройки $\{\alpha, m, j\}$. Будем обозначать индекс α , цикл, подмножество индексов и собственное значение в (19), отвечающее некоторому индексу I , как $\alpha(I)$, $c(I)$, $C(I)$ и $\lambda_I = (\lambda_m)^j$, соответственно. Запись $g(I) = g_0$ означает, что $b^I \in \mathfrak{B}_{g_0}$. Базис $\mathfrak{B}_1$ является исходным базисом производящих элементов a_i^α (здесь $\mathbf{1} \in G$ — единичный элемент алгебры).

Пусть $\mathfrak{M}(g)$ — матрица, отображающая $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_g$ в соответствии с (17),

$$b^I = \sum_{i, \alpha} \mathfrak{M}_{i\alpha}^I(g) a_i^\alpha. \quad (22)$$

Очевидно, что она обратима. В матричных обозначениях (21) может быть переписано в виде

$$g b^I g^{-1} = \sum_{J=1}^{2N} \Lambda_J^I(g) b^J \quad \forall b^I \in \mathfrak{B}_g, \quad (23)$$

где $\Lambda_J^I(g) = \delta_I^J \lambda_I$.

Коммутационные соотношения для образующих элементов b^I следуют из (10) и (11):

$$[b^I, b^J] = \mathcal{C}^{IJ} + \epsilon^{\alpha(I)\alpha(J)} B^{IJ}, \quad (24)$$

где $g(I) = g(J)$,

$$\mathcal{C}^{IJ} = \epsilon^{\alpha(I)\alpha(J)} \delta_{c(I)c(J)} \delta_{\lambda_I \lambda_J^{-1}} \quad (25)$$

и

$$B^{IJ} = \sum_{i, j, \alpha, \beta} \mathfrak{M}_{i\alpha}^I(\sigma) \mathfrak{M}_{j\beta}^J(\sigma) A_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha(I)\alpha(J)}, \quad \epsilon^{\alpha(I)\alpha(J)} B^{IJ} = \mathcal{P}([b^I, b^J]). \quad (26)$$

³⁾В [4] было использовано определение длины, на единицу отличающееся от этого.

Индексы I, J поднимаются и опускаются при помощи симплектической формы $\mathcal{C}^{IJ}$:

$$b^I = \sum_J \mathcal{C}^{IJ} b_J, \quad b_I = \sum_J b^J \mathcal{C}_{JI}; \quad \sum_M \mathcal{C}_{IM} \mathcal{C}^{MJ} = -\delta_I^J. \quad (27)$$

Заметим, что элементы b^I нормированы в (17) таким образом, что ν -независимая часть в (24) имеет вид (25).

Теперь мы можем при помощи теоремы 1 доказать существование суперследов в случаях B_N, C_N и D_N . Для этого достаточно доказать следующую лемму (свойство 4).

ЛЕММА 1. Если $\lambda_I = \lambda_J = -1$ и $g(I) = g(J) = g$, то $E(B^{IJ}g) = E(g) - 1$.

Доказательство основано на следующих простых фактах теории симметрических групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть c_1 и c_2 — два различных цикла в разложении некоторой подстановки из S_N . Пусть индексы i_1 и i_2 принадлежат подмножествам, ассоциированным с циклами c_1 и c_2 , соответственно. Тогда подстановка $c = K_{i_1 i_2} c_1 c_2$ есть цикл длины $|c| = |c_1| + |c_2| + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $c \in S_N$ — циклическая подстановка и пусть $i \neq j$ — два индекса такие, что $c^k(i) = j$, где k — некоторое положительное целое число, $k < |c|$. Тогда $K_{ij}c = c_1 c_2$, где $c_{1,2}$ — несовпадающие коммутирующие циклы такие, что $|c_1| = k - 1$ и $|c_2| = |c| - k$.

Для доказательства леммы 1 рассмотрим сначала случай $c(I) = c(J)$. Для определенности выберем нечетный цикл

$$c(I) = c(J) = K_{12} K_{23} \dots K_{(p-1)p} R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_l} \quad (28)$$

(с $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq p$ и нечетным $p - 1 + l$) и

$$b^P = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^p (-1)^j (-1)^{\Delta(j)} a_j^{\alpha(P)}, \quad P = I, J, \quad (29)$$

где

$$\Delta(j) = \sum_{m \geq j} \sum_{n=1}^l \delta_{m i_n}. \quad (30)$$

Тогда B^{IJ} может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} pB^{IJ} = & \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^p (\nu_0 (1 - (-1)^{i+j+\Delta(i)+\Delta(j)}) K_{ij} + \\ & + \nu_2 (1 + (-1)^{i+j+\Delta(i)+\Delta(j)}) K_{ij} R_i R_j) + \\ & + \nu_1 \sum_{i=1}^p R_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^N (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j). \end{aligned} \quad (31)$$

При помощи предложений 1 и 2 легко убедиться, что:

- 1) $K_{ij}c(I)$ разлагается в произведение двух четных циклов, если $1 \leq i < j \leq p$ и $i + j + \Delta(i) + \Delta(j)$ нечетно;
 - 2) $K_{ij}R_iR_jc(I)$ разлагается в произведение двух четных циклов, если $1 \leq i < j \leq p$ и $i + j + \Delta(i) + \Delta(j)$ четно;
 - 3) $R_ic(I)$ является четным циклом, если $1 \leq i \leq p$, т.к. $c(I)$ – нечетный цикл;
 - 4) $K_{ij}c(I)c(K)$ есть цикл с той же четностью, что и $c(K)$, если $c(K) \neq c(I)$ – некоторый цикл в разложении (16) элемента g , $i \in C(I)$ и $j \in C(K)$;
 - 5) $K_{ij}R_iR_jc(I)c(K)$ есть цикл с той же четностью, что и $c(K)$, если $c(K) \neq c(I)$ – некоторый цикл в разложении (16) элемента g , $i \in C(I)$ и $j \in C(K)$.
- Случай $c(I) \neq c(J)$ сводится к подслучаям 4 и 5, что завершает доказательство леммы 1.

3. СУПЕРСЛЕДЫ НА $\mathfrak{G}$, ВАКУУМНЫЕ УСЛОВИЯ И ЧИСЛО СУПЕРСЛЕДОВ НА $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$

Вследствие G -инвариантности определение суперследа на $\mathfrak{G}$ является определением центральной функции на $\mathfrak{G}$, т.е. функции на классах сопряженности G , и поэтому число суперследов на $\mathfrak{G}$ равно числу классов сопряженности в G .

Так как $\mathfrak{G} \subset H_G(\nu)$, то из (3) и определяющих соотношений (5)–(11) алгебры $H_G(\nu)$ следуют дополнительные ограничения на эти функции. Действительно, рассмотрим элементы b^I такие, что $\lambda_I = -1$. Тогда из (3) и (21) следует, что $\text{str}(b^I b^J g) = -\text{str}(b^J g b^I) = \text{str}(b^J b^I g)$, и, следовательно, $\text{str}([b^I, b^J]g) = 0$, что вследствие (24) и (25) эквивалентно

$$\delta_{c(I)c(J)}\delta_{-1\lambda_J} \text{str}(g) = -\text{str}(B^{IJ}g). \quad (32)$$

Так как эти условия дают ограничения на суперследы полиномов степени 0 по a_i^α , мы назвали их в [4] вакуумными условиями (Ground Level Conditions). В силу леммы 2, доказанной в приложении, уравнения (32) удовлетворяются тождественно для любого суперследа на $\mathfrak{G}$, если $\delta_{c(I)c(J)}\delta_{-1\lambda_J} = 0$, поэтому они выражают суперслед элементов $g \in E(g) = e$ через суперслед элементов $B^{IJ}g \in E(B^{IJ}g) = e - 1$:

$$\text{str}(g) = -\text{str}(B^I g), \quad (33)$$

где через B^I обозначена величина B^{IJ} такая, что $c_J = c_I$, $\lambda_I = \lambda_J = -1$, $\alpha(I) + \alpha(J) = 1$. Таким образом, число решений этой системы $Q(G)$ не превосходит $\mathcal{O}(G)$ – количества классов сопряженности элементов без нечетных циклов.

В приложении доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если $G = W(\mathbf{R})$ и $\mathbf{R} = A_{N-1}$, B_N , C_N или D_N , то $Q(G) = \mathcal{O}(G)$.

Чтобы вычислить величину $\mathcal{O}(G)$, рассмотрим некоторый четный цикл

$$c = K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}R_{i_1}R_{i_2} \dots R_{i_l} \quad (p-1+l \text{ четно}) \quad (34)$$

и цепочку преобразований подобия допустимых во всех случаях⁴⁾ $\mathbf{R} = B_N$, C_N , D_N :

$$\begin{aligned} c &\rightarrow R_{i_l}R_{i_l-1}cR_{i_l}R_{i_l-1} = K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}R_{i_1}R_{i_2} \dots R_{i_l-2} \rightarrow \dots \rightarrow \\ &= K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}(R_1)^{l_1}(R_2)^{l-l_1}. \end{aligned} \quad (35)$$

⁴⁾ Отражения R_i отсутствуют в случае $\mathbf{R} = A_{N-1}$.

Здесь l_1 — число нечетных индексов i_k в (34). Если p четно, то либо l_1 , либо $l - l_1$ нечетно и элемент (34) подобен $K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}R_1$. Если p нечетно, то элемент (34) подобен либо $K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}$, либо $K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}R_1R_2$. Последнее выражение подобно $K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}R_1R_p$, а это, в свою очередь, подобно $K_{12}K_{23} \dots K_{(p-1)p}$, т.к. p нечетно.

Это рассмотрение показывает, что класс сопряженности четного цикла $c(I)$ определяется двумя зависимыми величинами: числом индексов $p(I) = |C(I)|$, на которые действует $c(I)$, и четностью $\epsilon(I) = (p(I) + 1) \bmod 2$ числа отражений R в $c(I)$.

Таким образом, класс сопряженности с $E = 0$ полностью характеризуется набором неотрицательных целых чисел $n_1, n_3, \dots; m_2, m_4, \dots$, где n_i — это число циклов $c(I)$ с $p(I) = i$ и $\epsilon(I) = 0$, а m_i — число циклов $c(I)$ с $p(I) = i$ и $\epsilon(I) = 1$.

Числа n_i и m_i должны удовлетворять следующим условиям:

- для случая “А” $m_i = 0 \quad \forall i, \sum_i i n_i = N$;
- для случаев “В”, “С” $\sum_i i(n_i + m_i) = N$;
- для случая “D” $\sum_i i(n_i + m_i) = N, (\sum_i m_i) \bmod 2 = 0$.

Таким образом, число суперследов равно числу разбиений числа N в сумму нечетных положительных целых для случая A_{N-1} , числу разбиений числа N в сумму целых для случаев B_N и C_N и числу разбиений числа N в сумму положительных целых с четным числом четных слагаемых для D_N .

Автор благодарен М. А. Васильеву за полезные обсуждения. Настоящая работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 96-01-01144, и INTAS, грант 93-0633.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2

Сначала докажем следующую лемму:

ЛЕММА 2. Уравнения $\text{str}([b^I, b^J]g) = 0$ с $b^I, b^J \in \mathfrak{B}_g, \lambda_I = -1$ удовлетворяются тождественно для всякого суперследа $\text{str}(\cdot)$ на $\mathfrak{G}$, если $c(I) \neq c(J)$ или $c(I) = c(J)$ и $\lambda_J \neq -1$.

Действительно, вследствие G -инвариантности можно получить следующие тождества:

$$\begin{aligned} \text{str}([b^I, b^J]g) &= \text{str}(c(I)[b^I, b^J]g(c(I))^{-1}) = \\ &= \text{str}([c(I)b^I(c(I))^{-1}, c(I)b^J(c(I))^{-1}]c(I)g(c(I))^{-1}) = \text{str}([-b^I, b^J]g) \end{aligned}$$

для случая $c(I) \neq c(J)$ и

$$\text{str}([b^I, b^J]g) = \text{str}(c(I)[b^I, b^J]g(c(I))^{-1}) = -\lambda_J \text{str}([b^I, b^J]g)$$

для случая $c(I) = c(J)$.

В результате для доказательства теоремы 2 нужно рассматривать только случай $c(I) = c(J), \lambda_I = \lambda_J = -1$ и $\alpha(I) = 1 - \alpha(J)$.

Индукцией по числу нечетных циклов $e = E(g)$ покажем, что для g с $E(g) = e \geq 1$ есть только одно независимое уравнение на $\text{str}(g)$ при условии, что все уравнения (33) с

$E(g) = e' < e$ разрешены. Первый шаг индукции состоит в наблюдении, что для случая $E(g) = 0$ уравнений нет.

Рассмотрим теперь вариант, когда есть два уравнения (33) на $\text{str}(g)$ для некоторого g . Такое возможно только тогда, когда $g = c_1 c_2 g'$, где c_1 и c_2 — нечетные циклы в разложении g такие, что c_1 не подобен c_2 . Заметим, что $E(g') = E(g) - 2 = e - 2$, $E(c_1 g') = E(c_2 g') = e - 1$.

Без потери общности положим

$$c_1 = K_{12} K_{23} \dots K_{(p-1)p} R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_k} \quad (\text{П.1})$$

с $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p$ и нечетным $p - 1 + k$ и

$$c_2 = K_{(p+1)(p+2)} \dots K_{(p+q-1)(p+q)} R_{i_{k+1}} R_{i_{k+2}} \dots R_{i_{k+l}} \quad (\text{П.2})$$

с $p+1 \leq i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_{k+l} \leq p+q$ и нечетным $q - 1 + l$ и введем соответствующие образующие элементы

$$\begin{aligned} b_1^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{s=1}^p (-1)^s (-1)^{\Delta(s)} a_s^\alpha, \\ b_2^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s=p+1}^{p+q} (-1)^s (-1)^{\Delta(s)} a_s^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где

$$\Delta(s) = \sum_{u=s}^{p+q} \delta(u), \quad \delta(u) = \sum_{v=1}^{k+l} \delta_{u i_v} \quad (\text{П.4})$$

с собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Заметим, что $c_+ = K_{1(p+1)} c_1 c_2$ есть цикл такой, что

$$c_+ b_+^\alpha = -b_+^\alpha c_+, \quad \text{где} \quad b_+^\alpha = \frac{\sqrt{p} b_1^\alpha + \sqrt{q} b_2^\alpha}{\sqrt{p+q}}, \quad (\text{П.5})$$

а $c_- = K_{1p+1} R_1 R_{p+1} c_1 c_2$ — цикл такой, что

$$c_- b_-^\alpha = -b_-^\alpha c_-, \quad \text{где} \quad b_-^\alpha = \frac{\sqrt{p} b_1^\alpha - \sqrt{q} b_2^\alpha}{\sqrt{p+q}}. \quad (\text{П.6})$$

Запишем теперь уравнение для $\text{str}(g)$ в виде $\text{str}(g) = -\text{str}(B^1 g)$ или

$$\begin{aligned} \text{str}(g) &= -\text{str}([b_1^0, b_1^1] - 1)g = \\ &= -\text{str}\left(\left([b_1^0, b_1^1] - 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j)\right)g\right) - \\ &\quad - \text{str}\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j)g\right). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Введем обозначение

$$h = \left(\left([b_1^0, b_2^1] - 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) \right) g \right), \quad h \in \mathfrak{G},$$

и заметим, что $E(h) = e - 1$ и $h = \sum_t \gamma_t g_t$ с некоторыми $g_t \in G$ и константами γ_t такими, что все элементы g_t содержат цикл c_2 в их разложении (16). Таким образом, вследствие предположения индукции справедливо следующее тождество:

$$\text{str}(h) = -\text{str}(B^2 h) = -\text{str}([b_2^0, b_2^1] - 1)h,$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \text{str}(g) &= \text{str} \left(([b_2^0, b_2^1] - 1) \left([b_1^0, b_1^1] - 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) \right) g \right) - \\ &\quad - \text{str} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) g \right). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Подстановка $1 \leftrightarrow 2$, $p \leftrightarrow q$ дает

$$\begin{aligned} \text{str}(g) &= \text{str} \left(([b_1^0, b_1^1] - 1) \left([b_2^0, b_2^1] - 1 - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) \right) g \right) - \\ &\quad - \text{str} \left(\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) g \right). \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Покажем, что вследствие предположения индукции разность между (П.8) и (П.9) равна нулю.

Эта разность имеет вид

$$X = \text{str} \left(\left(\frac{[b_2^0, b_2^1]}{p} - \frac{[b_1^0, b_1^1]}{q} \right) \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} (\nu_0 K_{ij} + \nu_2 K_{ij} R_i R_j) g \right), \quad (\text{П.10})$$

т.к. $\text{str}([b_1^0, b_1^1], [b_2^0, b_2^1]g) = 0$ для всякого суперследа на $\mathfrak{G}$. Теперь мы можем воспользоваться следующими тождествами при $1 < i \leq p$ и $p+1 < j \leq p+q$:

$$\begin{aligned} (c_1)^{-1} K_{ij} c_1 &= K_{(i-1)j} (R_{i-1} R_j)^{\delta(i-1)}, \\ (c_2)^{-1} K_{ij} c_2 &= K_{ij-1} (R_i R_{j-1})^{\delta(j-1)}, \\ (c_1)^{-1} K_{ij} R_i R_j c_1 &= K_{(i-1)j} (R_{i-1} R_j)^{\delta(i-1)+1}, \\ (c_2)^{-1} K_{ij} R_i R_j c_2 &= K_{ij-1} (R_i R_{j-1})^{\delta(j-1)+1}, \end{aligned}$$

чтобы для любого G -инвариантного суперследа на $\mathfrak{G}$ представить X в виде $X = X_0 + X_2$, где

$$\begin{aligned} X_0 &= F_0(\nu_0, \nu_2) \text{str} \left(\left(\frac{[b_2^0, b_2^1]}{p} - \frac{[b_1^0, b_1^1]}{q} \right) K_{1(p+1)g} \right), \\ X_2 &= F_2(\nu_0, \nu_2) \text{str} \left(\left(\frac{[b_2^0, b_2^1]}{p} - \frac{[b_1^0, b_1^1]}{q} \right) K_{1(p+1)R_1 R_{p+1}g} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

а $F_{0,1}(\nu_0, \nu_2)$ — некоторые конкретные функции. Подставляя $b_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}(\sqrt{p+q} B_+^\alpha - \sqrt{p} b_1^\alpha)$ в X_0 и $b_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}(\sqrt{p+q} B_-^\alpha + \sqrt{p} b_1^\alpha)$ в X_2 и используя предположение индукции и лемму 2, мы получаем $X_0 = X_2 = 0$, что завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

- [1] *A. Polychronakos.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 703.
- [2] *L. Brink, H. Hansson, M. A. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 1992. V. 286. P. 109.
- [3] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2191, 2197; 1971. V. 12. P. 419.
- [4] *S. E. Konstein, M. A. Vasiliev.* hep-th/9512038; J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 2872.
- [5] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
- [6] *L. Brink, M. A. Vasiliev.* Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 3585.
- [7] *C. F. Dunkl.* Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167.
- [8] *M. A. Васильев.* Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 344; *M. A. Vasiliev.* Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 1115.

Поступила в редакцию 4.IV.1996 г.

S. E. Konstein

**SUPERTRACES ON THE ALGEBRAS OF OBSERVABLES
OF THE RATIONAL CALOGERO MODELS
RELATED TO THE CLASSICAL ROOT SYSTEMS**

We find a complete set of supertraces on the algebra $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$, the algebra of observables of the rational Calogero model with harmonic interaction based on the classical root systems $\mathbf{R}$ of B_N , C_N , and D_N types. These results extend the results known for the case A_{N-1} . It is shown that $H_{W(\mathbf{R})}(\nu)$ admits $q(\mathbf{R})$ independent supertraces where $q(B_N) = q(C_N)$ is a number of partitions of N into a sum of positive integers and $q(D_N)$ is a number of partitions of N into a sum of positive integers with even number of even integers.