Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Марков, М. А. Маркова, Квазиклассические кинетические уравнения для глюонов с учетом спина, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 263–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1006>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:06:16

Ю. А. Марков*, М. А. Маркова*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГЛЮОНОВ С УЧЕТОМ СПИНА

На основе калибровочно-ковариантного оператора Вигнера для $SU(N)$ -калибровочного поля найдена система квантовых транспортных уравнений и вычислен их квазиклассический предел. После исключения среднего поля из полученной системы в бесстолкновительном приближении выделены кинетические уравнения, описывающие неvirtуальные (тепловые) глюоны с учетом спина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время достигнут значительный прогресс в развитии динамического описания кварк-глюонной плазмы (КГП) посредством вторично-квантованных кинетических уравнений (см., например, обзор [1] и введение в [2]). Из-за чрезвычайной сложности получаемых операторных транспортных уравнений для КГП, как правило, ограничиваются различными их приближениями, наибольшее применение из которых нашел метод квазиклассического разложения, отличающийся своей простотой и обзорностью получаемых уравнений. В рамках этого приближения в сочетании с методом спинорной декомпозиции удастся достаточно просто вычислить квазиклассические кинетические уравнения для кварков [3], учитывающие такую фундаментальную характеристику частиц, как спин. Целью настоящей статьи является разработка аналогичной методики для глюонной плазмы.

Известно, что даже в отсутствие кварков существует возможность спонтанного рождения глюонов из классического основного поля, которые взаимодействуют с этим полем и нейтрализуют его, что приводит к необходимости собственного кинетического описания для глюонов. Впервые явный вид оператора Вигнера для глюонов, обладающий калибровочной ковариантностью, был предложен в работе [4], что позволило получить квантовое кинетическое уравнение и вычислить его квазиклассический предел. В [5] было дано альтернативное определение оператора Вигнера для глюонов в терминах присоединенного представления. Существенным преимуществом последнего подхода является большое внешнее сходство полученных транспортных уравнений с уравнениями для кварков с единственным, однако, принципиальным отличием, состоящим в невозможности точно выделить члены, зависящие от спина (поляризации) глюона. Последнее обстоятельство привело к тому, что во всех приложениях кинетической теории КГП предполагается, что система является равновесной относительно спина глюона, и

*Иркутский вычислительный центр СО РАН, Иркутск, Россия

тем самым пренебрегается его влиянием на общую динамику КГП, хотя важность учета спиновых явлений в области физики высоких энергий в настоящее время общепризнана. В настоящей работе сделана попытка в какой-то мере прояснить вопрос о спиновой структуре квазиклассических глюонных кинетических уравнений.

В качестве определения оператора Вигнера для глюонов выберем следующее выражение:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}(x, p) = : \int \frac{d^4 y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-(i/\hbar)py} U(x, x_+) F_{\mu\nu}(x_+) U(x_+, x) \otimes \\ \otimes U(x, x_-) F_{\lambda\sigma}(x_-) U(x_-, x);, \quad (1)$$

здесь $x_{\pm} \equiv x \pm \frac{1}{2}y$ и $U(b, a) = P \exp \left[-(ig/\hbar c) \int_0^1 dz^\mu(s) A_\mu(z(s)) \right]$ – оператор связи, в котором путь интегрирования от a до b задается прямой линией $z(s) = a + (b - a)s$. В силу унитарности оператора связи справедливо равенство

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}^+ = \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu}. \quad (2)$$

В отличие от [4] в определении (1) мы отказались от суммирования по внутренним индексам (ν, λ) (аналогично определению оператора Вигнера для фотонного газа в работе [6]). Это, как будет показано ниже, имеет принципиальное значение для выяснения спиновой структуры квазиклассических кинетических уравнений для глюонов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всюду далее используем метрику $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и полагаем $c = 1$. Потенциалы калибровочного поля, являющиеся $N \times N$ -матрицами в цветовом пространстве, определены посредством $A_\mu = A_\mu^a t^a$ с $N^2 - 1$ эрмитовыми генераторами группы $SU(N)$ в фундаментальном представлении. Тензор напряженности $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a$ с

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

подчиняется уравнению Янга–Миллса (ЯМ)

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} \equiv [D_\mu, F^{\mu\nu}] = -g\hat{j}^\nu, \quad (3)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - (ig/\hbar)A_\mu$ и $\hat{j}^\nu$ – оператор кваркового тока. Кроме того, тензор $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет тождеству Бианки

$$\mathcal{D}^\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) = 0. \quad (4)$$

Считаем, что греческие индексы $\mu, \nu, \lambda, \dots$ пробегают значения $0, 1, 2, 3$, а латинские – $i, j, k, \dots, -1, 2, 3$, если не оговорено противное.

3. ТОЧНЫЕ КВАНТОВЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Уравнение движения для оператора Вигнера (1) мы получим из равенства

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-(i/\hbar)py} U(x, x_+) F_{\mu\nu}(x_+) U(x_+, x) \otimes U(x, x_-) \mathcal{D}^\lambda(x_-) F_{\lambda\sigma}(x_-) U(x_-, x) = \\ = -g \int \frac{d^4 y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-(i/\hbar)py} U(x, x_+) F_{\mu\nu}(x_+) U(x_+, x) \otimes U(x, x_-) \hat{j}_\sigma(x_-) U(x_-, x), \end{aligned}$$

справедливого в силу уравнения ЯМ (3). Повторяя выкладки, аналогичные [7] для кваркового случая, находим квантовое кинетическое уравнение для глюонов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hbar \tilde{\mathcal{D}}^\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} - i p^\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g \hbar \frac{\partial}{\partial p_\rho} \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1-s) [[e^{-s\Delta} F_{\rho\cdot}^\lambda(x)], \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}]_L - \\ - \frac{1}{2} g \hbar \frac{\partial}{\partial p_\rho} \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1+s) [\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}, [e^{s\Delta} F_{\rho\cdot}^\lambda(x)]]_R = \\ = -g \hbar \int \frac{d^4 y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-(i/\hbar)py} U(x, x_+) F_{\mu\nu}(x_+) U(x_+, x) \otimes \\ \otimes U(x, x_-) \hat{j}_\sigma(x_-) U(x_-, x). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\Delta \equiv \frac{1}{2} \hbar \partial_p \mathcal{D}(x)$ и оператор $\mathcal{D}(x)$ в левой части действует в пределах $[\dots]$ -скобок. Используются левые и правые коммутаторы, действующие по определению [1] следующим образом:

$$[\hat{O}, A \otimes B]_L \equiv [\hat{O}, A] \otimes B, \quad [A \otimes B, \hat{O}]_R \equiv A \otimes [B, \hat{O}].$$

Оператор $\tilde{\mathcal{D}}$ определяется посредством

$$\tilde{\mathcal{D}}(A \otimes B) \equiv (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{D}B).$$

Оператор Вигнера (1) подчиняется также уравнению, которое следует из тождества Бианки (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hbar \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} - i \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} p_\alpha \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} - \\ - \frac{1}{2} g \hbar \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1-s) \left[[e^{-s\Delta} F_{\rho\alpha}(x)], \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{\partial p_\rho} \right]_L - \\ - \frac{1}{2} g \hbar \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1+s) \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{\partial p_\rho}, [e^{s\Delta} F_{\rho\alpha}(x)] \right]_R = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Дополняя уравнения (5) и (6) соответствующими сопряженными уравнениями (с учетом правила сопряжения (2)), получаем систему уравнений, которую по аналогии с кварковыми кинетическими уравнениями [8] можно также назвать “линейной” версией квантовых кинетических уравнений для глюонов. В дальнейшем ограничимся подробным изучением лишь квазиклассического приближения этих уравнений, предполагая при этом,

что выполнены все необходимые условия квазиклассичности исследуемой нами системы (см., например, [1] и замечание в конце данного раздела).

Решение исходной системы ищем с точностью до первого порядка по $\hbar$:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} = \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(0)} + \hbar \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(1)}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), (6) и соответствующие сопряженные уравнения, приравнявая члены при нулевом и первом порядках по $\hbar$, получаем следующую систему квазиклассических операторных уравнений (т.к. в дальнейшем будем работать только с этим приближением, индекс “0” будем для простоты записи опускать):

$$\begin{aligned} \hbar^0 : \quad p^\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} &= 0, & p_\rho \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} + p_\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\sigma\rho} + p_\sigma \hat{\Gamma}_{\mu\nu\rho\lambda} &= 0, \\ p^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu} &= 0, & p_\rho \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu} + p_\lambda \hat{\Gamma}_{\sigma\rho\mu\nu} + p_\sigma \hat{\Gamma}_{\rho\lambda\mu\nu} &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hbar^1 : \quad \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{D}}^\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} - i p^\lambda \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(1)} &= \frac{g}{8} \left[F_{\rho\cdot}^\lambda, \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{\partial p_\rho} \right]_L + \frac{3g}{8} \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{\partial p_\rho}, F_{\rho\cdot}^\lambda \right]_R - \\ &\quad - g\delta(p) F_{\mu\nu} \otimes \hat{j}_\sigma, \\ \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{D}}^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu} + i p^\lambda \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu}^{(1)} &= \frac{3g}{8} \left[F_{\rho\cdot}^\lambda, \frac{\partial \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu}}{\partial p_\rho} \right]_L + \frac{g}{8} \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu\nu}}{\partial p_\rho}, F_{\rho\cdot}^\lambda \right]_R - \\ &\quad - g\delta(p) \hat{j}_\sigma \otimes F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения первого порядка, следующие из (6) и его сопряженного, здесь не приводятся, т.к. в дальнейшем они нам не понадобятся. Последние члены в уравнениях (9), содержащие ток, впервые были рассмотрены в работе Селихова [9]. Их наличие обеспечивало ковариантное сохранение цветного тока.

Относительно квазиклассического разложения квантовых кинетических уравнений для глюонов необходимо сделать следующее замечание. В левые части (5), (6) входят члены типа $\exp \triangle \equiv \exp(i/2\hbar \partial_p \mathcal{D})$. При разложении их в ряд Тейлора по $\hbar$ мы сталкиваемся с затруднением, связанным с присутствием в операторе $\mathcal{D}^\mu(x) = \partial_x^\mu - ig/\hbar [A^\mu, \cdot]$ члена, пропорционального $1/\hbar$, что не позволяет выполнить систематическое разложение в ряд по $\hbar$ прямым образом, без каких-либо модификаций. На это обстоятельство впервые было обращено внимание в работе [8], где и было предложено решение данной проблемы. Для этой цели используется калибровка Фока–Швингера, позволяющая заменить ковариантную производную $\mathcal{D}^\mu(x)$ обычной ∂_x^μ и тем самым выполнить квазиклассическое разложение обычным образом с последующим восстановлением калибровочной свободы. Использование такой процедуры в нашем случае приводит в конечном счете к тем же самым уравнениям (8), (9).

4. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ

Анализ полученных уравнений начнем с исследования системы линейных алгебраических уравнений (8). Эти уравнения полностью определяют тензорную структуру $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ по векторным индексам.

Свертывая второе уравнение в (8) с p^ρ и учитывая первое, получаем

$$p^2 \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0. \quad (10)$$

Условие (10) представляет собой уравнение массовой поверхности в классическом пределе $\hbar = 0$. Для определения вида $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$, удовлетворяющего равенствам (8), используем следующие соображения. Величина $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ содержит информацию как об энергетических (калибровочно-ковариантный оператор Вигнера (1) связан с потоком энергии-импульса глюонов, а не с плотностью числа частиц, как в кварковом случае [7]), так и о поляризационных свойствах глюонов. Как известно, для описания наиболее общего, частично поляризованного состояния глюона (фотона) вводят так называемую поляризационную матрицу плотности [10]. Чтобы включить в единую схему описания с помощью матрицы плотности энергетические характеристики глюонов в КГП, мы откажемся от условия ее нормировки, что приводит к следующему определению:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mu\lambda} = & \frac{1}{2}\hat{f}(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(1)} + e_{\mu}^{(2)}e_{\lambda}^{(2)}) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_1(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(2)} + e_{\lambda}^{(1)}e_{\mu}^{(2)}) - \\ & - \frac{i}{2}\hat{\xi}_2(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(2)} - e_{\lambda}^{(1)}e_{\mu}^{(2)}) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_3(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(1)} - e_{\mu}^{(2)}e_{\lambda}^{(2)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь 4-векторы $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ удовлетворяют условиям

$$(e^{(1)})^2 = (e^{(2)})^2 = -1, \quad e^{(1)}e^{(2)} = e^{(1)}p = e^{(2)}p = 0, \quad (12)$$

а $\hat{f} = \hat{f}(x, p)$, $\hat{\xi}_i = \hat{\xi}_i(x, p)$ – операторы, средние значения которых имеют смысл фазовых плотностей соответствующих четырех параметров Стокса [11] (а не трех, как в [10]), полностью характеризующих энергетические и поляризационные свойства глюонов в КГП.

Ясно, что связь $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ с $\hat{\rho}_{\mu\lambda}$ должна быть линейной и вся зависимость $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ от переменной x должна определяться только через $\hat{f}$ и $\hat{\xi}_i$. С учетом антисимметричности $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ при перестановке индексов μ и ν , λ и σ ищем эту связь в виде

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} = \varphi_{\nu\sigma}\hat{\rho}_{\mu\lambda} + \varphi_{\mu\lambda}\hat{\rho}_{\nu\sigma} - \varphi_{\nu\lambda}\hat{\rho}_{\mu\sigma} - \varphi_{\mu\sigma}\hat{\rho}_{\nu\lambda},$$

где $\varphi_{\nu\sigma}$ – некоторые неизвестные функции импульса p . Подставляя последнее выражение в (8) и учитывая (12), получаем следующие уравнения для $\varphi_{\nu\sigma}$:

$$p^{\nu}\varphi_{\mu\nu} = p^{\nu}\varphi_{\nu\mu} = 0, \quad p_{\mu}\varphi_{\nu\lambda} - p_{\lambda}\varphi_{\nu\mu} = 0, \quad p_{\mu}\varphi_{\nu\lambda} - p_{\nu}\varphi_{\mu\lambda} = 0.$$

Простейшее нетривиальное решение этой системы с учетом (10) имеет вид $\varphi_{\mu\nu} = p_{\mu}p_{\nu}$, и, таким образом,

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} = p_{\nu}p_{\sigma}\hat{\rho}_{\mu\lambda} + p_{\mu}p_{\lambda}\hat{\rho}_{\nu\sigma} - p_{\nu}p_{\lambda}\hat{\rho}_{\mu\sigma} - p_{\mu}p_{\sigma}\hat{\rho}_{\nu\lambda}. \quad (13)$$

Условие сопряжения (2) приводит к требованию эрмитовости операторов $\hat{f}$ и $\hat{\xi}_i$:

$$\hat{f}^+ = \hat{f}, \quad \hat{\xi}_1^+ = \hat{\xi}_1, \quad \hat{\xi}_2^+ = \hat{\xi}_2, \quad \hat{\xi}_3^+ = \hat{\xi}_3.$$

Выражение (13) является единственным решением соотношений (8). Доказательство этого утверждения приводится в приложении 1.

Процедуру получения искомых кинетических уравнений для глюонов с учетом спина удобно разбить на два этапа. Сначала получим квазиклассическое операторное транспортное уравнение для матрицы $\hat{\varrho} \equiv (\hat{\varrho}^{(\alpha\beta)})$, которая вводится по определению [10] как

$$\hat{\rho}_{\mu\lambda} = \hat{\varrho}^{(\alpha\beta)} e_{\mu}^{(\alpha)} e_{\lambda}^{(\beta)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$e^{(\alpha)\nu} e^{(\beta)\sigma} \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma} = p_{\mu} p_{\lambda} \hat{\varrho}^{(\alpha\beta)}.$$

Подставим в уравнения (9) выражение (13). Свертывая первое уравнение в системе (9) с $p^{\mu} e^{(\alpha)\nu} e^{(\beta)\sigma}$, а второе – с $p^{\mu} e^{(\alpha)\sigma} e^{(\beta)\nu}$ и складывая их между собой (что позволяет однозначным образом избавиться от первой квантовой поправки $\hat{\Gamma}^1$), после несколько громоздких выкладок получаем

$$\begin{aligned} p^{\mu} \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} \hat{\varrho}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} g p^{\mu} \left(\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial \hat{\varrho}^{(\alpha\beta)}}{\partial p_{\nu}} \right]_L + \left[\frac{\partial \hat{\varrho}^{(\alpha\beta)}}{\partial p_{\nu}}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) = \\ = \frac{g}{2} p^{\mu} \left(\left[F_{\mu\nu}, \hat{\varrho}^{(\alpha\delta)} e^{(\beta)\sigma} \frac{\partial e_{\sigma}^{(\delta)}}{\partial p_{\nu}} + \hat{\varrho}^{(\gamma\beta)} e^{(\alpha)\sigma} \frac{\partial e_{\sigma}^{(\gamma)}}{\partial p_{\nu}} \right]_L + \right. \\ \left. + \left[\hat{\varrho}^{(\alpha\delta)} e^{(\beta)\sigma} \frac{\partial e_{\sigma}^{(\delta)}}{\partial p_{\nu}} + \hat{\varrho}^{(\gamma\beta)} e^{(\alpha)\sigma} \frac{\partial e_{\sigma}^{(\gamma)}}{\partial p_{\nu}}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) + \\ + \frac{1}{8} g \left(\left[F_{\mu\nu}, \hat{\varrho}^{(\alpha\gamma)} e^{(\beta)\mu} e^{(\gamma)\nu} + 3 \hat{\varrho}^{(\gamma\beta)} e^{(\alpha)\mu} e^{(\gamma)\nu} \right]_L + \right. \\ \left. + \left[3 \hat{\varrho}^{(\alpha\gamma)} e^{(\beta)\mu} e^{(\gamma)\nu} + \hat{\varrho}^{(\gamma\beta)} e^{(\alpha)\mu} e^{(\gamma)\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) - \\ - g \frac{p^{\mu}}{p^2} \delta(p) \left(e^{(\alpha)\nu} e^{(\beta)\sigma} F_{\mu\nu} \otimes \hat{j}_{\sigma} + e^{(\alpha)\sigma} e^{(\beta)\nu} \hat{j}_{\sigma} \otimes F_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2.$$

При выводе (14) мы использовали условия (12).

Исходя из (14) нетрудно получить транспортные уравнения на операторы $\hat{f}$, $\hat{\xi}_i$, если учесть, что матрицу $\hat{\varrho}$ можно представить в виде разложения

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{2} (\hat{f} I + \hat{\xi}_i \sigma_i), \quad (15)$$

где I – единичная (2×2) -матрица, σ_i – матрицы Паули. Свертывая последовательно матрицы (I, σ_i) с (14) и вычисляя след, находим операторные транспортные уравнения для $\hat{f}$ и $\hat{\xi}_i$.

Чтобы получить собственно кинетические уравнения, остается только их усреднить. Для глюонного поля существует, однако, важный промежуточный шаг [4]. Еще до процедуры усреднения необходимо разложить $\hat{\varrho}$ на интересующую нас несвязную флуктуационную часть и некоторую другую часть $\bar{\varrho}$, соответствующую внешнему или самосогласованному полю $\bar{F}_{\mu\nu}$ и представляющую собой связную часть. Величины с чертой определяются с помощью среднего поля $\bar{A}_{\mu} \equiv \langle A_{\mu} \rangle$, которое находится из усредненного уравнения ЯМ

$$\bar{\mathcal{D}}^{\mu} \bar{F}_{\mu\nu} = -g (\langle \hat{j}_{\nu} \rangle + J_{\nu}), \quad (16)$$

где J_ν – цветной ток, порожденный квантовыми флуктуациями среднего основного поля. Таким образом, необходимо получить кинетические уравнения именно на несвязную, флуктуационную часть поля, выделив их сначала из общих операторных уравнений.

Ограничимся выводом кинетических уравнений в приближении Власова. Заметим сначала, что компоненты $\bar{\rho}^{(\alpha\beta)}$ в квазиклассическом приближении формально подчиняются тому же уравнению (14) с заменой соответствующих операторных величин величинами с чертой с тем, однако, отличием, что вместо тока $\hat{j}_\sigma$ необходимо подставить суммарный ток $\langle \hat{j}_\sigma \rangle + J_\sigma$, как это следует из (16). Вычитая уравнения среднего поля для компонент $\bar{\rho}^{(\alpha\beta)}$ из соответствующих уравнений для $\hat{\rho}^{(\alpha\beta)}$ и усредняя их, получим систему кинетических уравнений для глюонов (в дальнейшем под термином “глюон” всегда будем понимать флуктуационную часть глюонного поля):

$$\begin{aligned}
 & p^\mu \tilde{D}_\mu f + \frac{1}{2} g p^\mu \left(\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right]_L + \left[\frac{\partial f}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) = \\
 & = \frac{1}{4} i g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} ([F_{\mu\nu}, \xi_2]_L - [\xi_2, F_{\mu\nu}]_R) + \\
 & + g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(1)\sigma} + e^{(2)\nu} e^{(2)\sigma}) (F_{\mu\nu} \otimes J_\sigma + J_\sigma \otimes F_{\mu\nu}), \\
 & p^\mu \tilde{D}_\mu \xi_2 + \frac{1}{2} g p^\mu \left(\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_2}{\partial p_\nu} \right]_L + \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) = \\
 & = \frac{1}{4} i g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} ([F_{\mu\nu}, f]_L - [f, F_{\mu\nu}]_R) + \\
 & + i g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(2)\sigma} - e^{(2)\nu} e^{(1)\sigma}) (F_{\mu\nu} \otimes J_\sigma - J_\sigma \otimes F_{\mu\nu}), \\
 & p^\mu \tilde{D}_\mu \xi_1 + \frac{1}{2} g p^\mu \left(\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_1}{\partial p_\nu} \right]_L + \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) = \\
 & = g p^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} ([F_{\mu\nu}, \xi_3]_L + [\xi_3, F_{\mu\nu}]_R) - \\
 & - \frac{1}{2} g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} ([F_{\mu\nu}, \xi_3]_L + [\xi_3, F_{\mu\nu}]_R) + \\
 & + g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(2)\sigma} + e^{(2)\nu} e^{(1)\sigma}) (F_{\mu\nu} \otimes J_\sigma + J_\sigma \otimes F_{\mu\nu}), \\
 & p^\mu \tilde{D}_\mu \xi_3 + \frac{1}{2} g p^\mu \left(\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_3}{\partial p_\nu} \right]_L + \left[\frac{\partial \xi_3}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R \right) = \\
 & = -g p^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} ([F_{\mu\nu}, \xi_1]_L + [\xi_1, F_{\mu\nu}]_R) + \\
 & + \frac{1}{2} g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} ([F_{\mu\nu}, \xi_1]_L + [\xi_1, F_{\mu\nu}]_R) + \\
 & + g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(1)\sigma} - e^{(2)\nu} e^{(2)\sigma}) (F_{\mu\nu} \otimes J_\sigma + J_\sigma \otimes F_{\mu\nu}). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Здесь $f \equiv \langle \hat{f} \rangle - \bar{f}$, $\xi_i \equiv \langle \hat{\xi}_i \rangle - \bar{\xi}_i$ и опущена черта сверху над полями. Из полученной системы (17) видно, что система кинетических уравнений для глюонов с учетом спина в квазиклассическом бесстолкновительном приближении распалась на две независимые

подсистемы, которым должны удовлетворять пары функций (f, ξ_2) и (ξ_1, ξ_3) , соответственно.

В статье [4] вместо общего определения оператора Вигнера (1) рассматривался его частный случай

$$\hat{\Gamma}_{\mu\sigma} = g^{\nu\lambda} \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}. \quad (18)$$

Если подставить в (18) найденное нами выражение (13), учесть (10), (12) и провести описанную выше процедуру усреднения, получим

$$\mathcal{G}_{\mu\sigma} \equiv \langle \hat{\Gamma}_{\mu\sigma} \rangle - \bar{\Gamma}_{\mu\sigma} = p_\mu p_\sigma f. \quad (19)$$

В работах [12, 5] использовался анзац (19) для упрощения квазиклассического кинетического уравнения для глюонов. Физическим обоснованием такого выбора было предположение о том, что система находится в равновесии относительно спина глюона. При этом всегда предполагалось, что для выяснения спиновых свойств глюонов достаточно просто более детально изучить структуру $\mathcal{G}_{\mu\sigma}$ по векторным индексам. Наше рассмотрение показывает, что при выборе исходного определения оператора Вигнера в виде (18) представление (19) в квазиклассическом пределе является единственно возможным и какой-либо дополнительной информации о спиновых свойствах системы при таком выборе извлечь нельзя.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ АБЕЛЕВОЙ ДОМИНАНТНОСТИ. ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее простой вид глюонные кинетические уравнения (17) имеют в приближении абелевой доминантности [4]. В рамках рассматриваемой модели предполагается, что, по крайней мере, для слабо меняющихся полей существуют такие калибровочное преобразование $S(x)$ и ансамбль усреднения, которые позволяют одновременно диагонализировать в цветовом пространстве функции f и ξ_i , тензор напряженности калибровочного поля $F_{\mu\nu}$ и потенциал A_μ , т.е. записать их в виде

$$F_{\mu\nu} = \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{h}, \quad f = f^{ij} e_{ij} \otimes e_{ji} + f^i h_i \otimes h_i \quad (20)$$

и т.д. Здесь h_i ($i = 1, \dots, N-1$) – абелевы, а e_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$; $i \neq j$) – неабелевы генераторы в базисе Картана–Вейля группы $SU(N)$, причем h_j определяются посредством

$$h_j \equiv (2j(j+1))^{-1/2} \text{diag}(1, \dots, 1, -j, 0, \dots, 0)$$

с $(-j)$, появляющемся в $(j+1)$ -м столбце.

Подставляя разложения (20) в (17) и учитывая, что

$$p^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu f = p^\mu \partial_\mu f^i h_i \otimes h_i + p^\mu \partial_\mu f^{ij} e_{ij} \otimes e_{ji},$$

$$\left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right]_L = \left[\frac{\partial f}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R = \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \frac{\partial f^{ij}}{\partial p_\nu} e_{ij} \otimes e_{ji}$$

и т.п., находим кинетические уравнения для глюонов в приближении абелевой доминантности:

$$\begin{aligned}
 p^\mu \partial_\mu f^i &= 0, & p^\mu \partial_\mu f^{ij} + gp^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \frac{\partial f^{ij}}{\partial p_\nu} &= 0, \\
 p^\mu \partial_\mu \xi_2^i &= 0, & p^\mu \partial_\mu \xi_2^{ij} + gp^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \frac{\partial \xi_2^{ij}}{\partial p_\nu} &= 0, \\
 p^\mu \partial_\mu \xi_1^i &= 0, & p^\mu \partial_\mu \xi_3^i &= 0, \\
 p^\mu \partial_\mu \xi_1^{ij} + gp^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \frac{\partial \xi_1^{ij}}{\partial p_\nu} &= 2gp^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \xi_3^{ij} - ge^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \xi_3^{ij}, \\
 p^\mu \partial_\mu \xi_3^{ij} + gp^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \frac{\partial \xi_3^{ij}}{\partial p_\nu} &= -2gp^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \xi_1^{ij} + ge^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \eta_{ij} \xi_1^{ij}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\eta_{ij} \equiv \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\varepsilon_i \equiv (\mathbf{h})_{ii} = ((h_1)_{ii}, \dots, (h_{N-1})_{ii})$ есть присоединенное представление весовых векторов η группы $SU(N)$, выраженных в терминах элементарных весовых векторов ε , и для простоты отброшены члены с током в правых частях.

Из полученного видно, что в рассматриваемом приближении система уравнений для функции распределения f и функции ξ_2 , определяющей степень правоциркулярной поляризации глюонов, распадается на независимые уравнения. Это говорит о чисто неабелевом происхождении спин-цветовых членов в правых частях уравнений для f и ξ_2 в системе (17).

Уравнения для f^i и f^{ij} , описывающие нейтральные и заряженные глюоны, соответственно полностью совпадают с соответствующими уравнениями, полученными ранее [4, 12], как и должно быть в силу обстоятельств, рассмотренных в конце предыдущего раздела. Наибольшее сходство формы глюонных и кварковых кинетических уравнений, как уже упоминалось во введении, достигается, если переписать систему (17) в терминах присоединенного представления [5]. Для этой цели представим функции f и ξ_i в виде разложений $f = f^{ab} t^a \otimes t^b$, $\xi_i = \xi_i^{ab} t^a \otimes t^b$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{D}}_\mu f &= (\partial_\mu f - \frac{ig}{\hbar} [\mathcal{A}_\mu, f])^{ab} t^a \otimes t^b \equiv (\tilde{\mathcal{D}}f)^{ab} t^a \otimes t^b, \\
 \left[F_{\mu\nu}, \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right]_L &= \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right)^{ab} t^a \otimes t^b, & \left[\frac{\partial f}{\partial p_\nu}, F_{\mu\nu} \right]_R &= \left(\frac{\partial f}{\partial p_\nu}, \mathcal{F}_{\mu\nu} \right)^{ab} t^a \otimes t^b
 \end{aligned}$$

и т. п., где $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv T^a F_{\mu\nu}^a$, $\mathcal{A}_\mu \equiv T^a A_\mu^a$, $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$, получаем из (17) следующие кинетические уравнения для глюонов с учетом спина в присоединенном представлении:

$$\begin{aligned}
 p^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu f + \frac{1}{2} gp^\mu \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right\} &= \frac{1}{4} ig e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} [\mathcal{F}_{\mu\nu}, \xi_2] + \\
 &+ g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(1)\sigma} + e^{(2)\nu} e^{(2)\sigma}) (\mathbf{F}_{\mu\nu} \otimes \mathbf{J}_\sigma^+ + \mathbf{J}_\sigma \otimes \mathbf{F}_{\mu\nu}^+), \\
 p^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \xi_2 + \frac{1}{2} gp^\mu \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_2}{\partial p_\nu} \right\} &= \frac{1}{4} ig e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} [\mathcal{F}_{\mu\nu}, f] + \\
 &+ ig \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(2)\sigma} - e^{(2)\nu} e^{(1)\sigma}) (\mathbf{F}_{\mu\nu} \otimes \mathbf{J}_\sigma^+ - \mathbf{J}_\sigma \otimes \mathbf{F}_{\mu\nu}^+),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \xi_1 + \frac{1}{2} g p^\mu \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_1}{\partial p_\nu} \right\} &= g p^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \xi_3 \} - \frac{1}{2} g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \xi_3 \} + \\
&+ g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(2)\sigma} + e^{(2)\nu} e^{(1)\sigma}) (\mathbf{F}_{\mu\nu} \otimes \mathbf{J}_\sigma^+ + \mathbf{J}_\sigma \otimes \mathbf{F}_{\mu\nu}^+), \\
p^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \xi_3 + \frac{1}{2} g p^\mu \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \frac{\partial \xi_3}{\partial p_\nu} \right\} &= -g p^\mu e^{(2)\sigma} \frac{\partial e_\sigma^{(1)}}{\partial p_\nu} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \xi_1 \} + \frac{1}{2} g e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu}, \xi_1 \} + \\
&+ g \frac{p^\mu}{p^2} \delta(p) (e^{(1)\nu} e^{(1)\sigma} - e^{(2)\nu} e^{(2)\sigma}) (\mathbf{F}_{\mu\nu} \otimes \mathbf{J}_\sigma^+ + \mathbf{J}_\sigma \otimes \mathbf{F}_{\mu\nu}^+). \tag{21}
\end{aligned}$$

Здесь фигурные скобки $\{ , \}$ обозначают антикоммутатор и определены векторы $\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv (F_{\mu\nu}^a)$ и $\mathbf{J}_\sigma \equiv (J_\sigma^a)$. Во избежание недоразумений отметим, что в (21) (в отличие от (17)) под функциями f и ξ_i подразумеваются цветные матрицы размерности $(N^2-1) \times (N^2-1)$. Если в правой части уравнения для f пренебречь членом с коммутатором и отбросить выражение с током, то мы получим кинетическое уравнение, впервые найденное в [5].

В заключение данного раздела отметим, что в найденные нами глюонные кинетические уравнения явным образом входят векторы $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ и их производные по импульсу. Таким образом, для полного замкнутого описания глюонного сектора КГП необходимо определить зависимость этих векторов от импульса p . Явный вид этих векторов, совместимый с требованием калибровочной свободы, приводится в приложении 2.

6. ГЛЮОННЫЙ ТОК

Рассмотрим теперь вопрос об определении явного вида флуктуационного тока $\mathbf{J}^\mu$ в терминах f и ξ_i (далее будем для простоты рассматривать кинетические уравнения в присоединенном представлении (21)). В качестве руководящего принципа используем уравнение ковариантной непрерывности тока

$$\tilde{D}_\mu \mathbf{J}^\mu \equiv \left(\partial_\mu - \frac{ig}{\hbar} \mathcal{A}_\mu \right) \mathbf{J}^\mu = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим сначала выражение для $J^{a\mu}$, предложенное в [12] и часто используемое в различных приложениях (см., например, [5, 9]):

$$J^{a\mu}(x) = \int d^4p p^\mu \text{Sp } T^a f. \tag{23}$$

Подставляя последнее выражение в (22), используя соотношение

$$f^{cab} f^{bde} = -f^{cdb} f^{abe} + f^{adb} f^{cbe} \tag{24}$$

и кинетическое уравнение для f , получим

$$(\tilde{D}_\mu \mathbf{J}^\mu)^a = -\frac{1}{4} g f^{abc} F_{\mu\nu}^b \int d^4p e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \text{Sp } T^c \xi_2. \tag{25}$$

При выводе (25) мы учли, что содержащее ток выражение в правой части уравнения для f является симметричным по цветным индексам.

Из (25) видно, что ток вида (23) не удовлетворяет условию (22) из-за наличия спин-цветового члена в правой части кинетического уравнения. Однако можно переопределить выражение (23) с учетом этого члена, чтобы удовлетворить уравнению ковариантной непрерывности. Для этой цели заметим, что правую часть (25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}f^{abc}F_{\mu\nu}^b \int d^4p e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} \text{Sp } T^c \xi_2 = \\ = -\tilde{D}_\mu^{ab} \left(\frac{1}{4} \tilde{D}_\nu^{bc} \int d^4p (e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} - e^{(2)\mu} e^{(1)\nu}) \text{Sp } T^c \xi_2 \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство $f^{abc}F_{\mu\nu}^b = (1/g)[\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu]^{ac}$. Отсюда видно, что если ток определить следующим образом:

$$J_T^{a\mu}(x) \equiv \int d^4p p^\mu \text{Sp } T^a f + \frac{1}{4} \int d^4p (e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} - e^{(2)\mu} e^{(1)\nu}) \tilde{D}_\nu^{ab} \text{Sp } T^b \xi_2,$$

то он будет удовлетворять условию ковариантного сохранения (22) (смысл введения символа T выяснится ниже). Возникновение дополнительного члена в $\mathbf{J}^\mu$ можно трактовать как проявление весьма нетривиальной взаимосвязи между спиновой и цветовой степенями свободы глюонов в динамике КГП.

Найденное выше выражение $\mathbf{J}_T^\mu$ справедливо для произвольной группы $SU(N)$. В случае $N = 2$ оно единственно. Однако для $N = 3$ существует еще одно выражение для $\mathbf{J}^\mu$, удовлетворяющее условию (22). Это связано с тем, что для этой группы, кроме антисимметричных констант, существуют также симметричные структурные константы d^{abc} . При переходе от условия (22) к (25) существенным образом использовалось равенство (24). Для группы $SU(3)$ можно записать еще одно аналогичное равенство, содержащее f^{abc} и d^{abc} :

$$f^{cab}d^{bde} = -f^{cdb}d^{abe} + d^{adb}f^{cbe}. \quad (26)$$

Справедливость (26) следует из тождества

$$[t^a, \{t^b, t^c\}] + [t^b, \{t^c, t^a\}] + [t^c, \{t^a, t^b\}] = 0.$$

Прямой подстановкой выражения

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{P}}^{a\mu}(x) \equiv \int d^4p p^\mu \text{Sp } \mathcal{P}^a \xi_2 + \frac{1}{4} \int d^4p (e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} - e^{(2)\mu} e^{(1)\nu}) \tilde{D}_\nu^{ab} \text{Sp } \mathcal{P}^b f, \\ (\mathcal{P}^a)^{bc} \equiv d^{abc}, \end{aligned}$$

в (22) убеждаемся, что ток $\mathbf{J}_{\mathcal{P}}^\mu$ также удовлетворяет условию (22) в силу (26) и кинетического уравнения для ξ_2 . Однако данный ток в отличие от $\mathbf{J}_T^\mu$ является аксиальным из-за псевдоскалярного характера функции ξ_2 и псевдотензорного характера тензора $e^{(1)\mu} e^{(2)\nu} - e^{(2)\mu} e^{(1)\nu}$.

Нетрудно убедиться, что из функций ξ_1 и ξ_3 невозможно составить величину, удовлетворяющую ковариантному условию непрерывности (22), что говорит об отсутствии какого-либо вклада во флуктуационный цветной ток линейно поляризованной части

глюонов и что фактически означает отсутствие какого-либо влияния данного типа поляризации на динамику КПП. Здесь, однако, интересно заметить, что если в уравнениях (21) для функций ξ_1 и ξ_3 в правых частях отбросить члены с током, то из этих функций можно составить бесцветное (синглетное) выражение, а именно: $s^\mu(x) \equiv \int d^4p p^\mu \times \text{Sp}(\xi_1^2 + \xi_3^2)$, удовлетворяющее обычному уравнению непрерывности $\partial_\mu s^\mu = 0$.

Таким образом, в выбранном нами квазиклассическом бесстолкновительном приближении спинные свойства глюонов проявляются лишь в связи уравнений для функции распределения f с уравнениями для функции ξ_2 , связанной с круговой поляризацией, а также в определении флуктуационного цветного тока. Эта связь имеет чисто неабелево происхождение, что было нами явно продемонстрировано на примере приближения абелевой доминантности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 95-02-03819.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем, что (13) является наиболее общим выражением для $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$, удовлетворяющим условиям (8). С этой целью для определенных значений индексов в $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ удобно ввести следующие обозначения:

$$\hat{X}_{ij} \equiv \hat{\Gamma}_{0i0j}, \quad \hat{Y}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\hat{\Gamma}_{i0kl}, \quad \hat{Z}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\hat{\Gamma}_{kl0j}, \quad \hat{\Gamma}_{ij} \equiv \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jsn}\hat{\Gamma}_{kl sn}.$$

Если теперь определить новые операторы

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \hat{X} + \hat{\Gamma}, \quad \widehat{\mathcal{M}}_2 = \hat{Y} + \hat{Z}, \quad \widehat{\mathcal{N}}_1 = \hat{X} - \hat{\Gamma}, \quad \widehat{\mathcal{N}}_2 = \hat{Y} - \hat{Z},$$

то систему (8) можно переписать в матричной форме в виде двух независимых подсистем, первой:

$$B\widehat{\mathcal{M}}_{1,2} = \widehat{\mathcal{M}}_{1,2}B, \quad p_0\widehat{\mathcal{M}}_1 = -\widehat{\mathcal{M}}_2B, \quad p_0\widehat{\mathcal{M}}_2 = \widehat{\mathcal{M}}_1B, \quad (27)$$

и второй:

$$B\widehat{\mathcal{N}}_{1,2} = -\widehat{\mathcal{N}}_{1,2}B, \quad p_0\widehat{\mathcal{N}}_1 = -\widehat{\mathcal{N}}_2B, \quad p_0\widehat{\mathcal{N}}_2 = \widehat{\mathcal{N}}_1B. \quad (28)$$

Здесь введена матрица $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} \equiv p^l \varepsilon_{lij}$. Из вида первых уравнений в системах (27), (28) ясно, что основная проблема заключается в определении всех матриц, коммутирующих и антикоммутирующих с заданной матрицей B . На основании общих теорем разрешимости матричных уравнений [13] можно показать, что таких матриц в обоих случаях три. Формальный вид их хорошо известен [10]. Для случая коммутирующих матриц имеем

$$(M_I)_{ij} \equiv e_{\perp i}^{(1)}e_{\perp j}^{(1)} + e_{\perp i}^{(2)}e_{\perp j}^{(2)}, \quad (M_{II})_{ij} \equiv e_{\perp i}^{(1)}e_{\perp j}^{(2)} - e_{\perp j}^{(1)}e_{\perp i}^{(2)}, \quad v_i v_j, \quad (29)$$

в антикоммутирующем случае –

$$(N_I)_{ij} \equiv e_{\perp i}^{(1)}e_{\perp j}^{(1)} - e_{\perp i}^{(2)}e_{\perp j}^{(2)}, \quad (N_{II})_{ij} \equiv e_{\perp i}^{(1)}e_{\perp j}^{(2)} + e_{\perp i}^{(2)}e_{\perp j}^{(1)}, \quad v_i v_j, \quad (30)$$

где векторы $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_{\perp}^{(2)}$ удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{e}_{\perp}^{(1)})^2 = (\mathbf{e}_{\perp}^{(2)})^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{\perp}^{(1)} \mathbf{e}_{\perp}^{(2)} = \mathbf{e}_{\perp}^{(1)} \mathbf{v} = \mathbf{e}_{\perp}^{(2)} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (31)$$

Операторы $\widehat{\mathcal{M}}_{1,2}$ и $\widehat{\mathcal{N}}_{1,2}$ можно представить теперь в виде разложений по базисным матрицам (29) и (30), соответственно, с произвольными операторными коэффициентами. Оставшиеся уравнения в (27) и (28) дают ряд дополнительных соотношений для этих коэффициентов, учитывая которые, окончательно находим

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{M}}_1)_{ij} &= \hat{f}(M_I)_{ij} - i\hat{\xi}_2(M_{II})_{ij}, & (\widehat{\mathcal{M}}_2)_{ij} &= -i\hat{\xi}_2(M_I)_{ij} - \hat{f}(M_{II})_{ij}, \\ (\widehat{\mathcal{N}}_1)_{ij} &= \hat{\xi}_3(N_I)_{ij} + \hat{\xi}_1(N_{II})_{ij}, & (\widehat{\mathcal{N}}_2)_{ij} &= \hat{\xi}_1(N_I)_{ij} - \hat{\xi}_3(N_{II})_{ij}, \end{aligned}$$

где $\hat{f}, \hat{\xi}_i$ – произвольные эрмитовы операторы; $(p_0)^2 = |\mathbf{p}|^2$. При выводе последних соотношений были использованы также правила сопряжений: $(\widehat{\mathcal{M}}_1)_{ij}^+ = (\widehat{\mathcal{M}}_1)_{ji}$, $(\widehat{\mathcal{M}}_2)_{ij}^+ = -(\widehat{\mathcal{M}}_2)_{ji}$, $(\widehat{\mathcal{N}}_1)_{ij}^+ = (\widehat{\mathcal{N}}_1)_{ji}$, $(\widehat{\mathcal{N}}_2)_{ij}^+ = -(\widehat{\mathcal{N}}_2)_{ji}$, вытекающие из (2).

Используя найденные выражения для $\widehat{\mathcal{M}}_{1,2}$ и $\widehat{\mathcal{N}}_{1,2}$, легко определить вид $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ и $\widehat{\Gamma}$; так, например,

$$\widehat{X}_{ij} = \frac{1}{2}\hat{f}(M_I)_{ij} - \frac{i}{2}\hat{\xi}_2(M_{II})_{ij} + \frac{1}{2}\hat{\xi}_3(N_I)_{ij} + \frac{1}{2}\hat{\xi}_1(N_{II})_{ij}. \quad (32)$$

Для того чтобы показать, что найденные выражения $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ и $\widehat{\Gamma}$ совпадают с соответствующими выражениями, следующими из (13), достаточно переписать их в терминах векторов $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$, введенных следующим образом:

$$\mathbf{e}_{\perp}^{(1,2)} = \mathbf{e}^{(1,2)} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{e}^{(1,2)}). \quad (33)$$

С помощью такой замены условиям (31) можно придать релятивистски-инвариантный вид (12), где $e_0^{(1,2)} = (\mathbf{v}\mathbf{e}^{(1,2)})$. Подставляя (33) в (32), после несложных преобразований получаем

$$\widehat{X}_{ij} = \widehat{R}_{ij} - v_j \widehat{R}_{i0} - v_i \widehat{R}_{0j} + v_i v_j \widehat{R}_{00}, \quad (34)$$

здесь

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{\mu\lambda} \equiv & \frac{1}{2}\hat{f}(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(1)} + e_{\mu}^{(2)}e_{\lambda}^{(2)}) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_1(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(2)} + e_{\mu}^{(2)}e_{\lambda}^{(1)}) - \\ & - \frac{i}{2}\hat{\xi}_2(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(2)} - e_{\lambda}^{(1)}e_{\mu}^{(2)}) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_3(e_{\mu}^{(1)}e_{\lambda}^{(1)} - e_{\mu}^{(2)}e_{\lambda}^{(2)}). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение (34) с выражением, которое следует из (13) при $\mu = \lambda = 0$, $\nu = i$, $\sigma = j$, находим, что они полностью совпадают, если положить $\hat{f} \equiv (p_0)^2 \hat{f}$, $\hat{\xi}_i \equiv (p_0)^2 \hat{\xi}_i$. Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении оставшихся величин $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ и $\widehat{\Gamma}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Как следует из приложения 1, наиболее общий вид 4-векторов $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$, входящих в кинетические уравнения (17) (или (21)), задается соотношениями

$$e^{(1,2)} = \left(e_0^{(1,2)}, \mathbf{e}_{\perp}^{(1,2)} + e_0^{(1,2)} \mathbf{v} \right),$$

где $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}$ — произвольные функции. Такая структура $e^{(1)}, e^{(2)}$ есть отражение калибровочной неоднозначности рассматриваемой теории. Матричные уравнения, рассмотренные в приложении 1, позволяют в явном виде (т.е. как функции компонент вектора $\mathbf{v}$) вычислить (29), (30) и ортогональные к $\mathbf{v}$ составляющие $\mathbf{e}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{e}_\perp^{(2)}$. В случае (29) нет необходимости даже решать матричное уравнение $[B, M] = 0$, т.к. в силу условий (31) они тождественно равны:

$$e_{\perp i}^{(1)} e_{\perp j}^{(1)} + e_{\perp i}^{(2)} e_{\perp j}^{(2)} = \delta_{ij} - v_i v_j, \quad e_{\perp i}^{(1)} e_{\perp j}^{(2)} - e_{\perp j}^{(1)} e_{\perp i}^{(2)} = -v^l \varepsilon_{lij}.$$

Несколько сложнее дело обстоит в случае антикоммутирующих матриц N_I и N_{II} . Для их определения необходимо явным образом разрешить матричное уравнение

$$BN = -NB. \quad (35)$$

Далее мы кратко приводим схему решения (35). На первом шаге строится преобразование $\mathcal{U}$, приводящее B к диагональному виду (характеристические числа матрицы B равны $\pm iE, 0$)

$$\tilde{B} = \text{diag}(iE, 0, -iE). \quad (36)$$

Преобразование $\mathcal{U}$ проще всего определяется из равенства $\mathcal{U}\tilde{B} = B\mathcal{U}$. Простые вычисления приводят к

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (iv_2 - v_1 v_3)/(1 - v_3^2) & v_1/v_2 & 1 \\ -(iv_1 + v_2 v_3)/(1 - v_3^2) & 1 & -(iv_3 + v_1 v_2)/(1 - v_1^2) \\ 1 & v_3/v_2 & (iv_2 - v_1 v_3)/(1 - v_1^2) \end{pmatrix}.$$

Произвольные постоянные, которые здесь возникают, мы положили равными единице, т.к. они в конечных выражениях лишь переопределяют коэффициенты разложений по основным матрицам (30). Отсюда нетрудно определить обратную матрицу $\mathcal{U}^{-1}$.

Найденное преобразование позволяет перейти от уравнения (35) к более простому

$$\tilde{B}\tilde{N} = -\tilde{N}\tilde{B},$$

где вместо искомой матрицы N мы ввели новую искомую матрицу $\tilde{N} = \mathcal{U}^{-1}N\mathcal{U}$. Последнее уравнение решается тривиально. Оно имеет три линейно независимых решения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

умножая которые слева на $\mathcal{U}$, а справа на $\mathcal{U}^{-1}$, получаем решения исходного уравнения (35). Последнее из этих решений совпадает с $v_i v_j$. Вместо двух оставшихся решений будем использовать их реальные и мнимые части, которые после несложных преобразований приводятся к виду

$$N' = \sqrt{\frac{1 - v_3^2}{1 - v_1^2}} \begin{pmatrix} -v_1 v_3 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & -v_2 v_3 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & 1 - v_1^2 \\ -v_2 v_3 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & v_1 v_3 (1 + v_2^2)/(1 - v_3^2) & -v_1 v_2 \\ 1 - v_1^2 & -v_1 v_2 & -v_1 v_3 \end{pmatrix},$$

$$N'' = \sqrt{\frac{1 - v_3^2}{1 - v_1^2}} \begin{pmatrix} v_2 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & -v_1 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & 0 \\ -v_1 (1 - v_1^2)/(1 - v_3^2) & v_2 (v_1^2 - v_3^2)/(1 - v_3^2) & v_3 \\ 0 & v_3 & -v_2 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы симметричны, нормированы на 2 и ортогональны между собой, т.е.

$$\text{Sp} (N')^2 = \text{Sp} (N'')^2 = 2, \quad \text{Sp} N' N'' = 0.$$

Наиболее общую связь между N_I , N_{II} и N' , N'' , удовлетворяющую условиям нормировки и ортогональности, можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} e_{\perp i}^{(1)} e_{\perp j}^{(1)} - e_{\perp i}^{(2)} e_{\perp j}^{(2)} &= \cos \varphi N'_{ij} + \sin \varphi N''_{ij}, \\ e_{\perp i}^{(1)} e_{\perp j}^{(2)} + e_{\perp i}^{(2)} e_{\perp j}^{(1)} &= -\sin \varphi N'_{ij} + \cos \varphi N''_{ij}. \end{aligned} \quad (37)$$

Соотношения (37) и определяют искомый вид матриц N_I и N_{II} как функций $\mathbf{v}$ и произвольного параметра φ .

Вектор $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$ проще всего находится из первой формулы в (37) (вектор $\mathbf{e}_{\perp}^{(2)}$ определяется соотношением $\mathbf{e}_{\perp}^{(2)} = (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_{\perp}^{(1)})$). Учитывая, что $e_{\perp i}^{(2)} e_{\perp j}^{(2)} = \delta_{ij} - v_i v_j - e_{\perp i}^{(1)} e_{\perp j}^{(1)}$, полагая $i = j$, после несложных алгебраических преобразований получаем искомый вид компонент вектора $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} e_{\perp 1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - v_1^2} \left(\cos \frac{1}{2}(\alpha - \varphi) - \sin \frac{1}{2}(\alpha - \varphi) \right), \quad e_{\perp 2}^{(1)} = \sqrt{1 - (e_{\perp 1}^{(1)})^2 - (e_{\perp 3}^{(1)})^2}, \\ e_{\perp 3}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - v_3^2} \left(\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varphi) - \sin \frac{1}{2}(\alpha + \varphi) \right), \quad \text{tg } \alpha = \frac{v_1 v_3}{v_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

В полученных соотношениях (38) проявляется своеобразная “анизотропность” как в самой структуре, так и в зависимости от компонент вектора скорости v_i (например, в определении угла α). Это связано с выбором расположения собственных чисел на диагонали матрицы $\tilde{B}$ (36). При любом другом выборе автоматически переопределяются угол α и формулы (38). Каждое расположение собственных чисел на диагонали $\tilde{B}$ однозначно связано с тем направлением одной из координатных осей, вдоль которой мы можем направить вектор $\mathbf{v}$ и получить вполне определенные выражения для $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$. Так, в случае (38) вектор $\mathbf{v}$ можно направить только вдоль оси OY . В противном случае при направлении $\mathbf{v}$ вдоль OX или OZ в определении угла α появляется неопределенность вида $0/0$. Поэтому, если мы хотим иметь возможность ориентировать $\mathbf{v}$, например, вдоль оси OX , то вместо (36) необходимо использовать матрицу $\tilde{B} = \text{diag}(0, iE, -iE)$, что приводит в конечных формулах к переопределению угла α : $\text{tg } \alpha = v_2 v_3 / v_1$ и соответственно соотношений (38).

Смысл параметра φ легко выяснить, если направить в (38) ось OY вдоль $\mathbf{v}$. Тогда имеем

$$e_{\perp 1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad e_{\perp 2}^{(1)} = 0, \quad e_{\perp 3}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что угол φ связан с произволом в ориентации вектора $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$ в плоскости, ортогональной к $\mathbf{v}$, а в конечном итоге – с произволом ориентации системы координат относительно плоскости линейной поляризации глюона.

Список литературы

- [1] *H.-Th. Elze, U. Heinz.* Phys. Rep. 1989. V. 183. P. 81.
- [2] *Ю. А. Марков, М. А. Маркова.* ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 123.
- [3] *Ю. А. Марков, М. А. Маркова.* ТМФ. 1996. Т. 108. № 1. С. 159.
- [4] *H.-Th. Elze, M. Gyulassy, D. Vasak.* Phys. Lett. B. 1986. V. 177. № 3–4. P. 402.
- [5] *St. Mrowczynski.* Phys. Rev. D. 1989. V. 39. № 7. P. 1940.
- [6] *D. Vasak, M. Gyulassy, H.-Th. Elze.* Ann. Phys. (N.Y.). 1987. V. 173. P. 462.
- [7] *H.-Th. Elze, M. Gyulassy, D. Vasak.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 276. P. 706.
- [8] *H. Weigert, U. Heinz.* Z. Phys. C. 1991. B. 50. S. 195.
- [9] *A. V. Selikhov.* Phys. Lett. B. 1991. V. 268. P. 263.
- [10] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [11] *У. Шерклиф.* Поляризованный свет. М.: Мир, 1965.
- [12] *H.-Th. Elze.* Z. Phys. C. 1988. B. 38. S. 211.
- [13] *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 18.VI.1996 г.

Yu. A. Markov, M. A. Markova

**THE SEMICLASSICAL KINETIC EQUATIONS
FOR GLUONS WITH THE ACCOUNT OF SPIN**

On the basis of the gauge-covariant Wigner operator for $SU(N)$ -gauge field the system of the transport quantum equations is obtained and their semiclassical limit is derived. Excluding the mean-field from the obtained system in the collisionless approximation the kinetic equations describing non-virtual (thermal) gluon with the account of spin are separated.