Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Вейсман, С. Ю. Калмыков, Коррелированные когерентные состояния двумерного квантового осциллятора с нестационарной связью мод, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 304–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:04:00

М. Е. Вейсман*, С. Ю. Калмыков*

КОРРЕЛИРОВАННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНОГО КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВЯЗЬЮ МОД

Исследованы явления сжатия и корреляции квантовых флуктуаций в коррелированных когерентных состояниях системы двух осцилляторных мод с параметрической связью координат. В условиях сильной связи мод обнаружены возбуждение и сильная корреляция квантовых флуктуаций. Матрица дисперсий и ковариаций импульсов и координат найдена в явном виде с помощью метода линейных квантовых интегралов движения.

1. Двумерный квантовый осциллятор с параметрической связью мод может служить моделью двухмодового сжатого света [1, 2], интерес к статистическим свойствам которого связан с использованием параметрического возбуждения в разнообразных квантовооптических системах [3] с целью получения сжатых [4] и коррелированных [5] состояний электромагнитного поля. В недавних работах [6–8] исследовались параметрическое [6, 7] и нелинейное [8] возбуждения бозе-осцилляторов поля и особенности фотонной статистики возникающих неклассических состояний поля. Сжатие и корреляция квантовых флуктуаций в системах нестационарных связанных осцилляторов рассматривались в последнее время в работах [9, 10]. Нестационарная связь мод может возникать в процессе распространения когерентного света в нелинейной среде с показателем преломления, зависящим от амплитуды поля. Результаты настоящей работы могут иметь, таким образом, приложения в нелинейных задачах квантовой оптики [11].

Целью нашей работы является изучение сжатия и возбуждения квантовых флуктуаций в коррелированных когерентных состояниях двумерного квантового осциллятора с параметрической связью координат конечной длительности. Модовые частоты предполагаются различными постоянными действительными числами. Предполагается, что координаты двумерного осциллятора связаны в течение ограниченного промежутка времени, причем частота связи является постоянной действительной величиной [12]. Гамильтониан осцилляторных мод с описанной выше нестационарной связью имеет вид

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{B} \hat{\mathbf{Q}}, \quad (1)$$

*Московский физико-технический институт, Москва, Россия

где $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ – 4-столбец операторов импульсов ($\hat{p}_i$) и координат ($\hat{q}_i$) (в квантовой оптике соответствующих квадратурным компонентам двухмодового света), $\mathbf{B}(t)$ – 4×4 -матрица:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \omega^2 & \lambda(t) \\ \lambda(t) & \omega^{-2} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{I}_2$ – единичная 2×2 -матрица. Гамильтониан (1) записан в безразмерных переменных таких, что энергия нормирована на $\hbar\sqrt{\omega_1\omega_2}$, где $\hbar$ – постоянная Планка, $\omega_{1,2}$ – частоты связанных мод, при этом $\omega^2 = \omega_1/\omega_2$. Коэффициент связи $\lambda(t)$ полагается кусочно-постоянной функцией: $\lambda(0 < t < T) = \omega_0^2$, $\lambda(t < 0, t > T) = 0$, T – длительность связи мод (время измеряется в единицах $(\omega_1\omega_2)^{-1/2}$), ω_0 – безразмерная константа связи. В общем случае $\omega^2 \neq 1$. Все частоты действительны, а массы осцилляторов выбраны равными единице. Введение нормальных координат канонической заменой, сохраняющей коммутационные соотношения динамических переменных $[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] = -i\Sigma_{ab}$ ($a, b = 1, 2, 3, 4$), где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

оказывается невозможным при $\omega^2 \neq 1$, и поэтому задача будет решаться в исходных переменных.

2. Данная квантово-механическая модель является точно решаемой методом линейных интегралов движения [13, 14]. Известно, что существование унитарного оператора эволюции системы делает возможным построение $2N$ линейных интегралов движения $\hat{\mathbf{p}}_0(t)$, $\hat{\mathbf{q}}_0(t)$ (в нашем случае число степеней свободы $N = 2$) посредством канонического преобразования динамических переменных

$$\hat{I}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0(t) \\ \hat{\mathbf{q}}_0(t) \end{pmatrix} = \Lambda(t)\hat{\mathbf{Q}}, \quad (2)$$

не меняющего коммутационных соотношений $[\hat{I}_a, \hat{I}_b] = [\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]$, так что $\Lambda^{-1} = -\Sigma\tilde{\Lambda}\Sigma$ (“тильда” означает транспонирование матрицы). Физический смысл интегралов движения (2) заключается в том, что они описывают $2N$ начальных значений импульсов и координат системы. Согласно теореме Стоуна–фон Неймана [15] $\hat{\mathbf{p}}_0(t)$ и $\hat{\mathbf{q}}_0(t)$ образуют полный набор интегралов движения данной квантовой системы [13]: любая функция операторов $\hat{\mathbf{p}}_0(t)$, $\hat{\mathbf{q}}_0(t)$ оказывается интегралом движения. Необходимым и достаточным условием инвариантности операторов $\hat{\mathbf{p}}_0$, $\hat{\mathbf{q}}_0$ является эволюция Λ -матрицы согласно матричному уравнению

$$\dot{\Lambda} = \Lambda\Sigma\mathbf{B} \quad (3)$$

с начальным условием $\Lambda(0) = \mathbf{I}_4$, где $\mathbf{I}_4$ – единичная 4×4 -матрица. Система (3) с кусочно-постоянным коэффициентом связи имеет решение

$$\Lambda(t \leq T) = \mathbf{T}_+ \otimes \Xi_+ - \mathbf{T}_- \otimes \Xi_-, \quad (4)$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение вспомогательных матриц

$$\mathbf{T}_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{\pm}t) & \Omega_{\pm} \sin(\Omega_{\pm}t) \\ -\Omega_{\pm}^{-1} \sin(\Omega_{\pm}t) & \cos(\Omega_{\pm}t) \end{pmatrix}, \quad \Xi_{\pm} = \frac{1}{a_+ - a_-} \begin{pmatrix} a_{\pm} & 1 \\ 1 & -a_{\mp} \end{pmatrix},$$

выраженных через параметры $\omega_{\pm}^2 = \omega^2 \pm \omega^{-2}$, $\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\omega_+^2 \pm (\omega_-^4 + 4\omega_0^4)^{\frac{1}{2}})$, $a_{\pm} = (\Omega_{\pm}^2 - \omega^{-2})/\omega_0^2$, $a_+ a_- = -1$. Матрицы $\Xi_{\pm}$ удовлетворяют соотношениям $\Xi_{\pm} \mathbf{B}_2 = \Omega_{\pm}^2 \Xi_{\pm}$ и обладают свойствами $\Xi_{\pm}^2 = \pm \Xi_{\pm}$ и $\Xi_+ \Xi_- = \mathbf{0}$. Величины $\Omega_{\pm}$ совпадают с собственными значениями уравнений Гамильтона для классического двумерного связанного осциллятора с гамильтонианом (1). В условиях сильной связи ($\omega_0^2 > 1$) классический двумерный связанный осциллятор имеет неположительно-определенную потенциальную энергию ($\det \mathbf{B}_2 < 0$) и является неустойчивой системой. Собственное значение Ω_- при этом чисто мнимое, что приводит к неустойчивому поведению элементов $\mathbf{\Lambda}$ -матрицы канонического преобразования (2). В противоположном случае слабой связи классическая система совершает финитное движение, собственные значения задачи действительны и элементы $\mathbf{\Lambda}$ -матрицы ограничены.

3. Матрица дисперсий и ковариаций импульсов и координат

$$\sigma_Q = \frac{1}{2} \langle \hat{Q}_{\alpha} \hat{Q}_{\beta} + \hat{Q}_{\beta} \hat{Q}_{\alpha} \rangle - \langle \hat{Q}_{\alpha} \rangle \langle \hat{Q}_{\beta} \rangle = \begin{pmatrix} \sigma_{pp} & \sigma_{qp}^T \\ \sigma_{qp} & \sigma_{qq} \end{pmatrix}$$

— действительная симметричная положительно-определенная 4×4 -матрица с элементами, подчиняющимися определенным ограничениям (обобщенным соотношениям неопределенности [14]).

Предполагается, что при $t < 0$ квантовое состояние рассматриваемой модели является когерентным состоянием [16] $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$ (или как частный случай вакуумным состоянием $|0\rangle|0\rangle$) несвязанных мод с матрицей дисперсий

$$\sigma_Q(t \leq 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_q \end{pmatrix}$$

с диагональными блоками

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\sigma_Q(t)$ используется матрица дисперсий интегралов движения $\sigma_I = \frac{1}{2} \langle \hat{I}_a \hat{I}_b + \hat{I}_b \hat{I}_a \rangle - \langle \hat{I}_a \rangle \langle \hat{I}_b \rangle$. Средние значения интегралов не зависят от времени, так что $\sigma_I = \sigma_I(t=0) = \sigma_Q(t=0)$. Поскольку $\hat{Q}_a \hat{Q}_b = (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{ai} \hat{I}_i (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{jb}$, имеем

$$\sigma_Q(0 \leq t \leq T) = \mathbf{\Lambda}^{-1}(t) \sigma_I (\mathbf{\Lambda}^T(t))^{-1}. \quad (5)$$

Рис. 1. Нормированная дисперсия координаты $K_{q_1 q_1}$.

Отсюда непосредственно следуют выражения для 2×2 -блоков матрицы дисперсий

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(t \leq T) = \sum_{\sigma=\pm} \left(\frac{\sin^2(\Omega_\sigma t)}{\Omega_\sigma^{-2}} \mathbf{A}_{q\sigma} + \cos^2(\Omega_\sigma t) \mathbf{A}_{p\sigma} \right) - \\ - \left(\frac{\sin(\Omega_+ t) \sin(\Omega_- t)}{\Omega_+^{-1} \Omega_-^{-1}} - \cos(\Omega_+ t) \cos(\Omega_- t) \right) (\mathbf{B}_q + \mathbf{B}_q^T), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{qq}(t \leq T) = \sum_{\sigma=\pm} \left(\frac{\sin^2(\Omega_\sigma t)}{\Omega_\sigma^2} \mathbf{A}_{p\sigma} + \cos^2(\Omega_\sigma t) \mathbf{A}_{q\sigma} \right) - \\ - \left(\cos(\Omega_+ t) \cos(\Omega_- t) - \frac{\sin(\Omega_+ t) \sin(\Omega_- t)}{\Omega_+ \Omega_-} \right) (\mathbf{B}_q + \mathbf{B}_q^T), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{qp}(t \leq T) = \sum_{\sigma=\pm} \frac{1}{2} \sin(2\Omega_\sigma t) (\Omega_\sigma^{-1} \mathbf{A}_{p\sigma} + \Omega_\sigma \mathbf{A}_{q\sigma}) + \\ + \left(\frac{\sin(\Omega_- t) \cos(\Omega_+ t)}{\Omega_-^{-1}} - \frac{\sin(\Omega_+ t) \cos(\Omega_- t)}{\Omega_+} \right) \mathbf{B}_q + \\ + \left(-\frac{\sin(\Omega_- t) \cos(\Omega_+ t)}{\Omega_-} + \frac{\sin(\Omega_+ t) \cos(\Omega_- t)}{\Omega_+^{-1}} \right) \mathbf{B}_q^T, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{A}_{q\pm} = \Xi_\pm \mathbf{E}_q \Xi_\pm$, $\mathbf{A}_{p\pm} = \Xi_\pm \mathbf{E}_p \Xi_\pm$, $\mathbf{B}_q = \Xi_+ \mathbf{E}_q \Xi_-$, $\mathbf{B}_p = \Xi_+ \mathbf{E}_p \Xi_- = -\mathbf{B}_q$.

Рис. 2. Нормированная дисперсия координаты $K_{q_2 q_2}$.

В процессе эволюции согласно уравнению Шредингера с *квадратичным* нестационарным гамильтонианом (1) состояние двумерного осциллятора $|\alpha_1, \alpha_2, t\rangle$ остается двумерным гауссовым пакетом, описываемым функцией Вигнера [17]

$$W(\mathbf{Q}, t) = (\det \sigma_Q(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{Q} \sigma_Q^{-1} \mathbf{Q}\right),$$

где двумерному чистому гауссову (когерентному) состоянию $|\alpha_1, \alpha_2, t\rangle$ соответствует минимизированное соотношение неопределенности [17] $\det \sigma_Q(t) = \det \sigma_Q(t=0) = (\frac{1}{4})^2$. Здесь 4-мерный вектор $\mathbf{Q} = (p_1, p_2, q_1, q_2)$ образован вейлевскими символами операторов импульсов (p_i) и координат (q_i). Таким образом, временная эволюция состояния полностью определяется эволюцией матрицы дисперсий с блоками (6)–(8). Коэффициенты корреляции $\Gamma_{q_i p_j} = \sigma_{q_i p_j} / \sqrt{\sigma_{q_i q_i} \sigma_{p_j p_j}}$ определяют статистическую зависимость операторов координат и импульсов в данном состоянии. Поскольку коэффициенты корреляции, равные нулю в начальном когерентном состоянии несвязанных мод, становятся ненулевыми во все последующие моменты времени, мы говорим, что когерентное состояние связанных мод является “коррелированным”.

При отсутствии связи мод матрица дисперсий эволюционирует во времени согласно уравнению, аналогичному (5):

$$\sigma_Q(t > T) = \Lambda_0^{-1}(t - T) \sigma_Q(t = T) (\Lambda_0^T(t - T))^{-1},$$

Рис. 3. Нормированная дисперсия импульса $K_{p_1 p_1}$.

где $\Lambda_0(t)$ есть Λ -матрица (4) с $\omega_0 = 0$ (несвязанные моды). Явный вид $\sigma_Q(t > T)$ не приводится по причине его громоздкости.

На рис. 1–4 показаны дисперсии координат и импульсов ($\omega^2 = 5$) как функции длительности T и константы связи ω_0 , не превосходящей предела слабой связи ($\omega_0^2 < 1$). Эти дисперсии нормированы на соответствующие дисперсии в начальном когерентном состоянии $K_{q_1 q_1} = 2\omega\sigma_{q_1 q_1}$, $K_{q_2 q_2} = 2\omega^{-1}\sigma_{q_2 q_2}$, $K_{p_1 p_1} = 2\omega^{-1}\sigma_{p_1 p_1}$, $K_{p_2 p_2} = 2\omega\sigma_{p_2 p_2}$. Говорят, что состояние системы является сжатым, если дисперсии импульсов $\sigma_{p_i p_i}$ и/или координат $\sigma_{q_i q_i}$ оказываются меньше их значений в начальном когерентном состоянии. В этом смысле коррелированное когерентное состояние двумерного осциллятора в условиях слабой связи оказывается сжатым состоянием, т.к. при определенных значениях длительности и константы связи как $K_{p_i p_i}$, так и $K_{q_i q_i}$ могут оказаться меньше единицы (см. рис. 1, 3, 4). С другой стороны, при условии $T\omega_0 > 1$ возможно увеличение дисперсий квадратурных компонент по сравнению с их начальными значениями (это особенно заметно на рис. 2). При аналогичном условии (произведение константы связи на время наблюдения больше единицы) было обнаружено увеличение дисперсии числа фотонов для параметрического бозе-осциллятора [6, 7].

В условиях сильной связи можно получить асимптотический вид блоков (6)–(8) матрицы дисперсий при $\omega_0 \gg \omega$, $\omega_0 \gg \omega^{-1}$, учитывая, что $\Omega_+ \approx \omega_0$, $\Omega_- \approx i\omega_0$, и пренеб-

Рис. 4. Нормированная дисперсия импульса $K_{p_2 p_2}$.

регая членами, растущими медленнее $e^{2\omega_0 t}$. В этом случае имеем

$$\sigma_{pp}(t \leq T) \approx \frac{1}{32} \omega_0^2 (\omega^{-1} + \omega) e^{2\omega_0 t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем $\sigma_{qq} = \omega_0^{-2} \sigma_{pp}$, $\sigma_{pq} = -\omega_0^{-1} \sigma_{pp}$. В условиях сильной связи происходит сильное возбуждение квантовых флуктуаций двумерного квантового осциллятора, что выражается в экспоненциальном временном росте их дисперсий (9). Заметим, что при этом состояние осциллятора остается сильно коррелированным ($\Gamma_{p_i q_j} \neq 0$). Понятно, что в условиях сильной связи мод невозможно образование связанного состояния в двумерном потенциале классического связанного осциллятора (потенциальная энергия неположительно определена), а это значит, что система совершает инфинитное движение в своем фазовом пространстве, что и выражается на квантовом языке в экспоненциально неустойчивом поведении дисперсий и ковариаций импульсов и координат.

Итак, показано, что в зависимости от условий связи мод поведение квантовых флуктуаций в коррелированном когерентном состоянии двумерного квантового осциллятора может иметь принципиально разный характер: сжатие в условиях слабой связи и возбуждение и сильная корреляция при сильной связи мод.

Один из авторов (С. Ю. К.) благодарит Соросовскую образовательную программу (ISSEP) за поддержку (Соросовская стипендия для аспирантов, грант № а96-1913).

Список литературы

- [1] *C. M. Caves, B. L. Schumaker.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3068; *B. L. Schumaker, C. M. Caves.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3093; *S. M. Barnett, P. L. Knight.* J. Opt. Soc. Amer. B. 1985. V. 2. P. 467.
- [2] *O. Castaños, R. Lopez-Pena, V. I. Man'ko.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 5209.
- [3] Squeezed States of the Electromagnetic Field. J. Opt. Soc. Amer. B. 1987. V. 4. № 10.
- [4] *D. F. Walls.* Nature. 1983. V. 306. P. 141.
- [5] *V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1980. V. 79. P. 150.
- [6] *Л. А. Сюракшина, В. С. Ярунин.* ТМФ. 1992. Т. 92. С. 158.
- [7] *L. A. Siurakshina, V. S. Yarunin.* Phys. Lett. A. 1992. V. 164. P. 167.
- [8] *E. A. Kochetov, V. S. Yarunin.* Physica Scripta. 1995. V. 51. P. 46.
- [9] *C. F. Lo.* Phys. Lett. A. 1992. V. 162. P. 299.
- [10] *Leehwa Yeh, O. V. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1994. V. 189. P. 268.
- [11] *L. A. Lugiato, A. Gatti.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3868.
- [12] *В. В. Додонов, О. В. Манько, В. И. Манько.* Тр. ФИАН. 1989. Т. 191. С. 224.
- [13] *И. А. Малкин, В. И. Манько.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979. С. 72; *I. A. Malkin, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1970. V. 32. P. 243.
- [14] *В. В. Додонов, В. И. Манько.* Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 182.
- [15] *P. Рунтмайер.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1. С. 362; *J. von Neuman.* Math. Annal. B. 1931. V. 104. P. 570.
- [16] *R. J. Glauber.* Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 2766.
- [17] *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 813.

Поступила в редакцию 16.XII.1996 г.

M. E. Veisman, S. Yu. Kalmykov

**CORRELATED COHERENT STATES OF
TWO-DIMENSIONAL QUANTUM OSCILLATOR
WITH NONSTATIONARY MODE COUPLING**

The phenomena of squeezing and correlation of quantum fluctuations in the correlated coherent states of two oscillatory modes with a parametric coupling of coordinates are investigated. Under the conditions of strong mode coupling both the excitation and strong correlation of quantum fluctuations are discovered. The matrix of dispersions and covariances of dynamical variables is found explicitly with the use of the method of linear quantum integrals of motion.