Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Денисов, Изотропные геодезические в окрестности сингулярности статического сферически-симметричного решения, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 2, 312–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:04:54

В. И. Денисов*

ИЗОТРОПНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНОСТИ СТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО РЕШЕНИЯ

Проведено изучение движения безмассовой частицы в окрестности сингулярности статического сферически-симметричного решения релятивистской теории гравитации. Показано, что наличие массы у гравитона приводит к появлению качественно новых траекторий движения.

Как показано в работах [1, 2], приближенное решение уравнений релятивистской теории гравитации в случае статической сферически-симметричной метрики имеет вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= (1 + 2mM) \frac{r - Z_q}{r} + qm^2 M^2, \quad q > 0, \\ g_{rr} &= -\frac{r}{r - Z_q}, \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса гравитона, M – масса источника гравитационного поля, $Z_q = 2M - \nu m^2 M^2 \ln mM$, причем $\nu > 0$.

Так как это решение имеет сингулярность на сфере $r = Z_q$ и в окрестности этой сферы на свободные частицы действуют силы гравитационного отталкивания, то возникает вопрос, может ли эта сингулярность существовать вне материального источника, или, говоря иными словами, можно ли создать такой источник, чтобы сингулярность была хотя бы на его границе. Как оказалось, ответ на этот вопрос положительный: такой источник можно создать в виде сферы $r = Z_q$, состоящей из материальных частиц, если при движении частиц к этой сфере на них, помимо гравитационных сил, действовали тормозящие силы F^i негравитационной природы (силы трения, радиационного излучения и т.п.).

Таким образом, выражение (1) можно рассматривать как внешнее решение уравнений релятивистской теории гравитации. Следует отметить, что выражение (1) является приближенным решением уравнений релятивистской теории гравитации, полученным в результате разложения по степеням безразмерного параметра $\xi = mM$. Этот параметр очень мал даже для таких звезд, как голубые сверхгиганты, масса которых достигает сотен масс Солнца.

Действительно, восстановив множители G , $\hbar$ и c , равные единице в использованной до этого системе единиц, для параметра ξ будем иметь $\xi = GMm/\hbar c$. Так как согласно

*Московский государственный университет, Москва, Россия

работе [3] масса гравитона очень мала ($m \sim 10^{-65} - 10^{-66}$ г), то легко убедиться, что при $M \sim 10^2 M_\odot \sim 10^{35}$ г получим оценку $\xi \sim 10^{-21}$. Для того чтобы коэффициент ξ , существенно влияющий на все характерные свойства метрики (1), был равен единице, необходимо, чтобы масса источника гравитационного поля была $M \sim 10^{23} M_\odot \sim 10^{56}$ г. Так как эта масса сравнима с массой видимой части Вселенной, то очевидно, что при изучении гравитационного поля любых астрофизических объектов $\xi \ll 1$.

Поэтому выражение (1) должно хорошо передавать все характерные особенности точного решения в достаточно большой (даже по астрофизическим меркам) области пространства. Расстояние от источника, на котором правомерно использовать выражение (1), по порядку величины можно оценить, если учесть, что при $r \rightarrow \infty$ точное решение [3] имеет следующее асимптотическое поведение:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} e^{-mr}, \quad g_{rr} = - \left[1 + \frac{2M}{r} e^{-mr} \right].$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (1), в качестве критерия применимости приближенного решения (1) можно записать два условия:

$$\xi \ll 1, \quad r \ll \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{mc}.$$

Подставляя в последнее неравенство численные значения, получим $r \ll 10^{28}$ см. Так как это расстояние сравнимо с размерами видимой части Вселенной, то при изучении гравитационных эффектов в поле массивных источников $M \leq 10^2 M_\odot$ и на расстояниях, не превышающих размеры Галактики $r \leq 10^{23}$ см, выражение (1) должно хорошо передавать основные особенности точного решения уравнений релятивистской теории гравитации. Поэтому при дальнейших вычислениях мы именно его и будем использовать, полагая $\xi \ll 1$ и интересуясь движением частиц в области пространства $r \ll 10^{28}$ см.

Следует отметить, что поскольку используемая в выражении (1) переменная x^0 является координатной величиной, отражающей некоторый частный выбор арифметизации точек временной оси, то мы можем, не ограничивая общности, использовать и другие способы арифметизации точек этой оси.

Для наших целей удобнее перейти в выражениях (1) от переменной x^0 эффективно-го псевдориманова пространства-времени к переменной $x'^0 = x^0 \sqrt{1 + 2mM + qm^2 M^2}$, увеличив темп хода координатных часов в $\sqrt{1 + 2mM + qm^2 M^2}$ раз. Как известно [4], такое преобразование не выводит нас из первоначальной системы отсчета и совершенно не сказывается на физически наблюдаемых величинах.

Переходя в выражениях (1) к новому координатному времени и опуская в полученных соотношениях штрихи, получаем

$$\begin{aligned} g_{00} = U(r) &= 1 - \frac{BZ_q}{r}, \quad g_{rr} = -V(r) = -\frac{r}{r - Z_q}, \\ g_{\theta\theta} &= -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где введено обозначение $B = (1 + 2mM)/(1 + 2mM + qm^2 M^2) < 1$.

Изучим движение безмассовых частиц в гравитационном поле (2). Запишем уравнение геодезического движения

$$\frac{dk^i}{d\sigma} + \Gamma_{nl}^i k^n k^l = 0, \quad (3)$$

где σ – некоторый аффинный параметр, $k^i = dx^i/d\sigma$ – касательный вектор к изотропной геодезической, удовлетворяющий условию

$$k^i k^n g_{ni} = 0.$$

Так как траектория движения безмассовой частицы в псевдоримановом пространстве-времени (2) является плоской, то выберем систему координат так, чтобы эта плоскость совпала с плоскостью $\theta = \pi/2$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dk^0}{d\sigma} + \frac{U'}{U} k^0 k^r &= 0, \\ \frac{dk^r}{d\sigma} + (k^0)^2 \left\{ \frac{U'}{2V} - \frac{r\dot{\phi}^2}{V} + \frac{V'}{2V} \dot{r}^2 \right\} &= 0, \\ \frac{dk^\phi}{d\sigma} + \frac{2}{r} k^\phi k^r &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где точка обозначает производную по координатному времени t , а штрих – по r . Несложно убедиться, что первое и третье уравнения дают

$$k^0 = \frac{E_0}{U}, \quad k^\phi = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (5)$$

где E_0 и α – константы интегрирования, зависящие от начальных значений $r(0)$, $\dot{r}(0)$, $\phi(0)$ и $\dot{\phi}(0)$.

Подставляя выражения (5) в условие $k^i k_i = 0$, можно найти первый интеграл для второго уравнения системы (4):

$$(k^r)^2 = \frac{1}{V} \left\{ \frac{E_0^2}{U} - \frac{\alpha^2}{r^2} \right\}. \quad (6)$$

Учитывая, что $k^\beta = k^0 v^\beta$, из выражений (5) и (6) будем иметь

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha U}{E_0 r^2}, \quad \dot{r}^2 = \frac{U}{V} \left[1 - \frac{\alpha^2 U}{E_0^2 r^2} \right]. \quad (7)$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение системы (4), получим соотношение

$$\ddot{r} = \left[1 - \frac{\alpha^2 U}{E_0^2 r^2} \right] \left[\frac{U'}{V} - \frac{V' U}{2V^2} \right] + \frac{\alpha^2 U^2}{E_0^2 r^3 V} - \frac{U'}{2V}. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) позволяют провести полное исследование законов движения безмассовых частиц в гравитационном поле (2). Рассмотрим сначала радиальное движение. В этом случае $\alpha = 0$ и уравнение (7) примет вид

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{U}{V}}, \quad (9)$$

где знак плюс соответствует движению от центра, а минус – к центру. Интегрируя это уравнение с учетом выражений (2), приходим к следующему закону радиального движения $t = t(r)$ безмассовой частицы в гравитационном поле (2):

$$t = t_0 \pm \left\{ \sqrt{(r - Z_q)(r - BZ_q)} + (1 + B)Z_q \ln \left[\frac{\sqrt{r - Z_q} + \sqrt{r - BZ_q}}{\sqrt{Z_q}} \right] \right\}, \quad (10)$$

где t_0 – постоянная интегрирования, определяемая положением частицы r_0 в начальный момент времени $t = 0$.

Несложно убедиться, что при $m = 0$ выражение (10) перейдет в соответствующее решение общей теории относительности.

Как следует из выражения (10), безмассовая частица при движении к центру из точки $r_0 < \infty$ может достичь сингулярности $r = Z_q$ за конечное координатное время

$$t_s = t_0 + (1 + B)Z_q \ln \frac{1}{\sqrt{(1 - B)}}.$$

Время этого движения частицы остается конечным и при измерении по часам неподвижного наблюдателя, в силу того что при $r \geq Z_q$ функция $U(r)$ не обращается в нуль.

Так как при $r = Z_q$ координатная скорость частицы (9) равна нулю, а радиальное ускорение (8) положительно, то после достижения сферы $r = Z_q$ безмассовая частица начнет движение в обратном направлении [1]. Частота электромагнитной волны, измеряемая неподвижным наблюдателем, находящимся в некоторой точке r , согласно [4] будет иметь вид

$$\omega_{\text{наб}} = ck^{\bar{0}} = c\lambda_i^{\bar{0}}k^i = c\lambda_0^{\bar{0}}k^0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{U}}, \quad (11)$$

где ω_0 – частота электромагнитной волны, измеренная на пространственной бесконечности. Наблюдаемая частота электромагнитной волны на поверхности сферы $r = Z_q$

$$\omega_{\text{наб}}(r = Z_q) \sim \frac{\omega_0}{\sqrt{(1 - B)}} = \frac{\omega_0}{mM\sqrt{q}}$$

значительно превосходит частоту ω_0 , причем коэффициент пропорциональности существенно зависит от массы гравитона. Из соотношения (11) также следует, что если с поверхности сферы $r = Z_q$ излучается электромагнитная волна, частота которой, измеренная наблюдателем, находящимся на этой же сфере, равна ω_0 , то на пространственной бесконечности частота этой волны будет значительно смещена в красную сторону спектра:

$$\omega_{\text{наб}}(r = \infty) \sim \omega_0 \sqrt{(1 - B)} = \omega_0 \xi \sqrt{q} \ll \omega_0,$$

так как $\xi \ll 1$ для всех звезд.

Рассмотрим теперь нерадиальное движение безмассовой частицы. Для этого, используя первое из соотношений (7), удобно перейти во втором соотношении (7) от производной по времени к производной по полярному углу ϕ :

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{r(r - Z_q)[E_0^2 r^3 - \alpha^2 r + \alpha^2 B Z_q]}{\alpha^2 (r - B Z_q)}. \quad (12)$$

Совершенно аналогично приведем выражение (8) с учетом (7) к виду, удобному для дальнейшего исследования:

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2} = \frac{(4r - 3Z_q)[E_0^2 r^3 - \alpha^2 r + \alpha^2 B Z_q]}{2\alpha^2(r - B Z_q)} + (r - Z_q) \left[1 - \frac{E_0^2 B Z_q r^3}{2\alpha^2(r - B Z_q)^2} \right]. \quad (13)$$

Вид траектории полностью определяется поведением функции, стоящей в правой части равенства (12), а точнее взаимным расположением и кратностью нулей этой функции.

Так как движение безмассовой частицы изучается нами в области $r \geq Z_q$, а $B < 1$, то корни функции $(dr/d\phi)^2$ в этой области совпадают с корнями кубического уравнения $f(r) = E_0^2 r^3 - \alpha^2 r + \alpha^2 B Z_q$ и, кроме того, один корень лежит на сфере $r = Z_q$. Уравнение же $f(r) = 0$ может иметь от одного до трех действительных корней в зависимости от соотношения между величинами E_0 и α , характеризующими начальные условия для безмассовой частицы, и величинами B и Z_q , зависящими от массы M источника тяготения и массы m гравитона. В частности, если

$$E_0^2 > \frac{4\alpha^2}{27B^2 Z_q^2}, \quad (14)$$

то уравнение $f(r) = 0$ имеет один действительный корень и два комплексных; при выполнении условия

$$E_0^2 < \frac{4\alpha^2}{27B^2 Z_q^2} \quad (15)$$

это уравнение имеет три различных действительных корня, и при

$$E_0^2 = \frac{4\alpha^2}{27B^2 Z_q^2} \quad (16)$$

из трех действительных корней два совпадают.

Обозначая корни функции $f(r) = 0$ через r_1 , r_2 и r_3 , в силу теоремы Виета будем иметь

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0, \quad r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -\frac{\alpha^2}{E_0^2}, \quad r_1 r_2 r_3 = -\frac{\alpha^2 B Z_q}{E_0^2}. \quad (17)$$

Последнее из этих соотношений означает, что один из вещественных корней (обозначим его через r_1) должен быть отрицательным. Два остальных корня могут быть либо комплексно-сопряженными, либо действительными (различными или одинаковыми). Используя соотношения (17), несложно показать, что $r_2 + r_3 > 0$ и $r_2 r_3 > 0$. Поэтому если корни r_2 и r_3 вещественные, то они обязаны быть положительными.

Рассмотрим все возможные случаи последовательно.

Пусть корни r_2 и r_3 являются вещественными и равными. Для обеспечения этого требования, как следует из условий $f(r) = 0$, $f'(r) = 0$, необходимо и достаточно,

чтобы выполнялось соотношение (16). В этом случае $r_1 = -3BZ_q$, $r_2 = r_3 = 3BZ_q/2$ и выражение (12) принимает вид

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r(r - Z_q)(r + 3BZ_q)(2r - 3BZ_q)^2}{27B^2Z_q^2(r - BZ_q)}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\phi = \phi_0 + 3\sqrt{3}BZ_q \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{|2r - 3BZ_q| \sqrt{r(r - Z_q)(r + 3BZ_q)}}, \quad (18)$$

где r_0 и ϕ_0 – полярные координаты частицы в начальный момент времени.

Этот интеграл может быть выражен через эллиптические функции, однако исследовать поведение траектории удобнее, используя запись уравнения $\phi = \phi(r)$ в квадратурах.

Так как подынтегральное выражение в равенстве (18) имеет в области $r \geq Z_q$ особенность вида $[r - Z_q]^{-1/2}$ в точке $r = Z_q$ и особенность вида $[r - 3BZ_q/2]^{-1}$ в точке $r = 3BZ_q/2$, то из общей теории следует, что при $r_0 < \infty$ интеграл в (18) принимает конечное значение при $r = Z_q$ и расходится при $r = 3BZ_q/2$.

Это означает, что область пространства $r \geq Z_q$, в которой может происходить движение, разбивается на две подобласти: $Z_q \leq r < 3BZ_q/2$ и $3BZ_q/2 < r < \infty$, в каждой из которых имеется своя траектория безмассовой частицы; двигаясь по траектории, лежащей в одной из этих областей, частица не в состоянии попасть в другую область. По какой из этих двух траекторий будет двигаться частица – полностью определяется начальным значением r_0 .

Если r_0 принадлежит первой области пространства, то траектория, проходящая через точку $Z_q < r_0 < 3BZ_q/2$ и $\phi = \phi_0$, приближается к окружности $r = Z_q$ за конечное число оборотов, равное целому от величины

$$\left| \frac{\phi - \phi_0}{2\pi} \right| = \frac{3\sqrt{3}BZ_q}{2\pi} \int_{Z_q}^{r_0} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{|2r - 3BZ_q| \sqrt{r(r - Z_q)(r + 3BZ_q)}},$$

в то время как к окружности $r = 3BZ_q/2$ траектория приближается асимптотически, закручиваясь вокруг нее по спирали бесконечное число раз. Так как в силу соотношения (13) $d^2r/d\phi^2 > 0$ в точке $r = Z_q$, то эта траектория, коснувшись окружности $r = Z_q$ при

$$\phi = \phi_m = \phi_0 + 3\sqrt{3}BZ_q \int_{r_0}^{Z_q} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{|2r - 3BZ_q| \sqrt{r(r - Z_q)(r + 3BZ_q)}},$$

отражается от нее и начинает асимптотическое приближение к окружности $r = 3BZ_q/2$. Ветви траектории $\phi < \phi^*$ и $\phi > \phi^*$ симметричны друг другу и отличаются лишь знаком производной $dr/d\phi$.

Траектория, проходящая через точку $r_0 > 3BZ_q/2$ и $\phi = \phi_0$, во второй области пространства также асимптотически приближается к окружности $r = 3BZ_q/2$, делая бесконечное число оборотов вокруг нее. Так как подынтегральное выражение равенства (18) при $r \rightarrow \infty$ убывает пропорционально r^{-2} , то при $r_0 > 3BZ_q/2$ и $r \rightarrow \infty$ этот

интеграл сходится. Это означает, что другой конец этой траектории уходит на пространственную бесконечность, совершив конечное число оборотов, и при $r \rightarrow \infty$ имеет асимптотой полупрямую $\phi = \phi_\infty$, где

$$\phi_\infty = \phi_0 + 3\sqrt{3}BZ_q \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{|2r - 3BZ_q| \sqrt{r(r - Z_q)(r + 3BZ_q)}}.$$

Таким образом, при $r_0 > 3BZ_q/2$ и $dr/dt > 0$ безмассовая частица уходит на бесконечность, а при $dr/dt < 0$ она асимптотически стремится к окружности $r = 3BZ_q/2$ и, следовательно, захватывается тяготеющим центром.

Если же выполняется условие (16) и начальное положение безмассовой частицы $r_0 = 3BZ_q/2$, то, как следует из выражений (12) и (13), $dr/d\phi = d^2r/d\phi^2 = 0$. Это означает что при $r_0 = 3BZ_q/2$ безмассовая частица будет двигаться по окружности радиуса $r = 3BZ_q/2$. Период обращения безмассовой частицы по круговой орбите будет равен $T = 3\sqrt{3}\pi BZ_q$ при измерении по координатному времени и $T = 3\pi BZ_q$ при измерении по часам неподвижного наблюдателя, находящегося на сфере $r = 3BZ_q/2$.

Но эта круговая орбита, как и в общей теории относительности, будет неустойчивой. Поэтому под действием любого негравитационного возмущения частица покинет ее, попадет на одну из указанных выше траекторий и будет удаляться от окружности радиуса $r = 3BZ_q/2$.

В том случае, когда выполняется условие (15), уравнение $f(r) = 0$ имеет три различных действительных корня, один из которых отрицателен, а два положительных: $r_1 < 0$, $r_2 > 0$, $r_3 > 0$. Тогда, вводя обозначение $r_1 = -a_1^2$, выражение (12) можно привести к виду

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E_0^2 r(r - Z_q)(r + a_1^2)(r - r_2)(r - r_3)}{\alpha^2 (r - BZ_q)}. \quad (19)$$

Детальный анализ показывает, что при $\xi \ll 1$ в зависимости от величины параметров E_0 , α , B и Z_q , входящих в выражение для $f(r)$, возможны только следующие три случая расположения этих корней относительно точки $r = Z_q$:

Случай 1: $r_1 < 0 < r_2 < Z_q < r_3$.

Случай 2: $r_1 < 0 < r_2 = Z_q < r_3$.

Случай 3: $r_1 < 0 < Z_q < r_2 < r_3$.

Рассмотрим их по очереди.

Случай 1. Если $r_2 < Z_q < r_3$, то условие неотрицательности правой части равенства (19) допускает движение частицы только в области $r \geq r_3$. В этом случае уравнение траектории, проходящей через точку $r_0 > r_3$, $\phi = \phi_0$, может быть записано в виде

$$\phi = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)(r - r_2)(r - r_3)}}.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, сходится в области $r_3 \leq r < \infty$, в результате чего один конец траектории за конечное число оборотов уходит на пространственную бесконечность, имея асимптотой полупрямую

$$\phi = \phi_\infty^* = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)(r - r_2)(r - r_3)}}.$$

Другой конец траектории также за конечное число оборотов приближается к окружности $r = r_3$, касается ее в точке

$$\phi = \phi_m^* = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^{Z_q} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)(r - r_2)(r - r_3)}}$$

и (из-за выполнения условия $d^2r/d\phi^2 > 0$ на этой окружности) отражается от нее. Так как после отражения функция $dr/d\phi$ изменяет знак, то эта ветвь траектории будет симметрична первой ветви относительно полупрямой $\phi = \phi_m^*$.

Случай 2. Если $r_2 = Z_q$, то

$$\begin{aligned} r_1 &= -a_1^2 = -\frac{Z_q}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1+3B}{1-B}} + 1 \right\}, \\ r_3 &= \frac{Z_q}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1+3B}{1-B}} - 1 \right\}, \quad E_0^2 = \frac{\alpha^2(1-B)}{Z_q^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

и из выражения (19) будем иметь

$$\phi = \phi_0 + \frac{Z_q}{\sqrt{1-B}} \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{(r - Z_q) \sqrt{r(r + a_1^2)(r - r_3)}}.$$

Несложно убедиться, что этот интеграл сходится при $r > Z_q$ и расходится при $r = Z_q$. Это означает, что один конец траектории, проходящей через точку $r = r_0$, $\phi = \phi_0$, уходит на бесконечность, совершив конечное число ($\infty > N \geq 0$) оборотов вокруг тяготеющего центра и имея асимптотой полупрямую

$$\phi = \phi_\infty^{**} = \phi_0 + \frac{Z_q}{\sqrt{1-B}} \int_{r_0}^\infty \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{(r - Z_q) \sqrt{r(r + a_1^2)(r - r_3)}},$$

а другой конец траектории асимптотически приближается к окружности $r = Z_q$, совершая бесконечное число оборотов вокруг нее.

Поэтому если безмассовая частица начинает свое движение из точки $r = r_0$, $\phi = \phi_0$, если выполняются условия (20) и в начальный момент времени ее радиальная скорость положительна, то она уйдет на бесконечность. Если же радиальная скорость отрицательна, то эта частица будет бесконечно долго приближаться по бесконечной спирали к окружности $r = Z_q$, т.е. будет захвачена гравитационным центром.

Случай 3. Если $Z_q < r_2 < r_3$, то условие неотрицательности правой части выражения (19) при выполнении неравенства (15) допускает движение безмассовой частицы только в двух областях пространства: $Z_q \leq r \leq r_2$ и $r \geq r_3$.

Несложный анализ, аналогичный проделанному выше, показывает, что в области $r \geq r_3$ траектория безмассовой частицы ведет себя подобно траектории в случае 1. В области же $Z_q \leq r \leq r_2$ безмассовая частица поочередно касается окружностей $r = Z_q$ и $r = r_2$, совершая между двумя последовательными касаниями конечное число оборотов вокруг центра (полностью финитное движение):

$$\phi = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)(r - r_2)(r - r_3)}}.$$

Как известно, в общей теории относительности для безмассовой частицы аналога такой траектории нет.

И, наконец, рассмотрим случай, когда уравнение $f(r) = 0$ имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (14). Так как и в этом случае действительный корень будет отрицателен, то, обозначая его через $r_1 = -a_1^2$, а комплексно-сопряженные корни через $r_{2,3} = a_2 \pm ib_2$, выражение (12) приведем к виду

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E_0^2 r(r - Z_q)(r + a_1)[(r - a_2)^2 + b_2^2]}{\alpha^2(r - BZ_q)}.$$

Отсюда следует, что траектория, проходящая через точку $r = r_0$, $\phi = \phi_0$, имеет вид

$$\phi = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)[(r - a_2)^2 + b_2^2]}}. \quad (21)$$

Несложный анализ выражения (21) показывает, что эта траектория, начинаясь на пространственной бесконечности и имея асимптотой полупрямую

$$\phi = \phi_{\infty}^{***} = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)[(r - a_2)^2 + b_2^2]}} < \infty,$$

совершает конечное ($0 \leq N < \infty$) число оборотов вокруг тяготеющего центра и касается окружности $r = Z_q$ при конечном значении полярного угла

$$\phi = \phi_m^{***} = \phi_0 + \frac{\alpha}{E_0} \int_{r_0}^{Z_q} \frac{dr \sqrt{(r - BZ_q)}}{\sqrt{r(r - Z_q)(r + a_1^2)[(r - a_2)^2 + b_2^2]}} < \infty,$$

после чего (из-за изменения знака $dr/d\phi$) уходит на пространственную бесконечность, причем эта ветвь траектории будет симметрична ветви $\phi_m^{***} < \phi < \phi_{\infty}$.

Таким образом, отличие от нуля массы гравитона в релятивистской теории гравитации приводит к появлению возможности для безмассовой частицы совершать финитное движение в окрестности сингулярности метрики (2).

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику А. А. Логунову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Власов, А. А. Логунов. ТМФ. 1989. Т. 78. С. 323.
- [2] Ю. М. Лоскутов. ТМФ. 1990. Т. 82. С. 304.
- [3] А. А. Логунов. Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Препринт ИФВЭ 95-128, 1995.
- [4] А. А. Логунов. Лекции по теории относительности и гравитации. М.: МГУ, 1987. С. 153.

Поступила в редакцию 4.XII.1996 г.

V. I. Denisov

ISOTROPIC GEODESICS IN THE VICINITY OF SINGULARITY OF STATIC SPHERICAL SYMMETRIC SOLUTION

The motion of a massless particle in the vicinity of singularity of a static spherical symmetric metric in the relativistic theory of gravitation is studied. It is shown that the mass value of graviton leads to the appearance of qualitatively new trajectories of motions.