Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Об одном классе цепочек Тоды, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 323–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:43:42

В. Э. Адлер*, А. Б. Шабат†

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Основным результатом работы является список интегрируемых обобщений классической и релятивистской цепочек Тоды. Помимо известных цепочек, этот список содержит три новые. Каждая цепочка задает преобразование Беклунда для некоторой системы типа НУШ. Классификация проведена при помощи простого симметричного теста.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача о построении и классификации цепочек

$$q_{n,x} = \frac{1}{2}(G(q_{n+1}, q_n, p_{n+1}, p_n) - F(q_n, q_{n-1}, p_n, p_{n-1})), \quad (1)$$

обладающих симметриями вида

$$q_{n,t} = \frac{1}{2}(G(q_{n+1}, q_n, p_{n+1}, p_n) + F(q_n, q_{n-1}, p_n, p_{n-1})). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $p_n = q_{n,x}$. Типичными представителями служат такие известные модели, как цепочка Вольтерра, цепочка Тоды и релятивистская цепочка Тоды, для которых соответственно имеем

$$\begin{aligned} F &= p_n^2 + 2p_n p_{n-1}, & G &= p_n^2 + 2p_{n+1} p_n, \\ F &= p_n^2 + 2e^{q_n - q_{n-1}}, & G &= p_n^2 + 2e^{q_{n+1} - q_n}, \\ F &= p_n^2 + \frac{2p_n p_{n-1}}{1 + e^{q_{n-1} - q_n}}, & G &= p_n^2 + \frac{2p_{n+1} p_n}{1 + e^{q_n - q_{n+1}}}. \end{aligned}$$

Рассматриваемый нами класс цепочек характеризуется одним важным свойством. Именно, складывая и вычитая формулы (1), (2), мы приходим к системе уравнений в частных производных

$$u_t = u_{xx} + F(u, v, u_x, v_x), \quad v_t = -v_{xx} + G(u, v, u_x, v_x) \quad (3)$$

для $u = q_{n+1}$, $v = q_n$. Например, для цепочки Тоды имеем систему

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + 2e^{u-v}, \quad v_t = -v_{xx} + v_x^2 + 2e^{u-v},$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.rb.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

эквивалентную ($e^u = U$, $e^{-v} = V$) нелинейному уравнению Шредингера (НУШ). Легко видеть, что формула (1) позволяет также однозначно восстановить правую часть цепочки по правым частям уравнений (3). В частности, система

$$u_t - u_{xx} + 2u_x v_x + u_x^2 = 0, \quad v_t + v_{xx} + 2u_x v_x + v_x^2 = 0$$

приводит, очевидно, к цепочке Вольтерра. Однако эта обратная процедура требует, вообще говоря, привлечения калибровочных преобразований

$$u = \varphi(\tilde{u}), \quad v = \psi(\tilde{v}), \quad (4)$$

как показывает приведенный выше пример цепочки Тоды.

Формула (1) позволяет построить дифференциальные подстановки, переводящие решение (3) снова в решение этого же уравнения [1, 2]. Таким образом, рассматриваемая задача допускает другую формулировку как задача о дискретных симметриях (преобразованиях Беклунда) уравнений типа НУШ. В этом более общем контексте связь между интегрируемыми системами (3) и цепочками вида

$$p_{n,x} = A(p_{n+1}, p_n, p_{n-1}), \quad (5)$$

$$q_{n,xx} = A(q_{n+1}, q_n, q_{n-1}, q_{n,x}) \quad (6)$$

обсуждалась во многих работах начиная с [3]. Близкие к нашей задачи о классификации интегрируемых цепочек вида (5), (6) рассматривались Ямиловым [4,5]. Однако удивительной простоте и общности формул (1), (2) уделялось внимания явно недостаточно.

По существу, наш подход заключается в непосредственном исследовании условия совместности уравнений (1) и (2). Сначала в разделе 3 устанавливаются простые необходимые условия совместности цепочек

$$q_{n,xx} = A(q_{n+1}, q_n, q_{n-1}, p_{n+1}, p_n, p_{n-1}), \quad (7)$$

$$q_{n,t} = B(q_{n+1}, q_n, q_{n-1}, p_{n+1}, p_n, p_{n-1}) \quad (8)$$

общего вида. Эти необходимые условия записываются в виде дискретных законов сохранения, т.е. соотношений вида $D_x(\sigma) = (T-1)(\rho)$, где T обозначает оператор сдвига $q_n \rightarrow q_{n+1}$. Анализ необходимых условий позволяет установить общую структуру цепочек (1), (2) (раздел 4), однако их одних оказывается недостаточно, и для завершения классификации (раздел 5) мы вновь обращаемся непосредственно к условию совместности. В качестве вспомогательного условия, облегчающего выкладки, мы используем также простейшее необходимое условие интегрируемости (28) для системы (3) из работы [6]. При классификации мы рассматривали только невырожденные цепочки, т.е. такие, правые части которых фактически содержат сдвиги в обоих направлениях. Разбор отброшенных цепочек не представляет особого труда и может быть доведен до конца по общей схеме.

Общая задача об описании пар совместных цепочек (7) и (8) произвольного вида, по-видимому, тоже может быть решена путем прямого анализа условия совместности. Модельная задача такого типа, выводящая нас за рамки уравнений (1), (2), разобрана в разделе 2. Рассмотренный случай наводит на мысль, что вырожденные (ср. выше) цепочки отвечают скорее линеаризуемым, чем S -интегрируемым уравнениям.

Отметим, наконец, что цепочки естественно классифицировать с точностью до преобразований вида

$$q_n = \varphi(\tilde{q}_n). \quad (9)$$

Впрочем, иногда модуль замен удастся несколько расширить. Так, для цепочек, у которых q_n входит в правые части только через разности $q_{n+1} - q_n$, корректны преобразования вида

$$q_n = \tilde{q}_n + n\alpha + \beta x + \gamma t. \quad (10)$$

Для общих цепочек (7), (8) такая замена незаконна, т.к. выводит за пределы рассматриваемого класса. Мы будем использовать также преобразование Галилея

$$q_n(x, t) = \tilde{q}_n(x + \alpha t, t) \quad (11)$$

и некоторые другие преобразования (см. пункт 5.2) для приведения цепочек к наиболее простому виду.

2. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР: УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА

Содержание этого раздела не имеет непосредственного отношения к поставленной выше задаче. Однако нам кажется, что разобранный здесь простейший пример хорошо иллюстрирует общую схему решения задач о дискретных симметриях, которой мы будем следовать и в дальнейшем.

Перечислим скалярные эволюционные уравнения второго порядка

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}), \quad (12)$$

инвариантные относительно дифференциальной подстановки первого порядка

$$\hat{u} = G(u, u_x). \quad (13)$$

Ясно, что к этому классу относятся уравнения, сводимые к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами заменой $\tilde{u} = \varphi(u)$. Однако общий ответ, как мы увидим, несколько шире.

Очевидно, что рассматриваемая задача эквивалентна классификации пар совместных цепочек вида

$$u_{n,x} = A(u_{n+1}, u_n), \quad u_{n,t} = B(u_{n+2}, u_{n+1}, u_n). \quad (14)$$

Действительно, полагая $u_{n+1} = \hat{u}_n$ и разрешая (13) относительно u_x , мы приходим к первой из цепочек (14). Вторая цепочка получается из (12) после замены производных по x сдвигами по дискретной переменной n .

В дальнейшем ниже k обозначает производную по u_{n+k} , а T — оператор сдвига $u_n \rightarrow u_{n+1}$. Отметим тождество

$$\partial_{k+1} T = T \partial_k.$$

Условие совместности уравнений (14) запишется как

$$B_2 T^2(A) + B_1 T(A) + B_0 A = A_1 T(B) + A_0 B. \quad (15)$$

Дифференцируя эту формулу по старшей переменной u_{n+3} , получаем равенство $B_2 T^2(A_1) = A_1 T(B_2)$, из которого следует

$$B_2/T(A_1)A_1 = T(B_2/T(A_1)A_1) = c, \quad (16)$$

где величина c не зависит от n и, следовательно, является постоянной. Очевидно, что за счет растяжения t можно, не теряя общности, положить $c = 1$. Итак, имеем соотношение

$$B_2 = T(A_1)A_1,$$

которое позволяет уточнить зависимость B от старшей переменной u_{n+2} и переписать второе из уравнений (14) в виде

$$u_{n,t} = u_{n,xx} + b(u_{n+1}, u_n).$$

На следующем шаге, дифференцируя (15) по u_{n+2} , мы получаем основное необходимое условие совместности в виде закона сохранения

$$2D_x(\log A_1) = (T - 1)(b_1/A_1). \quad (17)$$

Отсюда легко показать, что с точностью до замен $\tilde{u} = \varphi(u)$ функции A и b имеют вид $A = u_n(u_{n+1} - u_n)$, $b = 2u_{n+1}u_n^2 + c(u_n)$ либо $A = u_{n+1} + a(u_n)$, $b = ku_{n+1} + c(u_n)$. Подставляя эти выражения непосредственно в определяющее уравнение (15), получаем окончательный ответ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *С точностью до точечных замен уравнения вида (12), эквивалентные паре цепочек вида (14), сводятся к уравнению Бюргерса и линейным уравнениям*

$$\begin{aligned} u_{n,x} &= u_n(u_{n+1} - u_n), & u_{n,t} &= u_{n,xx} + 2u_n u_{n,x}, \\ u_{n,x} &= u_{n+1} + \alpha u_n + \beta, & u_{n,t} &= u_{n,xx} + \lambda u_{n,x} + \mu u_n + \nu, \end{aligned}$$

где $\nu(\alpha + 1) = \mu\beta$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТИСТИ

Сначала удобно рассматривать цепочки (7), (8) общего вида. Условие их совместности

$$\Delta = D_x^2(B) - D_t(A) = 0 \quad (18)$$

представляет собой сложное выражение от $q_{n\pm j}$, $p_{n\pm j}$ с $j = 0, 1, 2, 3$. Расщепив его по старшим переменным, мы найдем необходимые условия, близкие к условиям интегрируемости из работы [6].

Для сокращения записи мы далее будем, как правило, опускать индекс n : $p = p_n$, $p_k = p_{n+k}$, $q_k = q_{n+k}$. Кроме того, будем использовать обозначения $u = q_{n+1}$, $v = q_n$, $w = q_{n-1}$.

1. Для начала рассмотрим существенно более простой случай (6), когда A, B не зависят от $p_{\pm 1}$. При этом предположим выполненным условие невырожденности $A_u A_w \neq 0$. В этом случае Δ является функцией $q_{\pm k}$, $p_{\pm k}$, $k = 0, 1, 2$, и дифференцирование (18) по старшим переменным $q_{\pm 2}$, $p_{\pm 2}$ приводит к аналогу (16):

$$B_u/A_u = \alpha^+ = \text{const}, \quad B_w/A_w = \alpha^- = \text{const}, \quad B_{uw} = 0. \quad (19)$$

Эти условия обеспечивают сокращение $q_{\pm 2}, p_{\pm 2}$ в Δ и позволяют переписать (18) в виде

$$\Delta = p_1 D_x(B_u) + p D_x(B_v) + p_{-1} D_x(B_w) + D_x(AB_p) - A_p D_x(B) + \\ + AB_v - BA_v - A_u T(F) - A_w T^{-1}(G) = 0,$$

где

$$F = B - \alpha^+ A, \quad G = B - \alpha^- A. \quad (20)$$

Заметим, что F и G не зависят от p_1 , u и p_{-1} , w , соответственно. Это уже позволяет переписать (20) в виде системы уравнений

$$u_t - \alpha^+ u_{xx} = F(u, v, u_x, v_x), \quad v_t - \alpha^- v_{xx} = G(u, v, u_x, v_x). \quad (21)$$

Очевидно и наоборот, формулы (20) позволяют при $\alpha^+ \neq \alpha^-$ однозначным образом восстановить обе цепочки (7), (8) по правым частям уравнений (21).

Для цепочек (1), (2) имеем

$$\alpha^+ = 1, \quad \alpha^- = -1. \quad (22)$$

С учетом этих соотношений дифференцирование Δ по $p_{\pm 1}$ дает законы сохранения, аналогичные (17):

$$2D_x(\log G_u) = (T - 1)(F_p), \quad 2D_x(\log F_w) = (1 - T^{-1})(G_p). \quad (23)$$

2. В общем случае (7), (8), предполагая, что $A_{p_1} A_{p_{-1}} \neq 0$, находим вместо (19)

$$\alpha^{\pm} = B_{p_{\pm 1}} / A_{p_{\pm 1}} = \text{const}, \quad B_{p_1 p_{-1}} = 0. \quad (24)$$

Эти условия обеспечивают сокращение $q_{\pm 3}, p_{\pm 3}$ в Δ и позволяют переписать (18) в виде

$$T(A)D_x(B_{p_1}) + D_x(AB_p) + T^{-1}(A)D_x(B_{p_{-1}}) - A_{p_1} D_x T(F) - \\ - A_p D_x(B) - A_{p_{-1}} D_x T^{-1}(G) + D_x(p_1 B_u + p B_v + p_{-1} B_w) - \\ - A_u T(B) - A_v B - A_w T^{-1}(B) = 0, \quad (25)$$

где F, G определены, как и раньше, формулами (20), но могут зависеть теперь от $q_{\pm 1}$. Дифференцирование (25) по $q_{\pm 2}, p_{\pm 2}$ дает

$$2 \frac{D_x(B_{p_1})}{A_{p_1}} = (T - 1) \left(F_p + \frac{F_u}{A_{p_1}} \right), \quad D_x(\log F_u) = (1 - T^{-1}) \left(\frac{F_u}{A_{p_1}} \right), \\ 2 \frac{D_x(B_{p_{-1}})}{A_{p_{-1}}} = (T^{-1} - 1) \left(G_p + \frac{G_w}{A_{p_{-1}}} \right), \quad D_x(\log G_w) = (1 - T) \frac{G_w}{A_{p_{-1}}}.$$

Эти уравнения и являются теми необходимыми условиями совместности (ср. (23), (17)), о которых шла речь в начале раздела.

Для цепочек (1), (2) мы, очевидно, имеем $F_u = G_w = 0$, что и позволяет корректно определить систему (21). С учетом этого и формул (22) необходимые условия упрощаются и записываются в виде, аналогичном (23):

$$2D_x(\log G_{p_1}) = (T - 1)(F_p), \quad 2D_x(\log F_{p_{-1}}) = (1 - T^{-1})(G_p). \quad (26)$$

При этом условие совместности (25) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{D}^2(B) + 2A\widehat{D}(B_p) + A^2B_{pp} + B_p\widehat{D}(A) - A_p\widehat{D}(B) + \\ + B_wT^{-1}(G) - B_uT(F) - A_{p_1}\widehat{D}T(F) - A_{p_{-1}}\widehat{D}T^{-1}(G) + \\ + 2A(B_{p_{-1}}T^{-1}(B_{p_1}) - B_{p_1}T(B_{p_{-1}})) + AB_v - BA_v = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\widehat{D} = p_1\partial_u + p\partial_v + p_{-1}\partial_w$. Формула (27) получается из (25) заменой D_x на $\widehat{D}$ с использованием уравнений (26). Напомним, что в силу (22) $F = B - A$, $G = B + A$.

3. Отметим, что условие $\alpha^+ + \alpha^- = 0$ можно было бы, по-видимому, вывести из (18), но это далеко не так просто даже в случае, если A, B не зависят от $p_{\pm 1}$. С другой стороны, известно [6], что это условие необходимо для существования локальных законов сохранения порядка большего единицы у системы (21). Кроме этого, мы будем пользоваться еще одним необходимым условием из работы [6], а именно условием дивергентности $\rho \in \text{Im } D_x$, где $\rho = F_{u_x} - G_{v_x}$. В наших обозначениях из этого условия следует, что должна существовать функция $\varphi(u, v)$ такая, что

$$T(F_p) - G_p = D_x(\varphi) = \varphi_u p_1 + \varphi_v p. \quad (28)$$

4. ОБЩИЙ ВИД ЦЕПОЧЕК

Приведенные в предыдущем разделе необходимые условия совместности позволяют легко уточнить зависимость правых частей цепочек (1), (2) от переменных p_n . Сначала рассмотрим наименее вырожденный случай, когда F и G фактически зависят от $p_{\pm 1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для цепочек (1), (2), удовлетворяющих условию невырожденности $G_{p_1}F_{p_{-1}} \neq 0$, выполняются законы сохранения (26). Тогда функции F и G имеют вид

$$\frac{1}{2}F = fp_{-1}R + f_2p^2 + f_1p + f_0, \quad \frac{1}{2}G = gp_1R + g_2p^2 + g_1p + g_0, \quad (29)$$

где $R = r_2p^2 + r_1p + r_0$ и коэффициенты f, f_i зависят от v, w , коэффициенты g, g_i — от u, v , а r_i — только от v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (26) по $p_{\pm 2}$, получаем $F_{p_{-1}p_{-1}} = G_{p_1p_1} = 0$. Дважды дифференцируя по $p_{\pm 1}$, находим $F_{ppp} = G_{ppp} = 0$ и $(\log F_{p_{-1}})_p = (\log G_{p_1})_p$. Формула (29) легко выводится из полученных соотношений.

Этим утверждением законы сохранения (26) еще не исчерпаны. Подставляя в них формулу (29) и расщепляя по переменным $p, p_{\pm 1}$, можно получить некоторые соотношения на коэффициенты полиномов F, G . Кроме того, мы используем условие

$$T(f_1) = g_1, \quad (30)$$

которое получается приравниванием нулю свободного члена в выражении (28).

Дальнейшие рассмотрения удобно проводить отдельно для случаев различных порядков полинома $R(p)$. Заметим, что, не теряя общности, можно считать старший коэффициент в R равным 1, так что все цепочки разобьются на три класса:

класс I: $R = 1$,

класс II: $R = p + r$,

класс III: $R = p^2 + r_1 p + r$.

Легко проверить, что в случае класса II замена (9) позволяет сделать коэффициент r постоянным (можно даже считать, что $r = 0$ либо $r = 1$). В случае класса III r_1 и r меняются по формулам

$$\tilde{r}_1 = r_1/\varphi', \quad \tilde{r} = r/(\varphi')^2.$$

Из формул (26) легко можно получить с учетом (30), что $r_1 r' = 2r'_1 r$. Отсюда видим, что и в этом случае можно считать коэффициенты R постоянными. Однако мы будем придерживаться такой калибровки только в случае $r_1 \neq 0$. При $r_1 = 0$ удобнее считать коэффициент r переменным, оставляя калибровочную свободу для других целей.

Разбору всех трех случаев посвящен следующий раздел. Там мы переписываем необходимые условия совместности в терминах коэффициентов полиномов F и G . К сожалению, одних только соотношений (26) оказывается недостаточно, и для окончательного решения вопроса о совместности мы вынуждены обращаться к довольно сложному уравнению (27)¹⁾.

Для цепочек типа Тоды (6) легко доказывается аналог утверждения 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть для цепочек (1), (2), удовлетворяющих условиям невырожденности $G_{p_1} = F_{p-1} = 0$, $G_u F_w \neq 0$, выполняются законы сохранения (23). Тогда функции F и G имеют вид

$$\frac{1}{2}F = f(v, w)R + f_2 p^2 + f_1 p + f_0, \quad \frac{1}{2}G = g(u, v)R + g_2 p^2 + g_1 p + g_0,$$

где $R = r_2 p^2 + r_1 p + r_0$ и коэффициенты f_i , g_i , r_i зависят только от v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко доказывается из соотношений $F_{ppp} = G_{ppp} = 0$, $(\log F_w)_p = (\log G_u)_p$, которые получаются из (23) при дифференцировании по $p_{\pm 1}$, u , w .

Цепочки такого типа были проклассифицированы в работе [5]. Мы можем легко воспроизвести этот результат, действуя по той же схеме, что и для цепочек из утверждения 2. Однако вычисления здесь гораздо проще, и мы их опускаем. В ответе получаются цепочки (А), (Б) из списка в разделе 6.

Наконец, можно рассмотреть цепочки промежуточного типа, т.е. такие, у которых правая часть зависит только от одной из производных $p_{\pm 1}$. Пусть для определенности G зависит от u , v , p_1 , p , а F — от v , w , p . Легко установить, что для таких цепочек должен выполняться один закон сохранения вида (26) и один вида (23):

$$2D_x(\log G_{p_1}) = (T - 1)(F_p), \quad 2D_x(\log F_w) = (1 - T^{-1})(G_p).$$

Аналогично предыдущим доказывается следующее утверждение.

¹⁾При этом приходится пользоваться какой-нибудь системой аналитических вычислений типа REDUCE.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть для цепочек (1), (2), удовлетворяющих условиям невырожденности $G_{p_1} \neq 0$, $F_{p-1} = 0$, $F_w \neq 0$, выполняются приведенные выше законы сохранения. Тогда функции F и G имеют вид

$$\frac{1}{2}F = f(v, w)R + f_2p^2 + f_1p + f_0, \quad \frac{1}{2}G = h(u, v)Rp_1 + g(u, v)R + g_2p^2 + g_1p + g_0,$$

где $R = r_1p + r_0$ и коэффициенты f_i, g_i, r_i зависят только от v .

При дальнейшем анализе условия совместности для таких цепочек мы быстро приходим к противоречию, т.е. этот класс цепочек оказывается пустым.

5. ЗАВЕРШЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ

5.1. Случай $R = 1$. Для цепочек из класса I условия (26), (30) дают

$$\begin{aligned} (\ln g)_u &= 2T(f_2), & (\ln g)_v &= -2f_2, \\ (\ln f)_w &= -2T^{-1}(g_2), & (\ln f)_v &= 2g_2, \\ f_1 &= g_1 = c_1 = \text{const}, \end{aligned}$$

причем можно положить $c_1 = 0$ (для этого достаточно применить преобразование Галилея $\partial_t \mapsto \partial_t - 2c_1\partial_x$). В силу этих уравнений функции g_2, f_2 зависят только от v , и легко проверить, что заменой (9) можно добиться, чтобы $g_2 = f_2 = \gamma'(v)/2$. После этого функции f и g принимают вид $g = c_2e^{\gamma(u)-\gamma(v)}$, $f = c_3e^{\gamma(v)-\gamma(w)}$.

Вид функций f_0, g_0 и γ уточняется подстановкой непосредственно в условие совместности (27), из которого находим прежде всего, что $\gamma = \alpha v$. При $\alpha = 0$ мы получаем линейную цепочку. Отбрасывая этот неинтересный случай, за счет растяжения q положим $\alpha = 1$. Дальнейший анализ приводит к формулам

$$\begin{aligned} F &= c_2e^{q_n - q_{n-1}}(p_{n-1} + c_4) + p_n^2 - \frac{c_2^2}{2}e^{2(q_n - q_{n-1})} + c_5, \\ G &= c_2e^{q_{n+1} - q_n}(p_{n+1} + c_4) + p_n^2 - \frac{c_2^2}{2}e^{2(q_{n+1} - q_n)} + c_5. \end{aligned}$$

Чтобы несколько упростить вид цепочек, можно, воспользовавшись заменой вида (10), положить $c_2 = 2$, $c_4 = c_5 = 0$. В результате мы приходим к цепочке (B) (см. раздел 6).

5.2. Случай $R = p + r$, $r' = 0$. Для цепочек из класса II условия (26), (30) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} (\ln g)_u &= 2T(f_2) - g, & (\ln g)_v &= T(f) - g_2 - f_2, \\ (\ln f)_w &= f - 2T^{-1}(g_2), & (\ln f)_v &= g_2 + f_2 - T^{-1}(g), \\ r(g_2 - f_2) &= 0, & g_0 - rg_1 &= f_0 - rf_1 = b(v). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, функции g_2, f_2 зависят только от v и замена (9) позволяет считать, что $g_2 = f_2 = \frac{1}{2}\gamma(v)$, даже если $r = 0$. Далее, легко показать, что

$$T(f) = \beta g, \quad \beta g_u + g_v = 0, \quad \beta T(\gamma) = \gamma,$$

где β – постоянная. Последнее уравнение означает, что $\gamma = \text{const}$, причем $\gamma = 0$, если $\beta \neq 1$. Таким образом, имеются два возможных подслучая:

$$\begin{aligned} \beta = 1 : \quad & T(f) = g, \quad g_u + g_v = 0, \quad g_u + g^2 = \gamma g, \\ \beta \neq 1 : \quad & T(f) = \beta g, \quad \beta g_u + g_v = 0, \quad g_u + g^2 = 0. \end{aligned}$$

Для определения вида цепочек остается уточнить функции $g_1(u, v)$ и $b(v)$.

В случае $\beta = 1$ подстановка в (27) приводит к уравнениям

$$g_{1,u} = \gamma g_1 - r g^2 + c_1, \quad g_{1,u} + g_{1,v} = 0, \quad b = c_2 v + c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные, причем $c_2 r = c_2 \gamma = c_2 c_1 = 0$. Эти условия оказываются достаточными для совместности. Легко показать, что при $\gamma \neq 0$ мы приходим к цепочке (Г), а при $\gamma = 0$ к цепочке (Д) (см. раздел 6). При этом для упрощения вида цепочек (в частности, для выполнения условия $r = 0$) используются замены (10), (11), а также

$$q_n = e^{\alpha t} \tilde{q}_n. \quad (31)$$

Отметим, что это растяжение корректно для цепочек с правыми частями – однородными функциями веса 1. Постоянную μ в цепочке (Г) можно, не теряя общности, считать равной 0 либо 1. В частности, при $\mu = \lambda = 0$ получается цепочка Вольтерра.

В случае $\beta \neq 1$ мы при помощи аналогичных рассуждений приходим к цепочке

$$q_{n,xx} = \frac{p_{n+1} p_n}{q_{n+1} - \beta q_n} - \frac{\beta p_n p_{n-1}}{q_n - \beta q_{n-1}},$$

которая сводится к (Д) при помощи замены

$$q_n = \beta^n \tilde{q}_n. \quad (32)$$

5.3. Случай $R = p^2 + r_1 p + r$, $r_1 \neq 0$. Как уже говорилось, для цепочек класса III с $r_1 \neq 0$ мы используем калибровку $r'_1 = r' = 0$. Нетрудно убедиться, что при этом условия (26), (30) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} g = T(f), \quad g_1 = T(f_1), \quad g_u + r_1 g^2 = 2gT(f_2), \quad g_v - r_1 g^2 = -2gg_2, \\ g_1 - r_1 g_2 = f_1 - r_1 f_2 = a(v), \quad g_0 - r g_2 = f_0 - r f_2 = b(v), \end{aligned}$$

где a и b – некоторые неизвестные функции.

Подстановка в уравнение (27) приводит к дополнительным соотношениям

$$a' = b' = 0, \quad g_{2,u} = g_2^2 - r g^2 + c, \quad c = \text{const},$$

которые оказываются и достаточными. Из этих соотношений следует, что $g_2 = T(f_2)$ и все функции оказываются зависящими только от разностей $q_{n+1} - q_n$. Следовательно, мы можем применить замену $q = \tilde{q} - r_1 x/2$ вида (10) и положить $\tilde{r}_1 = 0$. Таким образом, этот случай оказывается частным для $R = p^2 + r$, и его можно исключить из рассмотрения. Обратное включение неверно, потому что, как мы скоро увидим, при $r_1 = 0$ правые части цепочки, вообще говоря, зависят не от разностей q_n . Заметим еще, что автономная система на функции g, g_2 решается в элементарных функциях, в отличие от случая $r_1 = 0$, приводящего к эллиптическим функциям.

5.4. Случай $R = p^2 + r(v)$. При $r_1 = 0$ условия (26) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} g &= T(f), & g_1 &= T(f_1) = f_1 = \text{const}, & g_u &= 2gT(f_2), & g_v &= -2gg_2, \\ g_0 - r(v)g_2 &= f_0 - r(v)f_2 - \frac{1}{2}r'(v) = b(v). \end{aligned}$$

Постоянная g_1 обращается в нуль преобразованием Галилея. Таким образом, подлежат доопределению функция двух переменных $g = 1/h$ и две функции r, b одного переменного. Подстановка в (27) дает в главном порядке уравнения

$$2hh_{vv} - h_v^2 = 4r(u) - 2c(v)h^2, \quad 2hh_{uu} - h_u^2 = 4r(v) - 2c(u)h^2, \quad (33)$$

$$4b + r' = \varepsilon\sqrt{r}, \quad (34)$$

где функция c и константа ε возникли в результате интегрирования.

При замене (9) имеем

$$\tilde{h} = h/\varphi'T(\varphi'), \quad \tilde{r} = r/\varphi'^2.$$

Подставляя эти формулы в (33), легко показать, что функция c меняется по правилу

$$\tilde{c} = \varphi'^2 c + \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3\varphi''^2}{2\varphi'^2}.$$

Таким образом, не теряя общности, можно положить $c = 0$, после чего функция h оказывается полиномом степени не выше 2 по каждой переменной: $h_{uuu} = h_{vvv} = 0$. При этом $r(u)$ равен дискриминанту квадратного трехчлена $h(v)$ и имеет степень не выше 4. Из уравнений (33) следует, что дискриминанты h как многочлена от u или от v совпадают. Можно показать, что это свойство выполняется в трех случаях, перечисленных в формуле (Е) (см. раздел 6). Эти многочлены можно несколько упростить за счет дробно-линейных преобразований, оставшихся у нас в запасе, но мы этого делать не будем.

Теперь у нас осталась неизвестной только постоянная ε из уравнения (34). Прямая подстановка показывает, что для выполнения условия совместности (27) достаточно положить эту постоянную равной нулю. Соответствующие цепочки имеют вид (Е).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно проверить, что постоянная ε произвольна, если r — полный квадрат, что эквивалентно приводимости многочлена h . Это, в частности, относится к многочленам вида (Е) (при (Е.2), (Е.3), см. ниже). На вид самой цепочки (1) постоянная ε никакого влияния не оказывает, а к симметрии (2) добавляется член $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r(q_n)}$, отвечающий классической симметрии.

6. СПИСОК ЦЕПОЧЕК ТИПА ТОДЫ

Подводя итог проведенной классификации, сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *С точностью до преобразований (9)–(11), (31) совместные пары невырожденных цепочек (1), (2), удовлетворяющие дополнительному условию (30), исчерпываются следующим списком:*

$$\begin{aligned} q_{n,xx} &= R(p_n)(g(q_{n+1} - q_n) - g(q_n - q_{n-1})), \\ q_{n,t} &= R(p_n)(g(q_{n+1} - q_n) + g(q_n - q_{n-1})) + \gamma p_n^2, \\ R(p) &= \varepsilon p^2 + \alpha p + \beta, \quad g' = \varepsilon g^2 + \gamma g + \delta; \end{aligned} \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned}
q_{n,xx} &= -(p_n^2 + r(q_n)) \left(\frac{1}{q_{n+1} - q_n} - \frac{1}{q_n - q_{n-1}} \right) - \frac{1}{2} r'(q_n), \\
q_{n,t} &= -(p_n^2 + r(q_n)) \left(\frac{1}{q_{n+1} - q_n} + \frac{1}{q_n - q_{n-1}} \right), \\
r(u) &= \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon;
\end{aligned} \tag{Б}$$

$$\begin{aligned}
q_{n,xx} &= p_{n+1} e^{q_{n+1} - q_n} - p_{n-1} e^{q_n - q_{n-1}} - e^{2(q_{n+1} - q_n)} + e^{2(q_n - q_{n-1})}, \\
q_{n,t} &= p_n^2 + p_{n+1} e^{q_{n+1} - q_n} + p_{n-1} e^{q_n - q_{n-1}} - e^{2(q_{n+1} - q_n)} - e^{2(q_n - q_{n-1})};
\end{aligned} \tag{В}$$

$$\begin{aligned}
q_{n,xx} &= \frac{p_{n+1} p_n}{1 + \mu e^{q_n - q_{n+1}}} - \frac{p_n p_{n-1}}{1 + \mu e^{q_{n-1} - q_n}} + \lambda p_n (e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}), \\
q_{n,t} &= p_n^2 + \frac{p_{n+1} p_n}{1 + \mu e^{q_n - q_{n+1}}} + \frac{p_n p_{n-1}}{1 + \mu e^{q_{n-1} - q_n}} + \lambda p_n (e^{q_{n+1} - q_n} + e^{q_n - q_{n-1}});
\end{aligned} \tag{Г}$$

$$\begin{aligned}
q_{n,xx} &= \frac{p_{n+1} p_n}{q_{n+1} - q_n} - \frac{p_n p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}} + \nu p_n (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \\
q_{n,t} &= \frac{p_{n+1} p_n}{q_{n+1} - q_n} + \frac{p_n p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}} + \nu p_n (q_{n+1} - q_{n-1});
\end{aligned} \tag{Д}$$

$$\begin{aligned}
q_{n,xx} &= (p_n^2 + r(q_n)) \left(p_{n+1} g - p_{n-1} f - \frac{1}{2} \partial_{q_n} (\ln g f) \right) - \frac{1}{2} r'(q_n), \\
q_{n,t} &= (p_n^2 + r(q_n)) \left(p_{n+1} g + p_{n-1} f + \frac{1}{2} \partial_{q_n} (\ln f/g) \right), \\
g &= 1/h(q_{n+1}, q_n), \quad f = 1/h(q_n, q_{n-1}), \quad 4r(u) = 2h h_{vv} - h_v^2,
\end{aligned} \tag{Е}$$

где h задается одной из формул:

$$h = c_1 u^2 v^2 + c_2 uv(u+v) + c_3 (u-v)^2 + c_4 uv + c_5 (u+v) + c_6, \tag{Е.1}$$

$$h = (c_1 uv + c_2 u + c_3 v + c_4)(u-v), \tag{Е.2}$$

$$\begin{aligned}
h &= (u + c_1)(v + c_1)(c_3 u + c_2)(c_3 v + c_2) + \\
&\quad + c_4(u-v)(2c_3 uv + (c_2 + c_3 c_1)(u+v) + 2c_1 c_2).
\end{aligned} \tag{Е.3}$$

Для удобства читателя приведем также список ассоциированных систем (3) для переменных $u = q_{n+1}$, $v = q_n$:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + 2R(u_x)g(u-v) + \gamma u_x^2, \\
-v_t &= v_{xx} - 2R(v_x)g(u-v) - \gamma v_x^2;
\end{aligned} \tag{А'}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 2 \frac{u_x^2 + r(u)}{u-v} + \frac{1}{2} r'(u), \\
-v_t &= v_{xx} + 2 \frac{v_x^2 + r(v)}{u-v} + \frac{1}{2} r'(v);
\end{aligned} \tag{Б'}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + u_x^2 + 2v_x e^{u-v} - 2e^{2(u-v)}, \\
-v_t &= v_{xx} - v_x^2 - 2u_x e^{u-v} + 2e^{2(u-v)};
\end{aligned} \tag{В'}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + u_x^2 + 2 \frac{u_x v_x}{1 + \mu e^{v-u}} + 2\lambda u_x e^{u-v}, \\
-v_t &= v_{xx} - v_x^2 - 2 \frac{u_x v_x}{1 + \mu e^{v-u}} - 2\lambda v_x e^{u-v};
\end{aligned} \tag{Г'}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2\frac{u_x v_x}{u-v} + 2\nu u_x(u-v), \\ -v_t &= v_{xx} - 2\frac{u_x v_x}{u-v} - 2\nu v_x(u-v); \end{aligned} \quad (Д')$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{h}(2v_x - h_u)(u_x^2 + r(u)) + \frac{1}{2}r'(u), \\ -v_t &= v_{xx} - \frac{1}{h}(2u_x + h_v)(v_x^2 + r(v)) + \frac{1}{2}r'(v). \end{aligned} \quad (Е')$$

Отметим, что система (Е') является известным [7] интегрируемым обобщением модели Ландау–Лифшица (Б'), записанной в стереографической проекции.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цепочки типа Тоды (А), (Б) достаточно хорошо известны. Цепочки с нетривиальной зависимостью от $p_{n\pm 1}$ изучены гораздо хуже. Единственным исключением, по-видимому, является цепочка (Г), введенная при $\lambda = 0$ в работе [8]. Таким образом, при помощи простого симметричного теста (прямой анализ условия совместности) нам удалось расширить круг известных интегрируемых обобщений цепочки Тоды.

Полученные в данной работе результаты позволяют продвинуться дальше в построении общей теории преобразований Беклунда (ср. введение), охватывающей весь класс интегрируемых систем (3) типа НУШ. Достаточно подробное описание этого класса систем можно найти в [7]. Однако простой перебор уравнений из приведенного в этой работе списка ключевых систем не может дать ответа на многие вопросы, поскольку классификация в [7] проведена по широкому модулю замен, включающему в себя не только калибровочные преобразования (4). Даже простое сопоставление приведенного выше списка систем (А')–(Е') со списком из [7] не является тривиальной задачей. Как будет показано в нашей следующей публикации на эту тему, в теории преобразований оказывается необходимой замена лагранжевых уравнений (А)–(Е) их гамильтоновыми дублями.

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. В. 2. С. 183–208.
- [2] А. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397–401.
- [3] D. Levi. J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V. 14. P. 1083–1098.
- [4] Р. И. Ямилов. УМН. 1983. Т. 38. В. 6. С. 155–156.
- [5] R. I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1993. P. 423–431.
- [6] А. Б. Михайлов, А. Б. Шабат. ТМФ. 1985. Т. 62. № 2. С. 163–185.
- [7] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 1–19.
- [8] S. N. M. Ruijsenaars. Relativistic Toda system. Preprint Stichting Centre for Mathematics and computer Sciences. Amsterdam, 1986.

Поступила в редакцию 4.III.1997 г.

V. E. Adler, A. B. Shabat

ON THE ONE CLASS OF THE TODA CHAINS

The main result of our paper is the list of integrable generalizations of the Toda lattice. Apart from known lattices this list contains three new examples. Each lattice from the list gives the Bäcklund transformation for some NLS type system.