Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Варзугин, Равновесная конфигурация черных дыр и метод обратной задачи рассеяния, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 345–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1013>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 08:54:38

Г. Г. Варзугин*

РАВНОВЕСНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Метод обратной задачи рассеяния применяется к изучению равновесной конфигурации черных дыр. На основе исследования граничной задачи, отвечающей такой конфигурации, показано, что любое стационарное аксиально-симметричное решение уравнений Эйнштейна с несвязным горизонтом событий должно содержаться в классе решений Белинского–Захарова. Получены уравнения связи между угловыми моментами и угловыми скоростями черных дыр.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена стационарным аксиально-симметричным асимптотически плоским решениям уравнений Эйнштейна в вакууме, и основная ее цель – объединение двух классов идей, первый из которых относится к теории черных дыр, а второй – к теории вполне интегрируемых уравнений.

В физике черных дыр заметное место занимает результат, известный как “у черной дыры нет волос”. Другими словами, любая черная дыра однозначно параметризуется своей массой и угловым моментом и представляет собой не что иное, как решение Керра. Этот результат был получен усилиями многих авторов, и мы не ставим перед собой цель дать исчерпывающие ссылки. Для нас важна лишь заключительная стадия его доказательства, которая сводилась к классификации всех аксиально-симметричных решений со связным горизонтом и была выполнена Картером в работе [1]. Картером было показано, что такие решения с необходимостью должны удовлетворять граничной задаче для системы эллиптических нелинейных уравнений, причем решение Керра было одним из возможных решений этой граничной задачи. В дальнейшем было доказано, что оно является единственным [2].

Можно ли отказаться от требования связности горизонта? Иначе говоря, существуют ли решения, отвечающие равновесной конфигурации черных дыр? Насколько известно автору настоящей работы, эти вопросы пока не имеют исчерпывающего ответа (некоторые результаты можно найти в [3, 4]). Их также можно перевести в плоскость исследования граничной задачи, которую легко извлечь из [1], так как в этой работе связность горизонта не играла никакой роли. Мы сформулируем ее в следующем разделе.

* Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского университета, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: varzugin@phim.niif.spb.su

Теперь хорошо известно, что уравнения Эйнштейна с двумя коммутирующими симметриями принадлежат к широкому классу систем, интегрируемых методом обратной задачи. Это было показано Белинским и Захаровым в [5]. Аксиально-симметричный случай исследовался ими же в [6], где построено $2N$ -солитонное решение, которое было интерпретировано как решение, отвечающее N черным дырам Керра – НУТ (Ньюмен–Унти–Тамбурино). Как мы увидим в настоящей работе, $2N$ -солитонное решение Белинского–Захарова действительно содержит в себе все возможные решения (если таковые имеются вообще), отвечающие равновесной конфигурации черных дыр. Тем самым мы сводим вопрос о существовании решения с несвязным горизонтом к исследованию солитонных решений, точнее некоторого подкласса таких решений. Этот подкласс параметризуется расстояниями между черными дырами, их угловыми моментами и массами, но в общем случае решения из этого подкласса обладают конической сингулярностью на оси симметрии, которая и является препятствием к существованию решений с несвязным горизонтом. Возможно ли выбрать параметры так, чтобы коническая сингулярность отсутствовала, пока не ясно. Скорее всего, ответ на этот вопрос отрицателен (см. [3, 4]).

Присутствие конической сингулярности вовсе не означает, что эти решения физически неинтересны. Напротив, сама коническая сингулярность имеет физический смысл силы взаимодействия между черными дырами. Данная интерпретация была предложена Вейлем. Подробности можно найти в [7].

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В этом разделе мы приведем основные факты, относящиеся к стационарным аксиально-симметричным решениям уравнений Эйнштейна, и сформулируем в удобной для нас форме граничную задачу, отвечающую равновесной конфигурации черных дыр. Ключевыми для нас являются результаты работы [1], в которой можно найти опущенные здесь детали.

Напомним, что многообразие Лоренца называется стационарным аксиально-симметричным, если оно обладает двумя коммутирующими однопараметрическими группами изометрий, изоморфными соответственно R и $SO(2)$. Другими словами, существуют два векторных поля Киллинга k^a и m^a , коммутирующие между собой и такие, что вектор k^a времениподобен, а m^a пространственноподобен. Важным следствием стационарности и аксиальной симметрии для решений уравнений Эйнштейна в вакууме (или электровакууме) является возможность выбора системы координат, в которой метрика примет следующую форму:

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W dt d\phi + X d\phi^2 + \frac{X}{\rho^2} e^\beta (d\rho^2 + dz^2),$$

где метрические коэффициенты зависят только от ρ и z , а $k^a \partial / \partial x^a = \partial / \partial t$, $m^a \partial / \partial x^a = \partial / \partial \phi$. При этом V , W , X , ρ имеют геометрический смысл:

$$V = -k^a k_a, \quad X = m^a m_a, \quad W = k^a m_a, \quad (2.1a)$$

$$VX + W^2 = \rho^2 = -\rho_{ab} \rho^{ab} \quad (\rho_{ab} = 2k_{[a} m_{b]}). \quad (2.1b)$$

Длины векторов Киллинга нормированы условиями $V \rightarrow 1$ на бесконечности, $\frac{X^a X_a}{4X} \rightarrow 1$ на оси симметрии, а координаты ϕ, ρ, z оказываются цилиндрическими координатами (в этой работе нас интересуют только асимптотически плоские решения).

Множество точек, где $\rho = 0$, $X = 0$, представляет собой ось симметрии, а множество точек, где $\rho = 0$, $X > 0$, — горизонт событий. Допустим, что горизонт событий имеет N связных компонент и l^a — изотропный вектор, ортогональный горизонту событий. Тогда на каждой компоненте горизонта мы можем выбрать такую нормировку l^a , что

$$l^a = k^a + \Omega_i m^a,$$

где Ω_i — некоторая константа, имеющая смысл угловой скорости черной дыры. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_{2N}$ — точки пересечения горизонта и оси симметрии, пронумерованные в порядке возрастания. Перейдем к новой системе координат:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (\lambda^2 - m_i^2)(1 - \mu^2), \quad m_i = \frac{z_{2i} - z_{2i-1}}{2}, \\ z - \frac{z_{2i} + z_{2i-1}}{2} &= \lambda\mu. \end{aligned}$$

В этой системе координат необходимые условия регулярности оси симметрии и горизонта формулируются так:

$$\begin{aligned} X(\lambda, \mu) &= (1 - \mu^2)\widehat{X}(\lambda, \mu), \\ W^\dagger(\lambda, \mu) &= (\lambda^2 - m_i^2)(1 - \mu^2)\widehat{W}(\lambda, \mu), \\ V^\dagger(\lambda, \mu) &= (\lambda^2 - m_i^2)\widehat{V}(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\widehat{X}, \widehat{W}, \widehat{V}$ — гладкие функции, не обращающиеся в нуль, а

$$V^\dagger = -l^a l_a, \quad W^\dagger = l^a m_a.$$

Из (2.2) легко получить граничные условия для первой группы уравнений Эйнштейна:

$$d * \rho dg g^{-1} = 0, \quad g = \begin{pmatrix} -V & W \\ W & X \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $*$ — оператор Ходжа, заданный так: $*d\rho = dz$, $*dz = -d\rho$. Действительно, пользуясь (2.2), без труда можно проверить, что

$$\rho g, \rho g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & O(1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in \Gamma, \quad (2.4a)$$

$$\widehat{\Omega}_i \rho g, \rho g^{-1} \widehat{\Omega}_i^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ O(1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in I_i, \quad \widehat{\Omega}_i = \begin{pmatrix} 1 & \Omega_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4b)$$

$$\rho g, z g^{-1} = O(1), \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in R. \quad (2.4в)$$

Здесь Γ — ось симметрии, состоящая из $N + 1$ связных компонент,

$$\Gamma = \cup \Gamma_j = R \setminus \cup I_i \quad (j = 1, \dots, N + 1, \quad i = 1, \dots, N), \quad I_i = (z_{2i-1}, z_{2i}).$$

Символ $O(1)$ использован для обозначения равномерно ограниченных функций на соответствующем интервале. Из (2.2) следует, что (2.4в) стремится к нулю почти всюду, за исключением точек z_k , но нам будет достаточно равномерной ограниченности. Функция $g(z, \rho)$ считается гладкой во всех точках, кроме точек $(z_k, 0)$.

Как мы увидим, (2.4) полностью определяют решение уравнений (2.3), причем Ω_i , z_i выступают как независимые параметры граничной задачи, которые можно выбрать произвольно. Поведение g на бесконечности мы обсудим в конце этого раздела.

Существует и альтернативный подход, в котором в качестве основных параметров выбираются угловые моменты, а не угловые скорости [7, 8]. Чтобы увидеть это, введем потенциалы Эрнста:

$$\rho * dg g^{-1} = \begin{pmatrix} -dY^{12} & d\tilde{Y} \\ -dY & dY^{21} \end{pmatrix}, \quad d(Y^{21} - Y^{12}) = 2dz, \quad (2.5)$$

где Y – потенциал Эрнста, определяемый пространственноподобным векторным полем Киллинга, а $\tilde{Y}$ – потенциал Эрнста, определяемый времениподобным векторным полем Киллинга. Тогда система (2.3) переписывается в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\rho * dX}{X}\right) - \frac{\rho}{X^2} * dY \wedge dY &= 0, \\ d\left(\frac{\rho * dY}{X}\right) - \frac{\rho}{X^2} * dX \wedge dY &= 0, \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$d\Omega = -\frac{\rho * dY}{X^2}, \quad W = \Omega X. \quad (2.6b)$$

Из (2.4a) или (2.2) видим, что

$$\rho \partial_\rho \ln X \rightarrow 2, \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in \Gamma; \quad Y|_{\Gamma_i} = c_i, \quad (2.7)$$

где c_i – некоторые константы, которые можно выбрать в качестве независимых параметров. В работах [3, 7, 8] было показано, что (2.6a) имеет единственное решение, удовлетворяющее (2.7) и некоторому условию на бесконечности, равносильному асимптотической плоскости метрики, при любых z_i, c_i . Заметим теперь, что (2.4б) вытекает из (2.6б), где Ω_i задается следующим образом:

$$\Omega|_{I_i} = -\Omega_i, \quad (2.8)$$

а значит, Ω_i – функции от z_i, c_i .

Константы c_i однозначно определяют угловые моменты каждой из черных дыр. Действительно, определим угловой момент черной дыры с помощью интеграла Коммара [1]:

$$L_i = \frac{1}{16\pi} \int_{S_i} m^{a;b} dS_{ab},$$

где S_i – 2-поверхность, окружающая черную дыру. Выбрав в качестве S_i поверхность вращения кривой C_i , соединяющей компоненты осей Γ_{i+1} и Γ_i , получим

$$L_i = \frac{1}{8} \int_{C_i} \frac{1}{\rho} * (X dW - W dX) = \frac{1}{8} \int_{C_i} dY = \frac{1}{8} (c_{i+1} - c_i). \quad (2.9)$$

Массу черной дыры можно определить как интеграл (см. [1])

$$M_i = \frac{1}{8\pi} \int_{S_i} k^{a;b} dS_{ab}.$$

Поступив точно так же, как при нахождении углового момента, получим

$$M_i = \frac{1}{4} \int_{C_i} \frac{1}{\rho} * (X dV + W dW) = -\frac{1}{4} \int_{C_i} dY^{12}.$$

Стягивая контур C_i к горизонту и используя (2.4б), заключаем, что

$$M_i = \frac{1}{4} \int_{I_i} (2 + \Omega_i Y_{,z}) dz = m_i + 2\Omega_i L_i, \quad (2.10)$$

здесь $m_i = (z_{2j} - z_{2j-1})/2$.

В качестве условий на бесконечности потребуем, чтобы

$$W = \rho^2 O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad X = \rho^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \quad (2.11)$$

Асимптотики (2.11) предполагаются дифференцируемыми по крайней мере дважды, а $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Оценки (2.11) означают, что метрика g стремится к метрике Минковского в цилиндрических координатах. Как следствие (2.11) получим

$$g, z g^{-1} = \begin{pmatrix} O(1/r^2) & O(1/r^4) \\ \rho^2 O(1/r^4) & O(1/r^2) \end{pmatrix}, \quad V = 1 + O(1/r), \quad (2.12a)$$

$$\rho g, \rho g^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(1/r) & O(1/r^3) \\ \rho^2 O(1/r^3) & O(1/r) \end{pmatrix}. \quad (2.12b)$$

Отметим, что при определении угловых скоростей из формулы (2.8) мы должны нормировать Ω в соответствии с (2.11), т.е. $\Omega = O(1/r^3)$.

Вторая группа уравнений Эйнштейна позволяет по матрице g определить коэффициент e^β , причем последний находится в квадратурах. Исходя из (2.4) или (2.7) можно показать, что при $\rho = 0$ и $z \in \Gamma$ имеем $\partial_z \beta = 0$, т.е. $\beta|_{\Gamma_i} = b_i$, где b_i — некоторые константы. Коническая сингулярность на оси симметрии будет отсутствовать тогда и только тогда, когда $b_i = 0$. Однако b_i не могут рассматриваться как независимые параметры и являются функциями z_k, c_k . В этой работе мы ограничимся исследованием граничной задачи (2.4), (2.12) и не будем обсуждать свойства b_i .

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

Система уравнений (2.3) является условием совместности следующей пары матричных линейных дифференциальных уравнений [5, 6]:

$$D_1 \psi = \frac{\rho^2 g, z g^{-1} - \omega \rho g, \rho g^{-1}}{\omega^2 + \rho^2} \psi, \quad D_2 \psi = \frac{\rho^2 g, \rho g^{-1} + \omega \rho g, z g^{-1}}{\omega^2 + \rho^2} \psi, \quad (3.1)$$

где D_1, D_2 – коммутирующие дифференциальные операторы:

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \rho^2} \partial_\omega, \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\omega\rho}{\omega^2 + \rho^2} \partial_\omega,$$

и ω – некоторый комплексный спектральный параметр, не зависящий от координат. Мы также будем использовать представление L – A –пары, в котором ω рассматривается как зависящий параметр. Точнее, пусть ω есть корень уравнения

$$\omega^2 - 2\omega(k - z) - \rho^2 = 0, \quad (3.2)$$

где теперь k играет роль независимого спектрального параметра. С помощью (3.2) легко проверить, что

$$\partial_z \omega = -\frac{2\omega^2}{\omega^2 + \rho^2}, \quad \partial_\rho \omega = \frac{2\omega\rho}{\omega^2 + \rho^2}. \quad (3.3)$$

Перейдем от $\psi(\omega)$ к $\psi'(k) = \psi(\omega(k))$, тогда из (3.1) получим

$$\partial_z \psi(k) = A(z, \rho, k) \psi(k), \quad A = \frac{\rho^2 g_{,z} g^{-1} - \omega \rho g_{,\rho} g^{-1}}{\omega^2 + \rho^2}, \quad (3.4a)$$

$$\partial_\rho \psi(k) = B(z, \rho, k) \psi(k), \quad B = \frac{\rho^2 g_{,\rho} g^{-1} + \omega \rho g_{,z} g^{-1}}{\omega^2 + \rho^2}. \quad (3.4b)$$

Здесь и далее штрих для простоты опускается. Следует отметить, что уравнения (3.4) эквивалентны уравнениям (3.1) только в том случае, если мы рассматриваем (3.4) с многозначной функцией ω . Фиксируя же ветвь корня в (3.4), мы найдем решение (3.1) только в области аналитичности $\omega(k)$.

В данной работе мы будем придерживаться общей схемы исследования интегрируемых уравнений [9].

Инвариантность (3.2) относительно преобразования $\omega \rightarrow -\rho^2/\omega$ дает нам возможность зафиксировать ветвь многозначной функции $\omega(k)$, потребовав выполнения неравенства $|\omega| > \rho$. Тогда из (3.2) получим

$$\omega \rightarrow 2(k - z), \quad \rho \rightarrow 0; \quad \omega \rightarrow 2(k - z), \quad z \rightarrow \infty; \quad \omega \rightarrow 2(k - z), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Выбрав ветвь корня, можно ввести матрицу монодромии $T(z, y)$, которая по определению является решением (3.4a) и для которой $T(y, y) = I$. Заметим теперь, что при $\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} A(z, \rho, k) &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{z - k} \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \tilde{Y} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma, \\ A(z, \rho, k) &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{z - k} \hat{\Omega}_i^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\partial_z Y & 0 \end{pmatrix} \hat{\Omega}_i, \quad z \in I_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь мы учли (3.5) и граничные условия (2.4). Следовательно, (3.4a) легко проинтегрировать при $\rho = 0$. Приведем результат в виде явных формул для матрицы монодромии:

$$T(z, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tilde{Y}(z) - \tilde{Y}(y)}{2(k-y)} \\ 0 & \frac{k-z}{k-y} \end{pmatrix}, \quad z, y \in \Gamma_k, \quad (3.7)$$

где Γ_k — связная компонента оси симметрии, и

$$T(z, y) = \widehat{\Omega}_i^{-1} \begin{pmatrix} \frac{k-z}{k-y} & 0 \\ \frac{Y(z)-Y(y)}{2(k-y)} & 1 \end{pmatrix} \widehat{\Omega}_i, \quad z, y \in I_i. \quad (3.8)$$

Пусть $e(z, \rho, k)$ — решение (3.4) с метрикой Минковского в цилиндрических координатах ($V = 1$, $W = 0$, $X = \rho^2$):

$$e(z, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega(z, k) \end{pmatrix}, \quad \partial_z e = A_0 e, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\omega^2 + \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Определим функции Йоста и приведенную матрицу монодромии:

$$\Psi^\pm(z, k) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} T(z, y) e(y), \quad (3.10)$$

$$T(k) = \lim_{y \rightarrow -\infty, z \rightarrow +\infty} e^{-1}(z) T(z, y) e(y). \quad (3.11)$$

Зависимость от ρ явно мы не указываем. Функции $\Psi^\pm$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\Psi^-(z) = e(z) + \int_{-\infty}^z e(z) e^{-1}(x) A'(x) \Psi^-(x) dx, \quad (3.12)$$

$$\Psi^+(z) = e(z) - \int_z^{\infty} e(z) e^{-1}(x) A'(x) \Psi^+(x) dx, \quad (3.13)$$

где

$$A'(z) = A(z) - A_0(z) = \frac{\rho^2 g_{,z} g^{-1}}{\omega^2 + \rho^2} - \frac{\omega}{\omega^2 + \rho^2} \left(\rho g_{,\rho} g^{-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right). \quad (3.14)$$

Предел (3.11) существует по крайней мере при $|\operatorname{Im} k| > \rho$. Далее, используя (3.4б), легко показать, что $T(k)$ не зависит от ρ . Применим основное свойство матрицы монодромии:

$$T(z, y) = T(z, z_{2N}) T(z_{2N}, z_{2N-1}) \dots T(z_1, y), \quad z \in \Gamma_{N+1}, \quad y \in \Gamma_1, \quad (3.15)$$

где Γ_{N+1}, Γ_1 — крайние компоненты оси симметрии. Тогда из (3.15), (3.11), (3.8), (3.7), (3.5) получим, что

$$T(k) = \widehat{D}_{N+1} \prod_{j=1, \dots, N}^{\widehat{}} T_j \widehat{D}_j. \quad (3.16)$$

Здесь

$$T_j = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M_j}{k - z_{2j-1}} & -4M_j \Omega_j \\ \frac{2L_j}{(k - z_{2j})(k - z_{2j-1})} & 1 + \frac{2M_j}{k - z_{2j}} \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_j = \begin{pmatrix} 1 & -D_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где константы D_j определены следующим образом:

$$D_{N+1} = (\widetilde{Y}(\infty) - \widetilde{Y}(z_{2N})), \quad D_j = (\widetilde{Y}(z_{2j-1}) - \widetilde{Y}(z_{2j-2})), \\ D_1 = (\widetilde{Y}(z_1) - \widetilde{Y}(-\infty)).$$

Дополнительно отметим, что в (3.16) мы учли тождества (2.9), (2.10). Заметим также, что $\det T(k) = 1$.

Разрез $\omega(k, z, \rho)$ – отрезок, соединяющий точки $z + i\rho$ и $z - i\rho$. Поэтому $\Psi^\pm(k)$ – аналитические функции от k при $|\operatorname{Im} k| > \rho$ и

$$\Psi^-(k) = \Psi^+(k)T(k). \quad (3.17)$$

Очевидно, что $\Psi^+(k)$ ($\Psi^-(k)$) аналитически продолжается в область $\operatorname{Re} k < z$ ($\operatorname{Re} k > z$). Воспользовавшись (3.5), видим, что при $k \rightarrow \infty$

$$\Psi^\pm(k)e^{-1}(k) \rightarrow I. \quad (3.18)$$

Сделав замену $k = z + (\omega^2 - \rho^2)/2\omega$, перейдем от $\Psi^\pm(k)$ к $\Psi^\pm(\omega)$. Тогда $\Psi^\pm(\omega)$ будут решениями уравнений (3.1) в области $|\omega| > \rho$, причем $\Psi^+(\omega)$ аналитична по ω при $\operatorname{Re} \omega < 0$, $|\omega| > \rho$, а $\Psi^-(\omega)$ – при $\operatorname{Re} \omega > 0$, $|\omega| > \rho$. Кроме того, при $\omega \rightarrow \infty$ из (3.18) имеем

$$\Psi^\pm(\omega)e^{-1}(\omega) \rightarrow I. \quad (3.19)$$

Хотя $\Psi^\pm(\omega)$ определены и при $|\omega| < \rho$, однако в этой области они не удовлетворяют (3.1). Следующая наша цель – продолжить $\Psi^\pm(\omega)$ в область $|\omega| < \rho$ так, чтобы они оставались решениями (3.1).

Выберем корни (3.2) $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$, и пусть $\operatorname{Re} \omega_1(k) < 0$, а $\operatorname{Re} \omega_2(k) > 0$. Тогда разрезами $\omega_{1,2}(k)$ будут лучи, идущие из точек $z + i\rho$, $z - i\rho$ на бесконечность перпендикулярно вещественной оси. Следовательно, $\omega_{1,2}(k)$ – аналитические функции при $|\operatorname{Im} k| < \rho$. Заметим, что $\omega_1(k) = \omega(k)$ при $\operatorname{Re} k < z$, а $\omega_2(k) = \omega(k)$ при $\operatorname{Re} k > z$. Отсюда заключаем, что $\Psi^\pm(k)$ аналитически продолжаются в полосу $|\operatorname{Im} k| < \rho$. Далее, пусть $\Psi_1^-(k)$ и $\Psi_2^+(k)$ – решения (3.12) (с ω , замененной на ω_1) и (3.13) (с ω , замененной на ω_2), соответственно. При $|\operatorname{Im} k| < \rho$ функции $\Psi^+(k)$ и $\Psi_1^-(k)$ ($\Psi^-(k)$ и $\Psi_2^+(k)$) являются решениями одного и того же дифференциального уравнения (3.4а). Поэтому

$$\Psi_1^-(k) = \Psi^+(k)T_1(k), \quad \Psi^-(k) = \Psi_2^+(k)T_2(k). \quad (3.20)$$

Матрицы $T_{1,2}(k)$ не зависят от z . Так как решения интегральных уравнений (3.12), (3.13) автоматически удовлетворяют (3.4б) (это следует из граничных условий (2.12) и из того, что $e(z, \rho, k)$ является совместным решением уравнений (3.4а) и (3.4б) с метрикой Минковского), заключаем, что $T_{1,2}(k)$ не зависят и от ρ . Более того, при $\rho \rightarrow \infty$

$$\omega_1(k) \rightarrow -\rho + (k - z) + O(1/\rho), \quad \omega_2(k) \rightarrow \rho + (k - z) + O(1/\rho).$$

Поэтому с учетом (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} e_1^{-1}(k)\Psi_1^-(k) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} e_1^{-1}(k)\Psi^+(k) = I, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} e_2^{-1}(k)\Psi^-(k) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} e_1^{-1}(k)\Psi_2^+(k) = I, \end{aligned} \quad (3.21)$$

а значит, $T_1(k) = T_2(k) = I$. Здесь $e_1(k) = e(\omega_1(k))$, $e_2(k) = e(\omega_2(k))$. Другими словами, при $|\operatorname{Im} k| < \rho$ имеем

$$\Psi_1^-(k) = \Psi^+(k), \quad \Psi^-(k) = \Psi_2^+(k). \quad (3.22)$$

Функции $\Psi_1^-(k)$ и $\Psi_2^+(k)$ аналитически продолжаются в область $\operatorname{Re} k > z$ и $\operatorname{Re} k < z$, соответственно. Следовательно, $\Psi_1^-(\omega)$ аналитична при $|\omega| < \rho$, $\operatorname{Re} \omega < 0$, а $\Psi_2^+(\omega)$ аналитична при $|\omega| < \rho$, $\operatorname{Re} \omega > 0$. Так как эти функции являются решениями (3.1) в области $\operatorname{Re} \omega < 0$ (Ψ_1^-) или в области $\operatorname{Re} \omega > 0$ (Ψ_2^+), из (3.22) видим, что $\Psi^+(\omega)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \omega < 0$, оставаясь решением (3.1), а $\Psi^-(\omega)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \omega > 0$ и также остается решением (3.1).

Система (3.1) инвариантна относительно преобразования

$$\Psi(z, \rho, \omega) \rightarrow g \tilde{\Psi}^{-1} \left(z, \rho, -\frac{\rho^2}{\omega} \right), \quad (3.23)$$

которое является следствием симметричности матрицы g (волной мы обозначаем транспонированную матрицу). Редукция (3.23) означает, что $\Psi^-(k)$, $g[\tilde{\Psi}_1^-(k)]^{-1}$ – решения совместной пары уравнений (3.4) с $\omega = \omega_1$. Но при $\rho \rightarrow \infty$

$$e_2^{-1}(k) g e_1^{-1}(k) \rightarrow -I. \quad (3.24)$$

Тогда из (3.21), (3.24) заключаем, что $\Psi^-(k) = -g[\tilde{\Psi}_1^-(k)]^{-1}$, или, что то же самое,

$$\Psi^-(\omega) = -g \left[\tilde{\Psi}^+ \left(-\frac{\rho^2}{\omega} \right) \right]^{-1}. \quad (3.25)$$

Функции $\Psi^+(\omega)$ и $\Psi^-(\omega)$ удовлетворяют совместной системе уравнений (3.1), поэтому $[\Psi^+(\omega)]^{-1} \Psi^-(\omega)$ зависит только от $k = z + (\omega^2 - \rho^2)/2\omega$ (где $D_1 k = D_2 k = 0$). Тогда в силу тождества (3.17)

$$\Psi^-(\omega) = \Psi^+(\omega) T(k). \quad (3.26)$$

Равенство (3.26) и редукция (3.25) показывают, что

$$T(k) = \tilde{T}(k). \quad (3.27)$$

Помимо z_k матрица монодромии $T(k)$ зависит от $3N + 1$ параметров. Мы будем рассматривать тождество (3.27) как систему $2N + 1$ нелинейных алгебраических уравнений для констант D_j, L_j, Ω_j :

$$\sum_{j=1}^{N+1} D_j + \sum_{j=1}^N 4\Omega_j M_j = 0, \quad \operatorname{Res}_{z_k} T_{12}(k) = \operatorname{Res}_{z_k} T_{21}(k). \quad (3.28)$$

Предположим, что D_j можно исключить из (3.28), тогда оставшиеся N уравнений дадут связь между угловыми скоростями и угловыми моментами. Например, в случае одной черной дыры из (3.28) находим

$$D_1 = D_2 = -2M_1 \Omega_1, \quad \Omega_1 = \frac{L_1}{2M_1^2(m_1 + M_1)}. \quad (3.29)$$

Выражение для Ω_1 в (3.29) хорошо известно и дает связь угловой скорости и углового момента черной дыры Керра. Его можно переписать в следующей форме:

$$\Omega_1 = \frac{a}{(M_1 + m_1)^2 + a^2}, \quad a = \frac{L_1}{M_1}, \quad M_1^2 = m_1^2 + a^2.$$

Здесь, как и в (3.29), учтено тождество (2.10). Матрица монодромии в этом случае приводится к виду

$$T(k) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M_1}{k-z_1} + \frac{2M_1(M_1-m_1)}{(k-z_1)(k-z_2)} & \frac{2L_1}{(k-z_1)(k-z_2)} \\ \frac{2L_1}{(k-z_1)(k-z_2)} & 1 + \frac{2M_1}{k-z_2} + \frac{2M_1(M_1-m_1)}{(k-z_1)(k-z_2)} \end{pmatrix}.$$

Суммируем результаты этого раздела. Пусть граничная задача (2.4), (2.12) имеет решение. Тогда существует кусочно-аналитическая матрица $\Psi(\omega)$ ($\Psi(\omega) = \Psi^+(\omega)$, $\operatorname{Re} \omega < 0$ и $\Psi(\omega) = \Psi^-(\omega)$, $\operatorname{Re} \omega > 0$), удовлетворяющая совместной системе линейных уравнений (3.1), условию сопряжения на мнимой оси

$$\Psi_-(\omega) = \Psi_+(\omega)T(k), \quad \operatorname{Re} \omega = 0, \quad (3.30)$$

и нормированная на бесконечности:

$$\Psi(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \rightarrow I, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

В (3.30) $\Psi_{\pm}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Psi(\omega \mp \epsilon)$ ($\epsilon > 0$).

Единственными особенностями матрицы $T(k)$ как функции от ω являются простые полюсы в точках $\omega_i^{\pm} = (z_i - z) \pm \sqrt{(z_i - z)^2 + \rho^2}$. Так как матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} T(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}$$

не имеет особенностей при $\omega = 0$ и стремится к I при $\omega \rightarrow \infty$ (это следует из явного вида $T(k)$ и из (3.27), (3.28)), заключаем, что

$$\Psi^{\pm}(\omega) = \left(I + \sum_{j=1}^{2N} \frac{A_j^{\pm}}{\omega - \omega_j^{\pm}} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

где $A_j^{\pm}$ не зависят от ω .

Формулы (3.32) показывают, что любому решению с несвязным горизонтом соответствует рациональное по ω решение вспомогательной линейной задачи и, следовательно, любое такое решение должно содержаться в классе решений Белинского–Захарова [6].

Предположим теперь, что при любых Ω_i, z_i (или L_i, z_i) система нелинейных уравнений (3.28) имеет единственное решение. Тогда любому решению граничной задачи (2.3), (2.4), (2.12) сопоставляется единственная симметричная матрица $T(k)$. Но поскольку решение задачи Римана (3.30), (3.31) единственно, а g однозначно восстанавливается по $\Psi(\omega)$ (3.25), можно заключить, что если решение граничной задачи (2.3), (2.4), (2.12) существует, то оно и единственно. В частности, в случае одной черной дыры мы получаем новое доказательство единственности решения Керра.

Эта работа была поддержана РФФИ, код проекта 96-01-00548.

Список литературы

- [1] *B. Carter*. Black hole equilibrium states. In: *Black Hole*. Eds C. De Witt and B.S. De Witt. N. Y.: Gordon and Breach, 1973.
- [2] *D. C. Robinson*. *Phys. Rev. Lett.* 1975. V. 34. P. 905.
- [3] *G. Weinstein*. *Trans. Am. Math. Soc.* 1994. V. 343. P. 899.
- [4] *Y. Li, G. Tian*. *Manuscripta Math.* 1991. V. 73. P. 83.
- [5] *В. А. Белинский, В. Е. Захаров*. *ЖЭТФ*. 1978. Т. 75. С. 1955.
- [6] *В. А. Белинский, В. Е. Захаров*. *ЖЭТФ*. 1979. Т. 77. С. 3.
- [7] *G. Weinstein*. *Commun. Pure Appl. Math.* 1990. V. 43. P. 903.
- [8] *G. Weinstein*. *Commun. Pure Appl. Math.* 1992. V. 45. P. 1183.
- [9] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 15.I.1997 г.

G. G. Varzugin

**EQUILIBRIUM CONFIGURATION OF BLACK
HOLES AND INVERSE SCATTERING METHOD**

The inverse scattering method is applied for investigation of equilibrium configuration of black holes. Basing on the study of the boundary problem corresponding to this configuration it is shown that any axially symmetric stationary solution of Einstein equations with disconnected event horizon must be contained in the class of Belinskiy-Zaharov solutions. The relations between angular momenta and angular velocities of the black holes are derived.