Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Соловьев, Уравнение для волн вероятности, моделирующих поведение случайных величин, средние значения которых описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 356–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:05:53

И. А. Соловьев*

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН ВЕРОЯТНОСТИ,
МОДЕЛИРУЮЩИХ ПОВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ
КОТОРЫХ ОПИСЫВАЮТСЯ СИСТЕМОЙ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изложена теория волн вероятностей применительно к исследованию поведения стохастических векторных величин, средние значения компонент которых подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка. Приведено уравнение для волн вероятности, соответствующее дифференциальной модели для средних величин. Рассмотрена связь этого уравнения с уравнением Лиувилля. Доказан аналог теоремы Эренфеста. Получено дифференциальное уравнение первого порядка для изменения дисперсии компоненты случайной векторной величины. Обсуждается проблема интерпретации постоянной Планка. Определены условия, при которых распространение волновых пакетов происходит с нарастающей или убывающей дисперсией.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения для стохастических величин привлекли внимание после появления известных работ [1], посвященных броуновскому движению. Простейшим случаем таких уравнений является уравнение Ланжевена [2], которое может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} - m\left(\left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle\right)^2 + 3\pi\eta a\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \langle xX \rangle,$$

где $\langle \dots \rangle$ — среднее значение, m — масса частицы, a — ее диаметр, η — вязкость жидкости, в которой находится частица, X — флуктуационная сила, обусловленная толчками молекул жидкости, x — положение частицы, t — время.

В последние годы многие ставшие уже классическими дифференциальные модели физики, химии, биологии, медицины, экологии, социологии, экономики, использовавшиеся ранее для получения детерминированных решений, начинают преобразовываться в

*Московский энергетический институт (технический университет), Москва, Россия

стохастические. Библиография по таким трансформациям постановок задач представлена в [3]. Среди них отметим систему уравнений Вольтерра–Лотки, первоначально предназначенную для описания в детерминированном приближении широкого класса явлений, моделирующих процессы рождения и гибели в терминах численности “жертв” $\langle x \rangle$ и “хищников” $\langle y \rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle x \rangle}{dt} &= a\langle x \rangle - \alpha\langle x \rangle\langle y \rangle, \\ \frac{d\langle y \rangle}{dt} &= \alpha\langle x \rangle\langle y \rangle - b\langle y \rangle.\end{aligned}$$

В реальности величины численностей “жертв” и “хищников” флуктуируют около своих средних значений $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$. Учет флуктуаций можно произвести, например, с помощью распределения вероятностей $P(x, y, t)$ численности особей в данный момент времени t , удовлетворяющего уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= a(x-1)P(x-1, y, t) + \alpha(x+1)(y-1)P(x+1, y-1, t) + \\ &+ b(y+1)P(x, y+1, t) - (ax + \alpha xy + by)P(x, y, t).\end{aligned}$$

Отметим, что это не единственный способ учета стохастичности процесса взаимодействия популяций. В общей теории исследования случайных величин абстрактной природы, чьи усредненные значения подчиняются дифференциальным уравнениям, можно выделить три основных взаимно дополняющих направления.

Первое из направлений представлено в трудах Фоккера [4], Планка [5], Колмогорова [6] и других. В этих работах построены общие уравнения для плотностей вероятностей случайных величин, математические ожидания которых описываются дифференциальными уравнениями.

Начало второму направлению – построению стохастических интегралов для стохастических дифференциальных уравнений, положено в исследованиях Ито [7] и Стратоновича [8]. В ряде случаев методами Ито и Стратоновича характеристики случайных величин получаются проще, чем с помощью уравнений Фоккера–Планка.

Наконец, третье направление исследования случайных процессов появилось в ходе дискуссий об интерпретации квантовой механики [9]. Важную роль при вероятностном истолковании механики микромира сыграли теоремы Эренфеста [10].

Если первые два направления широко используются при моделировании случайных процессов, то область применимости третьего направления, на наш взгляд, необоснованно сужена до трактовки лишь явлений квантовой физики.

С одной стороны, это связано с тем, что уравнения Шредингера были построены только для специфических физических явлений. Для произвольных случайных величин с известными дифференциальными уравнениями относительно средних значений аналог уравнения Шредингера получены не были. Особую трудность при этом представляют поиск и интерпретация постоянной, подобной постоянной Планка.

С другой стороны, в дискуссиях по поводу вероятностной трактовки волновой механики остается открытой проблема построения волн вероятности из “чисто” вероятностных соображений [9].

Настоящая работа посвящена исследованию стохастических векторных величин $\bar{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$, средние значения компонент которых подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$d\langle q_j \rangle / dt = \langle f_j(q_1, \dots, q_n, t) \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Условимся называть q_j j -й обобщенной координатой абстрактной материальной частицы, а t — обобщенным временем. Если реальные значения $t \in [a, \infty)$, то преобразованием $t' = t - a$ приведем область изменения этой величины к $[0, \infty)$.

В отличие от публикаций [11, 12, 13], в которых плотность вероятности находится из соответствующих (1) уравнений Фоккера–Планка или методами Ито–Стратоновича, в настоящей работе развивается подход волн вероятности, предложенный в статьях [14, 15]. Этот подход позволяет каждой обобщенной частице, среднее значение обобщенного перемещения которой $\langle \bar{q}(t) \rangle$ моделируется уравнениями (1), поставить в соответствие в условном пространстве-времени $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ волновой пакет с частотой и волновым числом, отвечающими поведению среднего значения $\langle \bar{q}(t) \rangle$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛН ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛИРОВКА УСЛОВИЙ ИХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Волнами вероятности для случайного вектора $\bar{q}(t)$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (1), называются две комплексно-сопряженные функции $\Psi(\bar{q}, t)$ и $\Psi^*(\bar{q}, t)$, являющиеся нетривиальными ($\Psi \neq 0$, $\Psi^* \neq 0$) решениями уравнений

$$i\hbar_q \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(i\hbar_q f_k(\bar{q}, t) \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} + \frac{1}{2} i\hbar_q \Psi \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right) - U(\bar{q}, t) \Psi = 0, \quad (2)$$

$$i\hbar_q \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(i\hbar_q f_k(\bar{q}, t) \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} + \frac{1}{2} i\hbar_q \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right) + U(\bar{q}, t) \Psi^* = 0. \quad (3)$$

Здесь $t > 0$, $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$, а $\hbar_q$ — некоторый параметр, равный кванту аналога действия, построенного с помощью $\bar{q}(t)$. Связь $\hbar_q$ с начальной дисперсией величины $\bar{q}(t)$ будет обсуждаться в разделе 3. Функция $U(\bar{q}, t)$ — аналог потенциальной энергии, в данной постановке может быть выбрана произвольной среди функций, для которых существуют решения уравнений (2) и (3), отвечающие волновым характеристикам обобщенной частицы. В ряде случаев удобно считать, что $U(\bar{q}, t) \in C^\infty[\mathbb{R}^{n+1}]$, в частности $U(\bar{q}, t) = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Произведение $\Psi(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t)$ называется плотностью вероятности и обозначается $P(\bar{q}, t)$.

Поскольку “частица”, описываемая случайным вектором $\bar{q}(t)$, в каждый момент t обязательно находится где-то в обобщенном пространстве $\mathbb{R}^n$, то вероятность ее обнаружения не должна зависеть от t и обязана равняться единице. Таким образом, несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 dq_2 \dots dq_n = 1 \quad (4)$$

должен сходиться и не должен зависеть от обобщенного времени t . Достаточные условия этого сформулированы в теореме 1.

ТЕОРЕМА 1. Если Ψ и Ψ^* – нетривиальные решения уравнений (2) и (3) и если для любых $t \geq 0$ и $j = 1, 2, \dots, n$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{q_i \rightarrow \pm\infty \\ i=1,2,\dots,n}} f_j(\bar{q}, t) \Psi(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t) = 0,$$

в частности, если $|f_j(\bar{q}, t)| \leq M = \text{const}$ при $a \leq q \leq b$ ($M > 0$) и $f_j(\bar{q}, t) \equiv 0$ при $q < a$ и $q > b$, то интеграл в (4) сходится и не зависит от обобщенного времени t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнения (2) и (3) соответственно на Ψ^* и Ψ и сложим полученные равенства. Имеем

$$i\hbar_q \frac{\partial(\Psi\Psi^*)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n i\hbar_q \frac{\partial(\Psi\Psi^* f_j(\bar{q}, t))}{\partial q_j} = 0.$$

Проинтегрировав обе части последнего соотношения по q_j и воспользовавшись условием теоремы, получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & i\hbar_q \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial(\Psi\Psi^*)/\partial t dq_1 \dots dq_n + \\ & + i\hbar_q \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial(f_j(\bar{q}, t) \Psi\Psi^*)/\partial q_j dq_1 \dots dq_j \dots dq_n = 0, \\ & i\hbar_q \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial(\Psi\Psi^*)/\partial t dq_1 \dots dq_n + \\ & + i\hbar_q \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\substack{b_j \rightarrow \infty \\ a_j \rightarrow -\infty}} f_j(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t) \Psi\Psi^* \Big|_{a_j}^{b_j} dq_1 \times \\ & \times dq_2 \dots dq_{j-1} dq_{j+1} \dots dq_n = 0, \\ & i\hbar_q \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial(\Psi\Psi^*)/\partial t dq_1 \dots dq_n = 0. \end{aligned}$$

В силу теоремы о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, заключаем, что для всех $t \geq 0$ интеграл сходится:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\Psi^* dq_1 \dots dq_n.$$

Отметим, что $J \neq 0$, т.к. в противном случае Ψ и Ψ^* были бы тривиальными решениями уравнений (2) и (3). Если $J \neq 0$, то, разделив Ψ и Ψ^* на $\sqrt{J}$, получим новые выражения для волн вероятности, которые удовлетворяют условию нормировки (4).

Условие нормировки можно сформулировать и с помощью собственных интегралов в виде так называемой “нормировки в ящике”:

$$\int_{-L_1/2}^{L_1/2} \cdots \int_{-L_n/2}^{L_n/2} \Psi(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n = 1. \quad (5)$$

Для выполнения условий (4) и (5) потребуем, чтобы функции Ψ и Ψ^* искались среди таких решений уравнений (2) и (3), которые как функции от $\bar{q}$ принадлежали бы пространству L_2 : $\Psi(\bar{q}, t) \in L_2[\mathbb{R}^n]$, $\Psi^*(\bar{q}, t) \in L_2[\mathbb{R}^n]$. Функции $\Psi(\bar{q}, t)$ и $\Psi^*(\bar{q}, t)$ должны удовлетворять начальным условиям вида

$$\Psi(\bar{q}, 0) = \varphi(\bar{q}, \hbar_q), \quad \Psi^*(\bar{q}, 0) = \varphi^*(\bar{q}, \hbar_q), \quad (6)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\bar{q}, \hbar_q) \varphi^*(\bar{q}, \hbar_q) dq_1 \dots dq_n = 1 \quad (7)$$

или

$$\int_{-L_1/2}^{L_1/2} \cdots \int_{-L_n/2}^{L_n/2} \varphi(\bar{q}, \hbar_q) \varphi^*(\bar{q}, \hbar_q) dq_1 \dots dq_n = 1.$$

Кроме того, $\Psi(\bar{q}, t)$ и $\Psi^*(\bar{q}, t)$ должны удовлетворять либо граничным условиям на бесконечности:

$$\lim_{q_j \rightarrow \pm\infty} \Psi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t) q_j^2 f_j(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{q_j \rightarrow \pm\infty} \Psi^*(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t) q_j^2 f_j(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n, t) = 0, \quad (9)$$

либо периодическим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, \dots, q_j = -L_j/2, \dots, q_n, t) &= \Psi(q_1, \dots, q_j = L_j/2, \dots, q_n, t) = 0, \\ \Psi^*(q_1, \dots, q_j = -L_j/2, \dots, q_n, t) &= \Psi^*(q_1, \dots, q_j = L_j/2, \dots, q_n, t) = 0. \end{aligned}$$

В процессе доказательства теоремы 1 получено уравнение Лиувилля. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Плотность вероятности $P(\bar{q}, t) = \Psi(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t)$, где функции $\Psi(\bar{q}, t)$ и $\Psi^*(\bar{q}, t)$ подчиняются уравнениям (2) и (3), удовлетворяет уравнению Лиувилля:*

$$\partial P / \partial t + \sum_{k=1}^n \partial (f_k(\bar{q}, t) P(\bar{q}, t)) / \partial q_k = 0.$$

2. ТЕОРЕМЫ О ПОВЕДЕНИИ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ И ДИСПЕРСИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Средним значением $\langle f(\bar{q}, t) \rangle$ скалярной функции, зависящей от компонент вектора $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$, называется

$$\langle f(\bar{q}(t), t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) f(\bar{q}, t) \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n.$$

В частности, среднее значение $\langle q_i(t) \rangle$ для компоненты $q_i(t)$ имеет вид

$$\langle q_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) q_k \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Средними значениями операторов “обобщенной энергии” $i\hbar_q \partial / \partial t$ и “ i -й компоненты обобщенного импульса” $-i\hbar_q \partial / \partial q_i$ называются соответственно следующие величины:

$$\begin{aligned} \langle i\hbar_q (\partial / \partial t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\bar{q}, t) (i\hbar_q \partial \Psi(\bar{q}, t) / \partial t) dq_1 \dots dq_n, \\ \langle -i\hbar_q (\partial / \partial q_k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\bar{q}, t) (-i\hbar_q \partial \Psi(\bar{q}, t) / \partial q_k) dq_1 \dots dq_n. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Среднее значение $\langle q_j(t) \rangle$ j -й компоненты случайного вектора $\bar{q}(t)$, поведение которого моделируется с помощью нетривиальных решений уравнений (2) и (3) и условий (4), (6)–(9), подчиняется уравнению (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем производную по t и от среднего значения $\langle q_j(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle q_j(t) \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) q_j \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (\Psi(\bar{q}, t) q_j \Psi^*(\bar{q}, t)) dq_1 \dots dq_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (\Psi(\bar{q}, t)) q_j \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) q_j \frac{d}{dt} \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n. \end{aligned}$$

Учтя уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle q_j(t) \rangle}{dt} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n f_k(\bar{q}, t) \frac{\partial \Psi(\bar{q}, t)}{\partial q_k} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \Psi(\bar{q}, t) \frac{\partial f_k}{\partial q_k} + (i/\hbar_q) U \Psi(\bar{q}, t) \right) q_j \Psi^*(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\bar{q}, t) q_j \left(\sum_{k=1}^n f_k(\bar{q}, t) \frac{\partial \Psi^*(\bar{q}, t)}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \Psi^*(\bar{q}, t) \frac{\partial f_k}{\partial q_k} - \right. \\
&\quad \left. - (i/\hbar_q) U \Psi^*(\bar{q}, t) \right) dq_1 \dots dq_n = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial \Psi^*(\bar{q}, t)}{\partial q_k} q_j \Psi(\bar{q}, t) + \right. \\
&\quad \left. + \Psi^*(\bar{q}, t) q_j f_k \frac{\partial \Psi(\bar{q}, t)}{\partial q_k} + \Psi(\bar{q}, t) q_j \Psi^*(\bar{q}, t) \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right\} dq_1 \dots dq_n = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f_k q_j \frac{\partial (\Psi \Psi^*)}{\partial q_k} + \Psi q_j \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right\} dq_1 \dots dq_n. \tag{10}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в фигурных скобках можно проинтегрировать по частям по q_k . С учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n q_j f_k \frac{\partial (\Psi \Psi^*)}{\partial q_k} dq_1 \dots dq_n = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \sum_{k=1}^n (\Psi q_j f_k \Psi^*) \Big|_{q_k=a}^{q_k=b} dq_1 \dots dq_{k-1} dq_{k+1} \dots dq_n - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\partial (q_j f_k)}{\partial q_k} \Psi^* \Psi dq_1 \dots dq_n = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \Psi^* q_j \Psi + \Psi^* f_j \Psi \right\} dq_1 \dots dq_n.
\end{aligned}$$

Подставив это выражение в соотношение (10), придем к уравнениям (1).

ТЕОРЕМА 4. Дисперсия $\sigma_j^2 = \langle q_j^2(t) \rangle - \langle q_j(t) \rangle^2$ решения j -го уравнения системы (1) подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$d(\sigma_j^2)/dt = 2(\langle f_j(\bar{q}, t) q_j \rangle - \langle q_j \rangle \langle f_j(\bar{q}, t) \rangle). \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$d(\sigma_j^2)/dt = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\bar{q}, t) q_j^2 \Psi(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n \right) - 2\langle q_j(t) \rangle \frac{d}{dt} \langle q_j(t) \rangle. \quad (12)$$

Подставим в (12) производную $d\langle q_j(t) \rangle/dt$ из (1) и внесем эту производную под знак интеграла в первом слагаемом. Тогда получится

$$\begin{aligned} d(\sigma_j^2)/dt = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\partial \Psi^*(\bar{q}, t)/\partial t) q_j^2 \Psi(\bar{q}, t) dq_1 \dots dq_n + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\bar{q}, t) q_j^2 (\partial \Psi(\bar{q}, t)/\partial t) dq_1 \dots dq_n - \\ & - 2\langle q_j(t) \rangle (d\langle q_j(t) \rangle/dt). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая опять уравнение (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(-f_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \Psi \frac{\partial f_k}{\partial q_k} - (i/\hbar_q) U \Psi \right) q_j^2 \Psi^* dq_1 \dots dq_n + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi q_j^2 \left(\sum_{k=1}^n \left(-f_k \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} + (i/\hbar_q) U \Psi^* \right) \right) dq_1 \dots dq_n = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} q_j^2 \Psi^* + \Psi q_j^2 f_k \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} + \Psi q_j^2 \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right\} dq_1 \dots dq_n = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f_k q_j^2 \frac{\partial (\Psi \Psi^*)}{\partial q_k} + \Psi q_j^2 \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right\} dq_1 \dots dq_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в фигурных скобках (14), с учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} q_j^2 f_k \frac{\partial (\Psi \Psi^*)}{\partial q_k} dq_1 \dots dq_n = \\ & = (\Psi q_j^2 \Psi^* f_k) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q_j} (q_j^2 f_k) \Psi^* \Psi dq_1 \dots dq_n = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \Psi^* q_j^2 \Psi + 2 \Psi^* q_j f_k \Psi \right\} dq_1 \dots dq_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), с учетом (13) и (12) придем к уравнению (11).

ТЕОРЕМА 5. Среднее значение j -й компоненты обобщенного импульса удовлетворяет уравнению

$$d\langle p_j(t) \rangle/dt = \left\langle - \sum_{k=1}^n (p_k \partial f_k / \partial q_j) \right\rangle - \langle \partial U / \partial q_j \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем производную от среднего значения j -й компоненты случайного вектора обобщенного импульса и воспользуемся уравнениями (2) и (3). Имеем

$$\begin{aligned}
 d\langle p_j \rangle / dt &= -i\hbar_q \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\bar{q}, t) \partial \Psi(\bar{q}, t) / dq_j dq_1 \dots dq_n \right) = \\
 &= -i\hbar_q \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} + \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] dq_1 \dots dq_n = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\hbar_q \left(\sum_{k=1}^n \left(f_k \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right) \right) + \Psi^* U \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} dq_1 \dots dq_n + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_j} \left(i\hbar_q \left(\sum_{k=1}^n \left(f_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \Psi \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right) \right) - \Psi U \right) dq_1 \dots dq_n = \\
 &= i\hbar_q \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_k \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_j} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_j} \right) \right\} dq_1 \dots dq_n + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi^* U \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_j} (\Psi U) \right) dq_1 \dots dq_n.
 \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned}
 \langle p_j \rangle &= \langle -i\hbar_q \partial / \partial q_j \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\hbar_q \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_j} \Psi \right) \right\} dq_1 \dots dq_n, \\
 i\hbar_q \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} &\left\{ f_k \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_j} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_j} \right) \right\} dq_1 \dots dq_n = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar_q \left(\Psi^* \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_k} \Psi \right) \right) dq_1 \dots dq_n = \\
 &= -\left\langle \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \right\rangle, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} &\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} - \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_j} (\Psi U) \right) dq_1 \dots dq_n = \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial U}{\partial q_j} \Psi dq_1 \dots dq_n.
 \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\frac{d\langle p_j(t) \rangle}{dt} = -\left\langle \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U}{\partial q_j} \right\rangle.$$

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И СПОСОБ ЗАДАНИЯ $\hbar_q$

Введем обозначения для дисперсий взаимно сопряженных компонент обобщенной координаты q_j и обобщенного импульса p_j :

$$\begin{aligned}\sigma_{q_j}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(q_j - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* q_j \Psi dq_1 \dots dq_n \right)^2 \Psi dq_1 \dots dq_n, \\ \sigma_{p_j}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-i\hbar_q \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-i\hbar_q \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right) \right) \Psi dq_1 \dots dq_n \right)^2 \Psi dq_1 \dots dq_n.\end{aligned}$$

Повторяя выкладки, приведенные в [9], докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Произведение дисперсий взаимно сопряженных компонент обобщенных координаты и импульса не меньше величины $\hbar_q$, т. е.*

$$\sigma_{q_j}^2 \cdot \sigma_{p_j}^2 \geq \hbar_q^2/4.$$

Из теоремы 6 можно получить важное соотношение, позволяющее задать $\hbar_q$, если известна начальная дисперсия $\sigma_{q_j}^2(t=0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть известны начальные значения дисперсий взаимно сопряженных компонент обобщенных координат и импульса $\sigma_{q_j}^2(t=0) = \sigma_{q_{j0}}^2 \neq 0$ и $\sigma_{p_j}^2(t=0) = \sigma_{p_{j0}}^2 \neq 0$. Определим $\hbar_q$ следующим образом:

$$\hbar_q = 2 \min_{(j=1,2,\dots,n)} (\sigma_{q_{j0}} \cdot \sigma_{p_{j0}}).$$

В частности, если положить $\sigma_{p_{j0}} = 1$, получим

$$\hbar_q = 2 \min_{(j=1,2,\dots,n)} \sigma_{q_{j0}}. \quad (16)$$

Рассмотрим линеаризованную систему (1)

$$d\langle q_j(t) \rangle / dt = \left\langle \sum_{k=1}^n \partial f_j(\langle q_1(t) \rangle, \dots, \langle q_n(t) \rangle, t) / \partial q_k (q_k - \langle q_k(t) \rangle) \right\rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Введем обозначения $a_{ji} = \partial f_j(\langle q_1(t) \rangle, \dots, \langle q_n(t) \rangle, t) / \partial q_i$. Будем считать, что все собственные векторы матрицы (a_{ji}) линейно независимы. Тогда с помощью замены переменных, которая является переходом к базису собственных векторов, матрица (a_{ji}) может быть приведена к диагональному виду. Без ограничения общности вместо линеаризованной системы (1) рассмотрим систему вида

$$d\langle q_j(t) \rangle / dt = \lambda_j \langle q_j \rangle,$$

где λ_j – собственные значения матрицы (a_{ji}) .

Следующая теорема дает условие устойчивости волновых пакетов в линейном приближении.

ТЕОРЕМА 7. Если выполняются условия

$$-\infty < \lambda_{1j} \leq \lambda_j \leq \lambda_{2j} < 0, \quad (17)$$

то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \hbar_q \rightarrow 0}} \sigma_{q_j}^2(t) = 0. \quad (18)$$

Если же

$$0 < \lambda_{3j} \leq \lambda_j \leq \lambda_{4j} < \infty,$$

то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \hbar_q \rightarrow 0}} \sigma_{q_j}^2(t) = \infty. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение (18). Имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_{q_j}^2/dt &= 2(\langle f_j(\bar{q}, t) q_j \rangle - \langle q_j \rangle \langle f_j(\bar{q}, t) \rangle) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* q_j \lambda_j q_j \Psi dq_1 \dots dq_n - \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* q_j \Psi dq_1 \dots dq_n \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \lambda_j q_j \Psi dq_1 \dots dq_n = 2\lambda_j \sigma_{q_j}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из соотношений (16), (17) и (20) следует

$$\sigma_{q_j}^2 \leq \sigma_{q_j}^2(0) \exp(-2|\lambda_{2j}|t) = (\hbar_q^2/4) \exp(-|\lambda_{2j}|t) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ и $\hbar_q \rightarrow 0$.

Аналогично доказывается соотношение (19).

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия

$$-\infty < \lambda_{1j} \leq \partial f_j / \partial q_k \leq \lambda_{2j} < 0, \quad q_j \in (-\infty, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \hbar_q \rightarrow 0}} \sigma_{q_j}^2(t) = 0.$$

Если же справедливы неравенства

$$0 < \lambda_{3j} \leq \partial f_j / \partial q_k \leq \lambda_{4j} < \infty, \quad q_j \in (-\infty, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \hbar_q \rightarrow 0}} \sigma_{q_j}^2(t) = \infty.$$

Рассмотрим один важный пример, относящийся к описанию случайного одномерного процесса со стационарным гауссовским распределением

$$P(q, t) = \frac{1}{2} \hbar_q (2\pi)^{1/2} \exp(-2(q - a)^2 / \hbar_q^2).$$

Если положить $P(q, t) = \Psi(q, t) \Psi^*(q, t)$, а затем подставить $\Psi^*(q, t) = P(q, t) / \Psi(q, t)$ в уравнение (3), то получим с учетом (2) следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(q)$: $f(q)(q - a)/\sigma^2 - df/dq = 0$. Заметим, что из общего решения этого уравнения $f(q) = C \exp((q - a)^2 / (2\sigma^2))$ условию существования среднего значения $\langle f(q) \rangle$ удовлетворяет лишь $f(q) \equiv 0$. Подставив $f(q) = 0$ в уравнение (2), получим следующее уравнение для временного множителя $T(t)$ волновой функции $\Psi(q, t) = T(t) \sqrt{P(q, t)}$: $i \hbar_q dT/dt - UT = 0$, отсюда $T(t) = \text{const} \exp(-iU(t)/\hbar_q)$ и с точностью до нормировочного множителя

$$\Psi(q, t) = \exp(-iU(t)/\hbar_q) \left[\frac{1}{2} \hbar_q (2\pi)^{1/2} \exp(-2(q - a)^2 / \hbar_q^2) \right]^{1/2}.$$

Найденная функция описывает колебания с частотой $\omega = U/\hbar_q$ около среднего значения $\langle q \rangle = a$. Соответственно для полного описания поведения случайной величины q даже в случае стационарности $\langle q(t) \rangle = a = \text{const}$ наблюдаемого во времени среднего значения необходимо задание не только начальной дисперсии, но и частотной характеристики величины q , определяемой величиной $U(q)$. Таким образом, $U(q)$ задает частоту флуктуаций около среднего стационарно наблюдаемого значения случайной величины.

Подобная ситуация может иметь место в эксперименте с фиксированной в электростатическом поле броуновской частицей в середине ($q = a$) узкого сосуда с жидкостью, находящейся при постоянной температуре. Вверху и внизу сосуда расположены два одноименных с зарядом частицы более мощных заряда. Толщина сосуда чуть больше диаметра частицы. Постоянные толчки со стороны молекул приводят к незначительным отклонениям частицы от положения равновесия, в которое она постоянно приводится фиксирующим электростатическим полем (или с помощью других подобных упругим силам воздействий). Среднее значение, дисперсию и частоту колебаний можно экспериментально определить путем измерений. Заданием этих величин наблюдаемый случайный процесс тем самым будет полностью определен, и его описание предпочтительнее вести с помощью предложенного здесь подхода.

Список литературы

- [1] А. Эйнштейн, М. Смолуховский. Броуновское движение. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
- [2] P. Langevin. C. R. Acad. Sci. 1908. V. 146. P. 530.
- [3] Г. Хакен. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
- [4] A. D. Fokker. Ann. Phys. (Leipzig). 1915. V. 43. P. 310.
- [5] М. Планк. Термодинамика. Теория излучения и квантовая теория. Теория относительности Избр. труды. М.: Наука, 1975.
- [6] A. N. Kolmogorov. Math. Annal. 1931. V. 104. P. 415.

- [7] *К. Ито*. Вероятностные процессы. Вып. 1. М.: ИЛ, 1960.
- [8] *Р. Л. Стратонович*. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
- [9] *Л. де Бройль*. Соотношение неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. М.: Мир, 1986.
- [10] *П. Эренфест*. Относительность. Кванты. Статистика. М.: Наука, 1972.
- [11] *Г. Николис, И. Пригожин*. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
- [12] *К. В. Гардинер*. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
- [13] *G. Nicolis, I. Prigogine*. Exploring Complexity. An introduction. New York: W. H. Freeman and Company, 1989.
- [14] *И. А. Соловьев*. Вестн. МЭИ. 1995. № 6. С. 109–118.
- [15] *И. А. Соловьев*. Сб. научн. тр. МГОПИ. 1996. № 12. С. 81–92.

Поступила в редакцию 17.I.1997 г.

I. A. Soloviev

**STOCHASTIC WAVE EQUATION SIMULATING THE BEHAVIOR
OF QUANTITIES WITH THE AVERAGES OBEYING THE SET
OF ORDINARY FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS**

The theory of stochastic waves for stochastic vector quantities satisfying the set of ordinary first order differential equations is presented. The equation for wave functions corresponding to a differential model for mean values is suggested. The relationship between this equation and Liouville's equation is considered. The analog of Ehrenfest's theorem is proved. The ordinary first order differential equation for dispersion is obtained. The problems of interpretation and determination of the analog of Planck's constant are discussed. The conditions for increasing and decreasing of dispersion are found.