Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Ковалев, Ренормгрупповые симметрии в задачах нелинейной геометрической оптики, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 369–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:08:28

В. Ф. Ковалев*

РЕНОРМГРУППОВЫЕ СИММЕТРИИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Путем использования и дальнейшего развития изложенного в [3, 4] подхода построены ренормгрупповые симметрии для краевой задачи для системы уравнений, описывающих в приближении геометрической оптики распространение мощного излучения в нелинейной среде. С помощью ренормгрупповых симметрий найдены новые точные и приближенные решения уравнений нелинейной геометрической оптики и приведены явные аналитические зависимости, характеризующие пространственную эволюцию лазерного пучка при различного вида распределениях его интенсивности на границе среды.

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании физических систем, поведение которых описывается на языке дифференциальных уравнений (ДУ) (обыкновенных и с частными производными), существенную помощь оказывает знание допускаемой группы симметрии, позволяющее регулярным способом находить точные решения этих уравнений. Применительно к анализу краевых задач для уравнений математической физики особый интерес представляет специальный класс симметрий, так называемые симметрии ренормгруппового типа (РГ-симметрии), способ построения которых на основе методов группового анализа был описан в [1, 2] и суммирован позднее в работах [3, 4]. Этот способ включает ряд последовательных шагов, таких как конструирование специального ренормгруппового многообразия, нахождение допускаемой им группы преобразований и последующее ее сужение на искомом решении краевой задачи, а также использование операторов РГ-симметрий для получения аналитических выражений для точного или приближенного решения краевой задачи.

В данной работе построение операторов РГ-симметрий и нахождение с их помощью решений краевой задачи осуществляется для уравнений нелинейной геометрической оптики, описывающих распространение мощного лазерного излучения в нелинейной среде в пренебрежении дифракционными эффектами¹⁾. Исходные уравнения и граничные условия к ним в случаях плоского (двумерного) и цилиндрического (трехмерного) лазерных пучков сформулированы во втором разделе работы. Построение РГ-симметрий

¹⁾Различные подходы к исследованию этих уравнений и полученные частные решения обсуждались ранее в ряде работ (см., например, [5, 6, 7] и цитированную там литературу).

*Институт математического моделирования РАН, Москва, Россия.
E-mail: kovalev#9@imamod.msk.su

по описанному в [3, 4] методу проведено в третьем разделе работы вначале для плоского, а затем для цилиндрического лазерного пучка. Показано, что координаты операторов РГ-симметрий могут быть представлены в виде бесконечных рядов по степеням параметра, характеризующего нелинейность среды. Для краевых данных специального вида эти ряды обрываются, и возникающая при этом конечная сумма характеризует точную РГ-симметрию краевой задачи при произвольном значении параметра нелинейности. В общем случае краевых данных произвольного вида ограничение конечным числом слагаемых соответствующих рядов приводит при малой величине этого параметра к приближенной РГ-симметрии. Указан новый вид РГ-симметрий, получаемых развитием ранее изложенного метода [3, 4]. В четвертом разделе работы приведены новые точные и приближенные решения краевой задачи, возникающие при использовании найденных операторов точной и приближенной РГ-симметрии. Для ряда конкретных примеров, соответствующих заданному распределению интенсивности пучка на границе нелинейной среды (в виде солитона, в виде “сглаженной” ступеньки, в виде гауссовой кривой) и плоскому фазовому фронту, получены формулы (4.1), (4.2), (4.4), (4.6), в замкнутой аналитической форме определяющие распределение интенсивности и производной эйконала лазерного излучения в среде, а также положение точки, в которой возникает особенность решения. В заключении рассмотрена возможность дальнейшего использования как уже найденных РГ-симметрий, так и симметрий, которые могут возникнуть при изменении математической модели, используемой для описания процесса распространения излучения в нелинейной среде.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания процесса нелинейной рефракции мощного излучения запишем в качестве исходных (см., например, [5]) следующую пару эллиптических ДУ в частных производных первого порядка:

$$v_t + vv_x = a\varphi(n)n_x, \quad n_t + vn_x + nv_x + (m/x)nv = 0. \quad (2.1)$$

Здесь v – производная эйконала по поперечной координате x , n – интенсивность лазерного пучка, распространяющегося вдоль оси t , функция φ зависит только от n и характеризует нелинейность среды с параметром нелинейности a . Величина m равна нулю для двумерного пучка и единице для трехмерного пучка.

Ниже будем считать, что на входе в нелинейную среду (при $t = 0$) заданы нулевая кривизна волнового фронта пучка и нормированное распределение его интенсивности n по координате x :

$$n(0, x) = N(x); \quad v(0, x) = 0. \quad (2.2)$$

Отличительной особенностью двумерного пучка с $m = 0$ является возможность линеаризации исходной системы уравнений (2.1) преобразованием годографа. После перехода к переменным $\tau = nt$ и $\chi = x - vt$ и введения нормированной производной эйконала $w = v/a$ система уравнений (2.1) записывается в виде пары линейных ДУ:

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0, \quad \chi_w + a\tau_n = 0. \quad (2.3)$$

Для трехмерного пучка с $m = 1$ преобразование голографа приводит (2.1) также к нелинейной системе

$$\begin{aligned} \tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n &= 0, \\ \chi_w + a \left[\tau_n + \frac{w}{\chi} \left(\tau_n \chi_w - \frac{n}{\varphi(n)} \chi_n^2 \right) \right] + \frac{a^2 w}{n^2 \chi} [2n\tau\tau_n - \tau^2] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕНОРМГРУППОВЫХ СИММЕТРИЙ

3.1. РГ-симметрии для двумерного пучка: $m = 0$. Первым шагом на пути построения РГ-симметрий является конструирование РГ-многообразия, роль которого в нашем случае играет система исходных ДУ (2.3), рассматриваемых в расширенном пространстве переменных, включающем не только зависимые и независимые переменные τ, χ, w, n , но и параметр нелинейности a и производные τ и χ по n произвольного порядка. Следующие шаги в этом направлении, а именно отыскание РГ-симметрий методом сужения группы точечных симметрий и симметрий Ли–Беклунда [8, 9], допускаемых таким РГ-многообразием, обсуждались в предшествующих работах (см., например, [10, 11, 12]) для двумерного лазерного пучка. Было показано, что любая комбинация конечного числа операторов конечной подгруппы точечной группы и группы Ли–Беклунда заданного порядка не порождает, вообще говоря, РГ-симметрию при произвольных краевых данных (2.2). Использование бесконечной подгруппы точечной группы, допускаемой уравнениями (2.1), также не решает проблему записи РГ-симметрий в явном виде, поскольку отыскание этой подгруппы фактически эквивалентно решению исходных уравнений (2.3).

Ниже для получения РГ-симметрий мы воспользуемся следующим приемом: представим координаты f и g канонического оператора группы, допускаемой уравнениями (2.3),

$$X = f\partial_\tau + g\partial_\chi \quad (3.1)$$

в виде ряда по степеням параметра нелинейности²⁾:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a^i f^i; \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} a^i g^i. \quad (3.2)$$

Функции f^i и g^i в (3.2) находятся решением соответствующих определяющих уравнений, выражающих условия инвариантности системы (2.3) относительно группы с оператором (3.1). Ввиду громоздкости сами определяющие уравнения и способ их решения здесь опущены, и приводится лишь окончательный результат в виде формул для координат f^i и g^i оператора искомой группы. Эти координаты даются следующей системой рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} f^i &= F^i + \int dw \left\{ (1 - \delta_{i,0}) Z f^{i-1} + \frac{n}{\varphi} Y g^i \right\}, \\ g^i &= G^i + (1 - \delta_{i,0}) \int dw \{ Z g^{i-1} - Y f^{i-1} \}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

²⁾Симметрии, представляемые в виде *формального* степенного ряда вида (3.2), были названы в [13] *формальными* симметриями.

Здесь

$$\begin{aligned} Y &= \partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}), \quad Z = \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1} \partial_{\chi_s}, \\ \tau_s &= \frac{\partial^s \tau}{\partial n^s}, \quad \chi_s = \frac{\partial^s \chi}{\partial n^s}, \quad \tilde{\tau}_s = \tau_s - w \sum_{p=0}^s \binom{s}{p} \frac{\partial^p (n/\varphi)}{\partial n^p} \chi_{s-p+1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$F^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ и $G^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ – произвольные функции своих аргументов, а выражения в фигурных скобках перед интегрированием по переменной w должны быть записаны в переменных $\tilde{\tau}_s, \chi_s, n, w$. Соотношения (3.3) верны для функции $\varphi(n)$ произвольного вида, но ниже в конкретных приложениях (если не оговорено особо) всюду полагается $\varphi(n) = 1$, т.е. рассматривается среда с кубичной нелинейностью.

Процедура сужения найденной группы (3.3) на решении краевой задачи для получения РГ-симметрий, заключающаяся в проверке условий инвариантности этого решения относительно РГ-оператора, налагает ограничения на вид функций F^i и G^i . Они не являются произвольными, но выбираются таким образом, чтобы соотношения

$$f = 0, \quad g = 0, \quad (3.5)$$

имеющие вид дифференциальных связей (в частном случае – просто алгебраических соотношений), обращались в тождества на искомом решении краевой задачи и удовлетворяли при $\tau = 0$ заданным краевым данным (2.2), которые на языке переменных (τ, χ) формулируются следующим образом:

$$w = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \chi = H(n). \quad (3.6)$$

Если при этом функции $F^i, G^i, i \geq 1$, также равны нулю, то краевые данные налагают ограничения только на вид функций F^0 и G^0 . Особый интерес представляют функции f^0 и g^0 такого вида, при котором ряды (3.2) обрываются при некотором конечном значении $i = i_{\max}$ и превращаются в конечную сумму. В качестве примера приведем следующий оператор РГ-симметрии:

$$\begin{aligned} R &= \left(2n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - 2nw(\chi_1 + n\chi_2) + \frac{a}{2}nw^2\tau_2 \right) \partial_\tau + \\ &+ \left(2n(1-n)\chi_2 + (2-3n)\chi_1 + aw \left(2n\tau_2 + \tau_1 \right) + \frac{aw^2}{2}(n\chi_2 + \chi_1) \right) \partial_\chi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

который является оператором симметрии Ли–Беклунда второго порядка для ДУ (2.3). Координаты f и g оператора (3.7) имеют вид биномов $f = f^0 + af^1$ и $g = g^0 + ag^1$. Прямой подстановкой в (3.3) явных выражений для f^0, g^0 и f^1, g^1 легко проверить, что все последующие приближения с $i \geq 2$ обращаются в нуль, т.е. (3.7) дает точное выражение для оператора РГ-симметрии. Эта симметрия порождает решение краевой задачи (см. ниже формулу (4.1)) с граничным условием $N = \text{ch}^{-2}(x)$, полностью определяемым видом функции g^0 .

Другим примером оператора РГ-симметрии с координатами f и g в виде биномов $f = f^0 + af^1$ и $g = g^0 + ag^1$ является следующий оператор:

$$\begin{aligned} R = & \left(n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - nw \left(\frac{5}{4}\chi_1 + n\chi_2 \right) + \frac{a}{4}nw^2\tau_2 \right) \partial_\tau + \\ & + \left(n(1-n)\chi_2 + (1-2n)\chi_1 - \frac{1}{4}\chi + aw \left(n\tau_2 + \frac{3}{4}\tau_1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{aw^2}{4}(n\chi_2 + \chi_1) \right) \partial_\chi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Он также является оператором симметрии Ли–Беклунда второго порядка для (2.3). Симметрия (3.8) порождает решение краевой задачи (см. ниже формулу (4.2)) с более сложными граничными условиями, которые выражаются через полные эллиптические интегралы

$$H(n) = \frac{2}{1+\sqrt{n}} \left(K \left(\frac{2n^{1/4}}{1+\sqrt{n}} \right) - \frac{6}{\pi} K \left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \right) \right).$$

При произвольных краевых данных, т.е. при произвольной функции $H(n)$ в (3.6), ряды (3.2) не обрываются, однако и в этом случае можно ограничиться конечным числом членов ряда при условии малости параметра нелинейности a . Учет малого параметра, по существу, означает, что при нахождении РГ-симметрий используется алгоритм приближенной группы [13]. При этом из исходной системы ДУ выделяется более простая подсистема, которая получается из (2.3) отбрасыванием второго слагаемого во втором уравнении:

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0, \quad \chi_w = 0. \quad (3.9)$$

В отличие от уравнений (2.3), допускающих лишь конечную группу неточных симметрий заданного порядка, симметрия уравнений (3.9) бесконечномерна и характеризуется произвольной зависимостью координат $f = f^0$ и $g = g^0$ канонического оператора группы (3.1) от всех своих аргументов. При малом значении параметра a симметрия уравнений (3.9) наследуется системой уравнений (2.3) в любом конечном порядке по параметру a . При этом вид наследуемой симметрии (т.е. вид функций f и g) целиком определяется соотношениями (3.3): она может быть как точечной, так и симметрией Ли–Беклунда. Процедура сужения найденной приближенной группы на решении краевой задачи завершает построение искомым РГ-симметрий.

Произвольная зависимость функций F^0, G^0 от своих аргументов позволяет конструировать приближенные РГ-симметрии для любого вида краевых данных (2.2). В качестве примера приведем оператор РГ-симметрии для лазерного пучка с плоским фазовым фронтом и гауссовым распределением интенсивности на границе $\tau = 0$ среды (гауссов пучок):

$$H(n) = (\ln(1/n))^{1/2}. \quad (3.10)$$

Такому краевому условию соответствует, в частности, следующий выбор функций f^0, g^0 :

$$f^0 = 1 + 2n\chi\chi_1, \quad g^0 = 0. \quad (3.11)$$

В этом случае точечная приближенная РГ-симметрия восстанавливается с помощью формул (3.3) и в следующем порядке по параметру нелинейности имеет вид

$$R = -2\chi\partial_w + 2a\tau\partial_n + \left(1 + \frac{a\tau^2}{n}\right)\partial_\tau. \quad (3.12)$$

Проведенные выше построения РГ-симметрий легко обобщаются на случай, когда наряду с “естественными” переменными задачи в групповых преобразованиях участвует также параметр нелинейности a . При этом, как правило, происходит расширение набора возможных РГ-симметрий. Ограничиваясь для наглядности группой точечных преобразований, запишем соотношения, определяющие вид оператора приближенной группы для системы ДУ (2.3) при $\varphi = 1$ с учетом преобразования параметра a :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^4 X_i + \sum_{i=1}^2 C^i X_{i+4}, \\ X_1 &= \frac{aw^2}{2n} J_\chi^1 \partial_w - a \left(\frac{\tau}{n} J_\chi^1 + w J_n^1 \right) \partial_\chi + \\ &\quad + \left(J^1 - \frac{a\tau^2}{2n} J_{\chi\chi}^1 - \frac{anw^2}{2} J_{nn}^1 - anw\tau \left(\frac{1}{n} J_\chi^1 \right)_n \right) \partial_\tau, \\ X_2 &= \left(J^2 - \frac{anw^2}{2} J_{nn}^2 - \frac{a\tau^2}{2n} J_{\chi\chi}^2 - aw\tau J_{n\chi}^2 \right) \partial_w - \\ &\quad - a(\tau J_\chi^2 + nw J_n^2) \partial_n - \frac{a\tau^2}{2n} J_\chi^2 \partial_\tau, \\ X_3 &= \left(nw I_n^1 - \frac{anw^3}{6} (n I_n^1)_{nn} \right) \partial_\tau + \left(I^1 - \frac{aw^2}{2} (n I_n^1)_n \right) \partial_\chi, \\ X_4 &= \frac{aw^3}{6} \chi I_n^2 \partial_w + \left(\chi I^2 - aw\tau I_n^2 - \frac{aw^2}{2} \chi (n I_n^2)_n \right) \partial_\chi + \\ &\quad + \left(nw \chi I_n^2 + \tau I^2 - \frac{anw^3}{6} \chi (n I_n^2)_{nn} - \frac{anw^2}{2} \tau I_{nn}^2 \right) \partial_\tau, \\ X_5 &= w \partial_w + 2n \partial_n + \tau \partial_\tau, \quad X_6 = w \partial_w - 2a \partial_a + \tau \partial_\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $J^i(n, \chi)$ и $I^i(n)$ – произвольные функции своих аргументов, C^i – произвольные постоянные. Сужение группы (3.13) на решении краевой задачи (2.2), (2.3) приводит к двум соотношениям, характеризующим связь между функциями $J^i(n, \chi)$, $I^i(n)$ и постоянными C^i . При $w = 0$, $\tau = 0$ эти соотношения принимают следующий вид:

$$J^1 - (n\chi_n)J^2 = 0, \quad I^1 + H(n)I^2 - 2(nH_n)C^1 = 0, \quad (3.14)$$

причем в первом из них произведение $(n\chi_n)$ должно быть выражено в терминах переменных n и χ с учетом краевых данных (2.2), т.е. $(n\chi_n) = h(n, \chi)$. Подстановка связей (3.14) в (3.13) дает искомую РГ-симметрию, характеризующую четырем РГ-операторами,

$$R = \sum_{i=1}^2 R_i + \sum_{i=1}^2 C^i R_{i+2}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \left[J^2 + a \left(\frac{w^2}{2n} (hJ^2)_\chi - \frac{nw^2}{2} J_{nn}^2 - \frac{\tau^2}{2n} J_{\chi\chi}^2 - \tau w J_{n\chi}^2 \right) \right] \partial_w - \\
 &\quad - a (wn J_n^2 + \tau J_\chi^2) \partial_n - a \left[w (hJ^2)_n + \frac{\tau}{n} (hJ^2)_\chi \right] \partial_\chi + \\
 &\quad + \left[hJ^2 - a \left(\frac{nw^2}{2} (hJ^2)_{nn} + \frac{\tau^2}{2n} ((hJ^2)_{\chi\chi} + J_\chi^2) + nw\tau \left(\frac{hJ^2}{n} \right)_n \right) \right] \partial_\tau, \\
 R_2 &= a \frac{w^3}{6} I_n^2 \partial_w + \left(\tau I^2 + nw (\chi I_n^2 - (HI^2)_n) - \right. \\
 &\quad \left. - a \left(\frac{nw^2}{2} \tau I_{nn}^2 + \frac{nw^3}{6} (\chi (nI_n^2)_{nn} - (n(HI^2)_n)_{nn}) \right) \right) \partial_\tau + \\
 &\quad + \left[(\chi - H) I^2 - a \left[\tau w I_n^2 + \frac{w^2}{2} (\chi (nI_n^2)_n - (n(HI^2)_n)_n) \right] \right] \partial_\chi, \\
 R_3 &= w \partial_w + 2n \partial_n + \tau \partial_\tau + \left(2nw (nH_n)_n - a \frac{nw^3}{3} (n(nH_n)_n)_{nn} \right) \partial_\tau + \\
 &\quad + (2(nH_n)_n - aw^2 (n(nH_n)_n)_n) \partial_\chi, \\
 R_4 &= w \partial_w - 2a \partial_a + \tau \partial_\tau.
 \end{aligned}$$

Как следует из этих формул, учет преобразований параметра a расширяет группу точечных РГ-симметрий, задаваемую операторами R_1 , R_2 и R_3 , еще на один оператор R_4 . Будучи полученным в рамках алгоритма приближенной группы, этот оператор тем не менее является оператором точной РГ-симметрии при произвольном значении параметра a и произвольных краевых данных (доказательство этого утверждения приведено в приложении 1). Полученный набор РГ-операторов R_i содержит точечные РГ-симметрии, порождаемые формулами (3.3). Так, например, для гауссова пучка оператор РГ-симметрии (3.12) следует из формулы для оператора R_1 при $h(n, \chi) = -(1/2\chi)$ и $J^2 = -2\chi$.

В обсуждавшихся выше примерах РГ-симметрии в рамках упомянутого подхода [3, 4] получались при сужении приближенной группы преобразований, допускаемой исходным РГ-многообразием, на решении краевой задачи. Дальнейшим развитием этого подхода служит рассматриваемый ниже простой пример построения РГ-симметрий, когда процедура сужения (т.е. “привязка” к решениям определенного вида) частично выполняется на этапе решения определяющих уравнений группы, и в этом смысле получаемая симметрия не является симметрией исследуемой системы ДУ в классическом понимании, но, как следует из дальнейшего, также позволяет получить информацию о структуре решения краевой задачи.

Воспользуемся тем фактом, что искомое решение краевой задачи (2.2)–(2.3) формально можно представить в виде ряда (см. приложение 1)

$$\begin{aligned}
 \tau &= w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (aw^2)^k (n\partial_{nn})^k (nH_n), \\
 \chi &= H + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (aw^2)^k \partial_n (n\partial_{nn})^{k-1} (nH_n).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Для симметричного распределения интенсивности пучка на границе среды $N(x) = N(-x)$ очевидно, что эта симметрия сохраняется и в дальнейшем, т.к. уравнения (2.3)

допускают преобразование отражения $\chi \rightarrow -\chi$, $w \rightarrow -w$. Это означает, что на оси пучка фазовый фронт не искривляется: $w = 0$ при $x = 0$. Прямым дифференцированием формул (3.16) можно убедиться в том, что на оси пучка производные τ_a и χ_a также тождественно обращаются в нуль (при этом производные τ_w и χ_w отличны от нуля!). Воспользуемся этим обстоятельством и при решении определяющих уравнений будем считать выполненными следующие дополнительные условия:

$$\partial_a \chi = \partial_a \tau = 0. \quad (3.17)$$

В результате получим группу точечных преобразований

$$X = \sum_{k=1}^6 C_k(a) X_k + X_\infty + Y_\infty \quad (3.18)$$

с общим элементом, представляемым в виде суммы шести операторов конечной подгруппы:

$$\begin{aligned} X_1 &= 2(n\chi - aw\tau)\partial_w - 2an(\tau + w\chi)\partial_n + 2a^2(\tau - w\chi)\partial_a - a\tau^2\partial_\tau, \\ X_2 &= \tau\partial_w + n\chi\partial_n + a\chi\partial_a, \quad X_3 = w\partial_w - 2a\partial_a - \chi\partial_\chi, \quad X_4 = \tau\partial_\tau + \chi\partial_\chi, \\ X_5 &= aw^2\partial_w - 4a^2w\partial_a + 2n\chi\partial_\tau - 2a(\tau + w\chi)\partial_\chi, \\ X_6 &= aw^3\partial_w - 6a^2w^2\partial_a + 6n(\tau + w\chi)\partial_\tau + (6n\chi - 6aw\tau - 3aw^2\chi)\partial_\chi, \end{aligned}$$

и двух операторов бесконечной подгруппы:

$$X_\infty = \xi_1\partial_w + n\xi_2\partial_n + a\xi_2\partial_a, \quad Y_\infty = \eta_1\partial_\tau + \eta_2\partial_\chi,$$

где функции $\xi_k(w, n, a)$ и $\eta_k(w, n, a)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют двум парам уравнений

$$\begin{aligned} a(\xi_1)_n + (\xi_2)_w &= 0, & (\xi_1)_w - n(\xi_2)_n &= 0; \\ a(\eta_1)_n + (\eta_2)_w &= 0, & (\eta_1)_w - n(\eta_2)_n &= 0. \end{aligned}$$

Сужение этой группы на решении краевой задачи (2.2)–(2.3) дает связь между координатами операторов ξ и η при произвольных значениях w и, следовательно, при $w = 0$ и $\tau = 0$, когда величина χ определяется краевым условием (3.6):

$$\begin{aligned} -2n^2 H H_n C^1 + 2n H C^5 + \eta_1(0, n, a) - n H_n \xi_1(0, n, a) &= 0, \\ -n H H_n C^2 + H(C^4 - C^3) + 6n H C^6 + \eta_2(0, n, a) - n H_n \xi_2(0, n, a) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для гауссова пучка с граничным условием (3.10) соотношения (3.19), в частности, выполняются при следующих отличных от нуля значениях входящих в (3.19) функций:

$$C^2 = 2, \quad \eta_2 = -1, \quad (3.20)$$

которым соответствует оператор РГ-симметрии

$$R = 2\tau\partial_w + 2n\chi\partial_n + 2a\chi\partial_a - \partial_\chi. \quad (3.21)$$

Можно надеяться, что получаемая при таком подходе группа описывает симметрию семейства решений краевых задач (2.3)–(2.2) с $N(x) = N(-x)$, по крайней мере, при достаточно малых χ , т.е. в приосевой области.

3.2. РГ-симметрии для трехмерного пучка: $m = 1$. Для трехмерного лазерного пучка с $m = 1$ построение РГ-симметрий сужением группы вида (3.1)–(3.2), допускаемой системой ДУ (2.4), выполняется аналогично рассмотренному выше. При этом координаты f^0 и g^0 по-прежнему даются формулами (3.3), однако выражения для координат оператора f^i и g^i при $i \geq 1$ возникают в результате более сложных вычислений³⁾. Ниже мы приведем явные формулы лишь для координат f^1 и g^1 в частном случае среды с кубической нелинейностью ($\varphi = 1$):

$$\begin{aligned} f^1 &= F^1 + \int dw \{ \widehat{Z} f^0 + n Y g^0 \}, \\ g^1 &= G^1 - \frac{nw\chi_1^2}{\chi^2} g^0 + 2 \frac{nw\chi_1}{\chi} Y g^0 + \int dw \{ \widehat{Z} g^0 - Y f^0 \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь

$$\widehat{Z} = Z - w \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{n\chi_1^2}{\chi} \right)_s \partial_{\chi_s},$$

$F^1(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ и $G^1(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$, как и ранее, – произвольные функции своих аргументов, а выражения в фигурных скобках перед интегрированием по переменной w должны быть записаны в переменных $\tilde{\tau}_s, \chi_s, n, w$.

Из формул (3.22) следует, что симметрия f^0 и g^0 в первом порядке по малому параметру a наследуется системой ДУ (2.4) с $m = 1$ как приближенная. В частности, задавая координаты f^0 и g^0 в виде (3.11), получим точечную РГ-симметрию для трехмерного гауссова пучка с краевыми данными (3.10)

$$R = -2\chi\partial_w + 4a\tau\partial_n + \left(1 + 2\frac{a\tau^2}{n} \right) \partial_\tau. \quad (3.23)$$

Видно, что в сравнении со случаем плоского пучка (3.12) коэффициенты при параметре нелинейности a отличаются вдвое.

Как и в двумерном варианте, вовлечение параметра нелинейности a в групповые преобразования расширяет набор РГ-симметрий. Соответствующий оператор приближенной группы приведен в приложении 2. Сужение этой группы на решении краевой задачи с учетом граничных условий (3.6) порождает четыре оператора, аналогичных операторам РГ-симметрий (3.15) для двумерного пучка. Отметим, что последний из операторов в списке (3.15) является оператором РГ-симметрии также и для трехмерного пучка. Ввиду громоздкости получающихся формул ниже приводится явное выраже-

³⁾ Существенным подспорьем при проведении подобных вычислений РГ-симметрий является использование систем компьютерной алгебры. При получении части результатов данной работы и для контроля аналитических вычислений при нахождении точечных симметрий использовался пакет DIMSYM [14].

ние лишь для первого из РГ-операторов:

$$\begin{aligned}
 R_1 = & \left\{ J^2 + a \left[\frac{\tau^2}{2n\chi^2} (J^2 - \chi^2 J_{\chi\chi}^2 - \chi J_\chi^2) - \frac{w\tau}{\chi} (\chi J_{n\chi}^2 - J_n^2) - \frac{nw^2}{2} J_{nn}^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{w}{2n} \left(w + \frac{2\tau}{\chi} \right) (hJ^2)_\chi \right] \right\} \partial_w - a \left(\frac{\tau}{\chi} (J^2 + \chi J_\chi^2) + nw J_n^2 \right) \partial_n + \\
 & + \left\{ hJ^2 - a \left[\frac{w\tau}{n} (n(hJ^2)_{n\chi} - (hJ^2)_\chi) + \frac{\tau^2}{2n\chi} (\chi(hJ^2)_{\chi\chi} - (hJ^2)_\chi - J^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \chi J_\chi^2 + 2nJ_n^2) + \frac{nw^2}{2} (hJ^2)_{nn} \right] \right\} \partial_\tau - \frac{a}{n} (\tau(hJ^2)_\chi + wn(hJ^2)_n) \partial_\chi. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Здесь, как и в формулах (3.15), $J^2(n, \chi)$ является произвольной функцией своих аргументов, а функция $h(n, \chi) = (n\chi_n)$ выражается в терминах переменных n и χ с учетом краевых данных (2.2). Так, например, полагая в (3.24) $J^2 = -2\chi$ и выбирая $h(n, \chi) = -(1/2\chi)$, что соответствует гауссову пучку с граничным условием (3.10), приходим к уже полученному выше оператору (3.23). Для того же значения функции J^2 , но при $h(n, \chi) = -(n/2\chi)$, что отвечает пучку с параболическим начальным профилем интенсивности с $H(n) = \sqrt{1-n}$, оператор РГ-симметрии (3.24) принимает вид

$$R = -2\chi\partial_w + 4a\tau\partial_n + n \left(1 + \frac{2a\tau^2}{n^2} \right) \partial_\tau - aw\partial_\chi. \quad (3.25)$$

Прямой подстановкой выражений для координат этого оператора в определяющие уравнения группы можно убедиться в том, что найденная РГ-симметрия является точной, т.е. применима при произвольном значении параметра a , а порожаемое этой симметрией решение краевой задачи также является точным и описывает известный факт: лучи параболического пучка сходятся в точку (см., например, [5]).

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Процедура построения решений краевой задачи на основе РГ-симметрий использует условия инвариантности (3.5) этих решений относительно соответствующих РГ-операторов. В том случае, когда функции f и g представляют точную РГ-симметрию, решение уравнений (2.3), (3.5) с учетом краевых данных (3.6) дает единственное точное решение краевой задачи (хотя число операторов РГ-симметрий, связанных с данным частным решением, может быть произвольным и в принципе бесконечным). Такая ситуация реализуется, например, для РГ-симметрии (3.7), использование которой приводит к известному точному решению [5] краевой задачи для пучка с начальным профилем распределения интенсивности в форме солитона $N = \text{ch}^{-2}(x)$ (см. также [11]):

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{n\sqrt{2a}} \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}, \quad q = \frac{v^2}{4a} + n - 1, \\
 x &= vt - \frac{1}{2} \ln \frac{v/\sqrt{2a} + \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}}{-v/\sqrt{2a} + \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Другой пример решения краевой задачи, основанный на использовании точной РГ-симметрии (3.8), отвечает начальному распределению интенсивности пучка в виде “сглаженной” ступеньки и дается формулами

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{n\sqrt{a}} \left[\left(\frac{qk_1}{2} K(k_1) - \frac{2}{k_1} E(k_1) - \frac{6}{\pi k_1} (2E(k_2) - k_1^2 K(k_2)) \right) \frac{F(\vartheta, k)}{\sqrt{q_2}} - \right. \\ &\quad \left. - k_1 \left(K(k_1) - \frac{6}{\pi} K(k_2) \right) \left(\sqrt{q_2} E(\vartheta, k) - \frac{((q_2 - \sqrt{n})(\sqrt{n} - q_1))^{1/2}}{n^{1/4}} \right) \right], \\ x &= vt + \frac{k_1}{n^{1/4}} \left(K(k_1) - \frac{6}{\pi} K(k_2) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} q &= n^{-1/2} \left(1 + n + \frac{v^2}{4a} \right); \quad k = \sqrt{\frac{q_2 - q_1}{q_2}}, \quad k_1 = \frac{2}{\sqrt{q+2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{q-2}{q+2}}, \\ 2q_{1,2} &= q \mp \sqrt{q^2 - 4}; \quad \vartheta = \arcsin \left[(q_2/\sqrt{n})(\sqrt{n} - q_1)(q_2 - \sqrt{n}) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

и использована стандартная форма записи для неполных $F(\vartheta, k)$, $E(\vartheta, k)$ и полных $K(k)$, $E(k)$ эллиптических интегралов первого и второго родов.

Построенные по формулам (4.1) и (4.2) графики зависимости функций $v(x)$ и $n(x)$ при различных значениях координаты t приведены на рис. 1 для $a = 1/10$ (сплошные линии) и рис. 2 для $a = 1$.

В общем случае произвольных краевых данных, когда при записи координат оператора РГ-симметрии ограничиваются конечным числом слагаемых бесконечного ряда (3.2), условия инвариантности (3.5), равно как и получающиеся из них с учетом исходных уравнений (2.3) и граничных условий (3.6) решения, являются приближенными. При этом разные формы операторов РГ-симметрий для одной и той же краевой задачи дают, вообще говоря, разные приближенные решения. Для иллюстрации этого утверждения ниже приводятся два приближенных аналитических решения краевой задачи (2.1)–(2.2) для гауссова пучка. Первое из этих решений порождается оператором РГ-симметрии (3.12), для которого условия инвариантности (3.5) с учетом (2.3) записываются в виде пары ДУ в частных производных:

$$\chi\chi_w - a\tau\chi_n = 0, \quad 2\chi\tau_w - 2a\tau\tau_n + 1 + a\tau^2/n = 0. \quad (4.3)$$

Их решение, подчиняющееся условию (3.6), дает приближенное аналитическое решение краевой задачи:

$$x^2 = (ant^2 - \ln n) \left[1 - P(\sqrt{ant^2}) \right]^2, \quad v = -\frac{x}{t} \frac{P(\sqrt{ant^2})}{\left[1 - P(\sqrt{ant^2}) \right]}, \quad (4.4)$$

где функция $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = 2ze^{-z^2/2} \int_0^z dt e^{t^2/2}.$$

Рис. 1. Графики функций $v(x)$ и $n(x)$ для $N(x) = \text{ch}^{-2}(x)$, построенные при $a = 1/10$ для различных значений координаты t : 1 – $t = 0.40$; 2 – $t = 1.00$; 3 – $t = 1.58$; 4 – $t = 1.80$. Сплошные кривые относятся к точному решению (4.1) (или (4.8)), а штриховые – к приближенному решению (4.9).

Второе приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.1)–(2.2) возникает при использовании оператора РГ-симметрии (3.21), для которого условие инвариантности (3.5) с учетом (2.3) также записывается в виде двух ДУ в частных производных первого порядка:

$$a\chi\tau_a + n\chi\tau_n + \tau\tau_w = 0, \quad 1 + 2a\chi\chi_a + 2n\chi\chi_n + 2\tau\chi_w = 0. \quad (4.5)$$

Из этих уравнений получается следующее решение краевой задачи:

$$x^2 = (1 - 2ant^2)^2 \ln \frac{1}{n(1 - ant^2)}, \quad v = -\frac{2xant}{1 - 2ant^2}, \quad (4.6)$$

Рис. 2. Графики функций $v(x)$ и $n(x)$ для $N(x)$ в виде “сглаженной” ступеньки, построенные по формулам (4.2) при $a = 1$ для различных значений координаты t : 1 – $t = 0.1$; 2 – $t = 1.5$; 3 – $t = 1.9$.

удовлетворяющее заданным краевым данным и условию отсутствия фазовых искажений на оси пучка. При подстановке полученных приближенных формул (4.6) в исходные уравнения (2.3) возникают выражения, которые тождественно обращаются в нуль при $x = 0$. Это означает, что для произвольных значений параметра нелинейности a формулы (4.6) точно описывают изменение интенсивности $n(t, 0)$ на оси пучка, которое при этом дается формулой

$$n(t, 0) = \frac{1}{2at^2} (1 - \sqrt{1 - 4at^2}). \quad (4.7)$$

Максимального значения $n_{\max} = 2$ интенсивность пучка достигает при $t_{\max} = 1/(2\sqrt{a})$. Построенные по формулам (4.6) графики зависимостей функций v и n от x при различных значениях координаты t для $a = 1/10$ приведены на рис. 3 (сплошные кривые).

Рис. 3. Графики функций $v(x)$ и $n(x)$ для $N(x) = \exp(-x^2)$, построенные при $a = 1/10$ для различных значений координаты t : $1 - t = 0.40$; $2 - t = 1.00$; $3 - t = 1.58$; $4 - t = 1.80$. Сплошные кривые относятся к приближенному решению (4.6), а штриховые – к приближенному решению (4.4).

Для оценки точности результатов ниже проводится сравнение двух пар приближенных и точных аналитических решений, возникающих при использовании различных РГ-симметрий. Вначале рассмотрим пару решений, задаваемых формулами

$$v = -2ant \operatorname{th}(x - vt), \quad an^2 t^2 = n \operatorname{ch}^2(x - vt) - 1; \quad (4.8)$$

$$v = -2ant \operatorname{th}(x - vt), \quad ant^2 = \operatorname{ch}^2(x - vt) \ln(n \operatorname{ch}^2(x - vt)). \quad (4.9)$$

Первая из них дает представленное в другом виде точное решение (4.1) с граничным условием $N = \operatorname{ch}^{-2}(x)$, а вторая соответствует приближенному решению с тем же гра-

ничным условием. Это решение порождается приближенной РГ-симметрией

$$R = \left(1 + \frac{a\tau^2}{n \operatorname{ch}^2(\chi)}\right) (\partial_\tau - 2 \operatorname{th}(\chi) \partial_w) + \frac{2a\tau}{\operatorname{ch}^2(\chi)} \partial_n, \quad (4.10)$$

которая возникает в первом приближении по a из формул (3.3) при следующем выборе функций f^0 и g^0 :

$$f^0 = 1 + 2n \operatorname{th}(\chi) \chi_1, \quad g^0 = 0. \quad (4.11)$$

Построенные по формулам (4.8) (или (4.1), что то же самое) и (4.9) графики зависимостей v и n от x при различных значениях t приведены на рис. 1 для $a = 1/10$. Сравнение этих графиков свидетельствует о хорошем совпадении точного (сплошные линии) и приближенного (штриховые линии) решений в периферийной области пучка, а их расхождение наблюдается лишь в приосевой области, причем при тех значениях t , когда возникает особенность решения. Положение точки на оси пучка, в которой возникает особенность решения (т.е. обращается в бесконечность производная n_x), и значение интенсивности пучка в этой точке для точного и приближенного решений даются формулами

$$t_{\max} = 1/2\sqrt{a}, \quad n_{\max} = 2, \quad (4.12)$$

$$t_{\text{approx}} = 1/\sqrt{ae}, \quad n_{\text{approx}} = e. \quad (4.13)$$

Таким образом, по сравнению с точным приближенное решение (4.9) дает смещенное в глубь среды положение точки фокуса и увеличенное значение максимальной интенсивности пучка, хотя качественный характер изменения величин n и v при этом сохраняется.

Отмеченные особенности наблюдаются и при сравнении другой пары решений, полученных для гауссова пучка. На рис. 3 приведены построенные по формулам (4.4) (штриховые линии) и (4.6) (сплошные линии) графики зависимостей v и n от x при различных значениях координаты t для $a = 1/10$. Совпадение этих графиков вдали от оси пучка указывает на возможность использования формул (4.6) во всей области изменения переменной x . На оси пучка приближенное решение (4.4) дает такое же смещение положения точки фокуса и увеличение значения интенсивности гауссова пучка (4.12), как и приближенное решение (4.9) с другим граничным условием. При этом значения величин $t_{\max}$ и $n_{\max}$ для решений (4.1) и (4.6) совпадают.

Зависимости, характеризующие пространственное распределение функций v и n для трехмерного пучка, получаются аналогичным образом. Например, оператор РГ-симметрии (3.25) дает приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.4), (2.2), получающееся из (4.4) заменой $a \rightarrow 2a$ и $P \rightarrow P/2$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе при построении решений краевой задачи для уравнений нелинейной геометрической оптики использовался подход, основанный на РГ-симметрии. Позволяя воспроизвести уже известные точные решения (см., например, [5]) и дополнить

их новыми аналитическими результатами, такой подход обладает рядом привлекательных черт. К ним в первую очередь можно отнести возможность получения при произвольных (гладких) краевых данных приближенных, а для краевых данных специального вида и точных аналитических выражений для пространственного распределения интенсивности пучка n и производной эйконала v . Другим достоинством этого подхода является возможность дальнейшего уточнения полученных приближенных решений, например, путем последовательного учета следующих, более высоких по степеням параметра a , вкладов в формулах для РГ-симметрий и построения соответствующих решений. Обсуждаемый подход остается применимым при изменении математической модели, используемой для описания процесса распространения светового пучка, например с целью учета дифракционных эффектов или нестационарности процесса, при переходе к цилиндрической геометрии т.д. Иллюстрацией этого утверждения служат формулы (3.3), (3.22) для операторов приближенной симметрии, получаемые в рамках единого метода как в плоской, так и в цилиндрической геометрии. В этом смысле использование преобразования годографа в плоской геометрии является удобной, но не обязательной процедурой для построения РГ-симметрий: они могут быть найдены и в рамках исходных уравнений (2.1).

Найденные аналитические решения (точные и приближенные) и РГ-симметрии можно в дальнейшем использовать для построения новых РГ-симметрий. Один из вариантов такого использования заключается в подстановке полученных решений в формулы, определяющие точечные РГ-симметрии по известному решению краевой задачи (см. приложение 1, формулы (П1.3)). С другой стороны, равенство нулю координат канонических операторов, задающих РГ-симметрии, можно рассматривать как дифференциальные связи, автоматически учитывающие краевые данные (2.2). Тогда поиск новых РГ-симметрий сводится к исследованию симметрий (точных или приближенных) системы уравнений, объединяющей исходные ДУ и соответствующие дифференциальные связи (подробнее об этом способе см. в [3, 4]).

Автор выражает благодарность проф. Д. В. Ширкову за постоянную поддержку и обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 96-01-00195 и частично проект № 96-01-01297).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Точечная РГ-симметрия двумерного пучка

В этом приложении приводятся РГ-симметрии для двумерного пучка при $\varphi = 1$, возникающие при сужении на решении краевой задачи бесконечной точечной группы симметрии, допускаемой дифференциальным многообразием (2.3),

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{i=1}^5 C^i(a) X_i + X_\infty, & (\text{П1.1}) \\
 X_1 &= \tau \partial_\tau + \chi \partial_\chi, & X_2 &= \tau \partial_\tau + w \partial_w + 2n \partial_n, \\
 X_3 &= \left(n - \frac{aw^2}{4} \right) \partial_w - awn \partial_n - \frac{n\chi}{2} \partial_\tau + \frac{a}{2} (\tau + w\chi) \partial_\chi, \\
 X_4 &= \partial_w, & X_5 &= w \partial_w - 2a \partial_a + \tau \partial_\tau,
 \end{aligned}$$

$$X_\infty = \xi^1(w, n, a)\partial_\tau + \xi^2(w, n, a)\partial_\chi.$$

Здесь $C^i(a)$ — произвольные функции параметра нелинейности a , а функции ξ^1, ξ^2 удовлетворяют линейным уравнениям, формально совпадающим⁴⁾ с уравнениями (2.3) при $\varphi(n) = 1$:

$$\xi_w^1 - n\xi_n^2 = 0, \quad \xi_w^2 + a\xi_n^1 = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Условие обращения в нуль координат канонического оператора группы, вычисленных на решении краевой задачи $(\mathcal{T}(w, n, a), \mathcal{H}(w, n, a))$, устанавливает связь между координатами оператора (П1.1):

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -\sum_{i=1}^5 C^i A^i(w, n, a), & \xi^2 &= -\sum_{i=1}^5 C^i B^i(w, n, a), \\ A^1 &= \mathcal{T}, & A^2 &= \mathcal{T} - w\mathcal{T}_w - 2n\mathcal{T}_n, \\ A^3 &= -\frac{n\mathcal{H}}{2} + awn\mathcal{T}_n - \left(n - \frac{aw^2}{4}\right)\mathcal{T}_w, \\ A^4 &= -\mathcal{T}_w, & A^5 &= \mathcal{T} - w\mathcal{T}_w + 2a\mathcal{T}_a, \\ B^1 &= \mathcal{H}, & B^2 &= -w\mathcal{H}_w - 2n\mathcal{H}_n, \\ B^3 &= \frac{a}{2}(\mathcal{T} + w\mathcal{H}) + awn\mathcal{H}_n - \left(n - \frac{aw^2}{4}\right)\mathcal{H}_w, \\ B^4 &= -\mathcal{H}_w, & B^5 &= -w\mathcal{H}_w + 2a\mathcal{H}_a, \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

и сужает бесконечную группу (П1.1) до пятимерной точечной ренормгруппы со следующими операторами РГ-симметрии:

$$R \equiv \sum_{i=1}^5 C^i(a)R_i = \sum_{i=1}^5 C^i(a)(X_i - A^i\partial_\tau - B^i\partial_\chi). \quad (\text{П1.4})$$

Соотношения (П1.3) справедливы при всех значениях w и n , в том числе и при $w = \mathcal{T} = 0$, когда зависимость $\mathcal{H}(n)$ дается краевым условием (3.6). При этом краевые условия для $\xi^1(0, n, a)$, $\xi^2(0, n, a)$ записываются с помощью (2.3) через $A^i(0, n, a)$, $B^i(0, n, a)$ следующим образом:

$$\xi^1(0, n, a) = -C^3\left(\frac{nH}{2} + n^2H_n\right) - C^4nH_n, \quad \xi^2(0, n, a) = C^1H - 2C^2nH_n. \quad (\text{П1.5})$$

Полагая $C^i = 0$ при $i = 1, \dots, 4$, получим нулевые значения для $\xi^1(0, n, a)$ и $\xi^2(0, n, a)$ и соответствующее им нулевое тривиальное решение уравнений (П1.2): $\xi^1 \equiv 0$ и $\xi^2 \equiv 0$. Возникающий при этом оператор РГ-симметрии совпадает с последним оператором в

⁴⁾ Это означает, что если трактовать функции $(\mathcal{T}(w, n, a), \mathcal{H}(w, n, a))$, задающие решение уравнений (2.3), как координаты ξ^1, ξ^2 оператора X_∞ , то новые решения этих уравнений могут быть построены из уже найденных простым применением операторов рекуррентности [11] (или обратных к ним).

списке (П1.4) при $A^5 = B^5 = 0$, $C^5(a) \equiv \xi(a)$ и не зависит от конкретного вида решения краевой задачи, т.е. характеризует решение для произвольных краевых данных:

$$R = \xi(a)(w\partial_w - 2a\partial_a + \tau\partial_\tau). \quad (\text{П1.6})$$

Задаваемый оператором (П1.6) набор инвариантов

$$J^1 = \tau/w, \quad J^2 = \chi, \quad J^3 = aw^2, \quad J^4 = n \quad (\text{П1.7})$$

показывает, что произвольное решение краевой задачи (2.2)–(2.3) может быть представлено в виде

$$\tau = w\hat{\tau}(n, aw^2), \quad \chi = \hat{\chi}(n, aw^2). \quad (\text{П1.8})$$

В частности, задавая $\hat{\tau}$ и $\hat{\chi}$ в форме степенных рядов по aw^2 , приходим к решению вида (3.16).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Приближенные симметрии трехмерного пучка

В данном приложении приводятся формулы для наследуемой приближенной точечной симметрии, допускаемой уравнениями (2.4) для трехмерного пучка $m = 1$ при $\varphi = 1$:

$$X = \sum_{i=1}^4 X_i + \sum_{i=1}^2 C^i X_{i+4}, \quad (\text{П2.1})$$

$$\begin{aligned} X_1 &= J^1 \partial_\tau + \frac{aw}{2n} \left(w + \frac{2\tau}{\chi} \right) J_\chi^1 \partial_w - \frac{a}{n} (\tau J_\chi^1 + wn J_n^1) \partial_\chi - \\ &\quad - a \left(\frac{w\tau}{n} (n J_{n\chi}^1 - J_\chi^1) + \frac{\tau^2}{2n\chi} (\chi J_{\chi\chi}^1 - J_\chi^1) + \frac{nw^2}{2} J_{nn}^1 \right) \partial_\tau, \\ X_2 &= J^2 \partial_w - a \left(\frac{\tau}{\chi} (J^2 + \chi J_\chi^2) + nw J_n^2 \right) \partial_n - \frac{a\tau^2}{2n\chi} (J^2 + \chi J_\chi^2 - 2n J_n^2) \partial_\tau + \\ &\quad + a \left(\frac{\tau^2}{2n\chi^2} (J^2 - \chi^2 J_{\chi\chi}^2 - \chi J_\chi^2) - \frac{w\tau}{\chi} (\chi J_{n\chi}^2 - J_n^2) - \frac{nw^2}{2} J_{nn}^2 \right) \partial_w, \\ X_3 &= - \left\{ \left(w \ln \chi + 2 \frac{\tau}{\chi} \right) I^1 + 2 \ln \chi (wn I_n^1 + \tau I_\chi^1) - \right. \\ &\quad - a \left[\ln \chi \left(nw^2 \left(\frac{nw}{3} I_{nnn}^1 + \tau I_{nn\chi}^1 \right) + \tau^2 \left(w I_{n\chi\chi}^1 + \frac{\tau}{3n} I_{\chi\chi\chi}^1 \right) \right) + \right. \\ &\quad + nw^2 \left(\frac{5w}{6} \ln \chi + \frac{\tau}{\chi} (1 - 2 \ln \chi) \right) I_{nn}^1 + \\ &\quad + \left(w^2 \left(\frac{w}{6} \chi + 2\tau \right) \ln \chi + \frac{w}{\chi} \tau^2 (2 - \ln \chi) \right) I_{n\chi}^1 + \\ &\quad + \frac{\tau^2}{n} \left(\frac{w}{2} \ln \chi + \frac{\tau}{3\chi} (3 + \ln \chi) \right) I_{\chi\chi}^1 + \frac{\tau^2}{n\chi^2} \left(\frac{w\chi}{2} (\ln \chi + 2) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\tau}{3} (\ln \chi + 1) \right) I_\chi^1 + w \left(\frac{w^2}{6} (1 + \ln \chi) + 2 \frac{w\tau}{\chi} (1 - \ln \chi) - 2 \frac{\tau^2}{\chi^2} \right) I_n^1 \right] \left. \right\} \partial_w + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ -2n \ln \chi I^1 + a \left[\ln \chi (n^2 w^2 I_{nn}^1 + 2nw\tau I_{n\chi}^1 + \tau^2 I_{\chi\chi}^1) + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\tau^2}{\chi} (\ln \chi + 2) I_{\chi}^1 + nw \left(w \ln \chi + \frac{2\tau}{\chi} \right) I_n^1 \right] \Big\} \partial_n + \left\{ \tau I^1 + nw\chi \ln \chi I_n^1 + \right. \\
 & + \tau \chi \ln \chi I_{\chi}^1 - a \left[\chi \ln \chi \left(\frac{n^2 w^3}{6} \chi \ln \chi I_{nnn}^1 + \frac{nw^2}{2} \tau I_{nn\chi}^1 + \frac{\tau^3}{6n} I_{\chi\chi\chi}^1 + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{w}{2} \tau^2 I_{n\chi\chi}^1 \right) + \tau^2 \left(\frac{w}{2} (\ln \chi + 2) + \frac{2}{3\chi} \tau \ln \chi \right) I_{n\chi}^1 - \frac{\tau^2}{2n} \left(w\chi \ln \chi + \right. \\
 & + \left. \frac{\tau}{3} (\ln \chi - 3) \right) I_{\chi\chi}^1 + \frac{nw^2}{6} (2w\chi \ln \chi + 3\tau) I_{nn}^1 - \frac{\tau^2}{2n} \left(w(\ln \chi + 2) + \right. \\
 & + \left. \frac{\tau}{3} (3 \ln \chi + 5) \right) I_{\chi}^1 + \frac{2}{3\chi^2} \tau^3 I_n^1 \Big] \Big\} \partial_{\tau} + \left\{ \chi \ln \chi I^1 - a \left[w\tau (\chi \ln \chi I_{n\chi}^1 + I_n^1) + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\tau^2}{2n} (\ln \chi (\chi I_{\chi\chi}^1 + I_{\chi}^1) + 2I_{\chi}^1) + \frac{w^2}{2} \chi \ln \chi (n I_{nn}^1 + I_n^1) \right] \Big\} \partial_{\chi}, \\
 X_4 = & - \left\{ w I^2 + 2\tau I_{\chi}^2 + 2nw I_n^2 - a \left[\frac{\tau^3}{3n} I_{\chi\chi\chi}^2 + w\tau^2 I_{n\chi\chi}^2 + nw^2 \tau I_{nn\chi}^2 + \right. \right. \\
 & + \frac{n^2 w^3}{3} I_{nnn}^2 + w \left(\frac{w^2}{6} \chi + 2w\tau\chi - \frac{\tau^2}{\chi} \right) I_{n\chi}^2 + \frac{\tau^2}{6n} \left(3w + \frac{2\tau}{\chi} \right) I_{\chi\chi}^2 + \\
 & + \left(\frac{5w}{6} - \frac{2\tau}{\chi} \right) nw^2 I_{nn}^2 + \frac{\tau^2}{6n\chi} (3w\chi - 2\tau) I_{\chi}^2 + \left(\frac{w}{6} - \frac{2\tau}{\chi} \right) w^2 I_n^2 \Big] \Big\} \partial_w - \\
 & - \left\{ 2n I^2 - a \left[2nw\tau I_{n\chi}^2 + \frac{\tau^2}{\chi} (\chi I_{\chi\chi}^2 + I_{\chi}^2) + nw^2 (n I_{nn}^2 + I_n^2) \right] \right\} \partial_n + \\
 & + \left\{ \chi (nw I_n^2 + \tau I_{\chi}^2) - a \left[\frac{n^2 w^3}{6} \chi I_{nnn}^2 + \frac{w^2}{2n} \tau \chi I_{nn\chi}^2 + \frac{\tau^3}{6n} \chi I_{\chi\chi\chi}^2 - \right. \right. \\
 & - \frac{\tau^2}{2n} \left(w + \frac{\tau}{\chi} \right) I_{\chi}^2 + \frac{w\tau^2}{2} \chi I_{n\chi\chi}^2 - \frac{\tau^2}{6n} (\tau + 3w\chi) I_{\chi\chi}^2 + \\
 & + \frac{\tau^2}{6} \left(3w + \frac{4\tau}{\chi} \right) I_{n\chi}^2 + \frac{nw^3}{3} \chi I_{nn}^2 \Big] \Big\} \partial_{\tau} + \\
 & + \left\{ \chi I^2 - a \left[w\tau \chi I_{n\chi}^2 + \frac{\tau^2}{2n} (\chi I_{\chi\chi}^2 + I_{\chi}^2) + \frac{w^2}{2} (n \chi I_{nn}^2 + \chi I_n^2) \right] \right\} \partial_{\chi}, \\
 X_5 = & \tau \partial_{\tau} + 2n \partial_n + w \partial_w, \quad X_6 = \tau \partial_{\tau} - 2a \partial_a + w \partial_w.
 \end{aligned}$$

Здесь, как и в (3.13), $J^i(n, \chi)$ и $I^i(n)$ – произвольные функции своих аргументов, C^i – произвольные постоянные. Сужение группы (II.2.1) на решении краевой задачи (2.2), (2.4) порождает четыре оператора РГ-симметрии, один из которых (3.24) приведен в основной части текста.

Список литературы

- [1] *D. V. Shirkov*. Several topics on Renormgroup Theory. In: Renormalization group-91 (Proc. of 2-nd Intern. Conf. Sept. 1991, Dubna, USSR). Eds D. V. Shirkov, V. B. Priezzhev. Singapore: World Scientific, 1992. P. 1-10; *V. F. Kovalev, S. V. Krivenko, V. V. Pustovalov*. The Renormalization group method based on group analysis. In: Renormalization group-91 (Proc. of 2-nd Intern. Conf., Sept. 1991, Dubna, USSR). Eds D. V. Shirkov, V. B. Priezzhev. Singapore: World Scientific, 1992. P. 300-314.
- [2] *D. V. Shirkov*. Int. J. Mod. Phys. C. 1995. V. 6. № 6. P. 503.
- [3] *В. Ф. Ковалев, В. В. Пустовалов, Д. В. Ширков*. Групповой анализ и ренормгруппа. Сообщение ОИЯИ, Р5-95-447. Дубна: ОИЯИ, 1995.
- [4] *V. F. Kovalev, V. V. Pustovalov, D. V. Shirkov*. Group analysis and renormgroup symmetries. Preprint JINR, E5-96-209. Dubna: JINR, 1996.
- [5] *С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, А. П. Сухоруков*. ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1537.
- [6] *А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург*. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973.
- [7] *А. Б. Шварцбург*. Нестационарное распространение локализованных волновых полей в нелинейной диспергирующей среде. В кн.: Нелинейные электромагнитные волны. Ред. П. Усленги. М.: Мир, 1983. Гл. 6.
- [8] *Л. В. Овсянников*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [9] *Н. Х. Ибрагимов*. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [10] *V. F. Kovalev*. J. Nonlin. Math. Phys. 1996. V. 3. № 3-4. P. 351.
- [11] *V. F. Kovalev, V. V. Pustovalov*. Group and renormgroup symmetry of a simple model for nonlinear phenomena in optics, gas dynamics and plasma theory (представлена в Mathematical and Computer Modelling в 1995 г.).
- [12] *В. Ф. Ковалев, В. В. Пустовалов, С. И. Сенашов*. Дифф. уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1751.
- [13] *В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов*. Методы возмущений в групповом анализе. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 34. М.: ВИНТИ, 1989. С. 85-147.
- [14] *J. Sherring, G. Prince*. DIMSYM - Symmetry determination and linear differential equations package. Preprint, Department of Mathematics, La Trobe University, Melbourne, Australia, 1992.

Поступила в редакцию 6.II.1997 г.

V. F. Kovalev

RENORMGROUP SYMMETRIES IN PROBLEMS OF NONLINEAR GEOMETRICAL OPTICS

Renormgroup symmetries for a boundary value problem for the system of equations which describes propagation of a powerful radiation in a nonlinear medium in geometrical optics approximation are constructed. With the help of renormgroup symmetries new exact and approximate analytical solutions of nonlinear geometrical optics equations are obtained. Explicit analytical expressions are presented that characterize spatial evolution of a laser beam which has an arbitrary intensity dependence at the boundary of the nonlinear medium.