Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Григорян, Р. П. Григорян, И. В. Тютин, Псевдоклассические теории майорановской, вейлевской и майорана-вейлевской частиц, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 389–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:16:16

Г. В. Григорян*, Р. П. Григорян*, И. В. Тютин†
**ПСЕВДОКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ
МАЙОРАНОВСКОЙ, ВЕЙЛЕВСКОЙ
И МАЙОРАНА-ВЕЙЛЕВСКОЙ ЧАСТИЦ**

Построены псевдоклассические теории майорановской, вейлевской и майорана-вейлевской частиц в четномерных пространствах. Проведено каноническое квантование этих теорий, приводящее к квантово-механическому описанию нейтральной и вейлевской частиц в пространстве размерности $D = 2n$ и нейтральной вейлевской частицы в пространстве размерности $D = 4n + 2$. Показано, что в пространствах размерности $D = 2, 4 \pmod{8}$ описание нейтральной частицы совпадает с теоретико-полевым описанием майорановской частицы в представлении Фолди–Ваутхейзена. В пространствах размерности $D = 8k + 2$ описание нейтральной вейлевской частицы идентично теоретико-полевному описанию майорана-вейлевской частицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на огромное число работ, посвященных теориям точечных частиц, проблемы построения этих теорий и их квантования и сейчас остаются в центре внимания исследователей. В последнее время в литературе обсуждалось множество классических моделей релятивистских частиц и суперчастиц. Возобновление интереса к этим теориям в первую очередь связано с проблемами теории струн, поскольку частица является прототипом струны.

Впервые псевдоклассическое описание релятивистской спиновой частицы было дано в работах [1, 2]. За ними последовало множество работ [3–22], посвященных различным схемам квантования этой теории, введению внутренних симметрий и обобщениям этой теории на случай высших спинов частиц.

Псевдоклассическая теория вейлевской частицы при $D = 4$ построена в [23]. Метод, предложенный в этой работе, был использован в [24] для построения теории вейлевской частицы в произвольном четномерном пространстве ($D = 2n$). Здесь же было предложено квантово-механическое описание нейтральной вейлевской частицы в пространстве размерности $D = 4n + 2$ и обсуждалась связь этой теории с теорией майорана-вейлевского биспинора в квантовой теории поля (КТП) на примере пространства размерности $D = 10$.

В данной работе построены псевдоклассические теории майорановской, вейлевской и майорана-вейлевской частиц в четномерных пространствах, проведено их каноническое

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: GAGRI@VXC.YERPHY.AM; ROGRI@VXC.YERPHY.AM

†Физический институт им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия. E-mail: TYUTIN@LPL.AC.RU

квантование и выявлена связь полученных теорий с теоретико-полевыми описаниями соответствующих частиц. Это исследование интересно в связи со следующим. Как известно, модель струны Рамона–Невё–Шварца с проекцией Льюиса–Шерка–Олива (см. [25]) является суперсимметричной теорией в десятимерном пространстве. Суперсимметрия теории требует, чтобы каждый массовый уровень образовывал супермультиплет. В безмассовом секторе суперпартнерами векторных калибровочных полей, которые при $D = 10$ обладают восемью степенями свободы, являются безмассовые фермионы – майорана-вейлевские биспиноры. В связи с этим интересно построение классической (псевдоклассической) модели, которая в результате последовательного квантования приведет к теории майорана-вейлевского биспинора.

В разделе 2 представлена псевдоклассическая теория нейтральной спиновой частицы в пространстве $D = 2n$. Проведено ее каноническое квантование в произвольном четномерном пространстве и показано, что при $D = 2, 4 \pmod{8}$ квантово-механическое описание совпадает с теоретико-полевым описанием майорановской частицы в представлении Фолди–Ваутхойзена. В разделе 3 рассмотрена псевдоклассическая теория $D = 2n$ -мерной вейлевской частицы. Проведено каноническое квантование этой теории и показано, что полученная теория совпадает с теоретико-полевым описанием вейлевской частицы в представлении Фолди–Ваутхойзена. В разделе 4 проведено каноническое квантование нейтральной вейлевской частицы в пространстве размерности $D = 4n + 2$ и показано, что в размерностях $D = 8k + 2$ эта теория совпадает с теорией майорана-вейлевской частицы в представлении Фолди–Ваутхойзена в КТП.

2. НЕЙТРАЛЬНАЯ (МАЙОРАНОВСКАЯ) ЧАСТИЦА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Описание майорановской частицы в квантовой механике, по существу, повторяет аналогичное описание дираковской частицы. Каноническое квантование псевдоклассической теории [1] дираковской частицы для размерности $D = 4$ проведено в [16] и для произвольной четной размерности $D = 2n$ – в [17]. Выпишем здесь основные формулы, необходимые для дальнейшего, отсылая за подробностями к работам [16, 17]. Действие псевдоклассической теории дираковской частицы дается выражением

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\frac{1}{e} \left(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \chi \xi^\mu \right)^2 + em^2 + im\chi \xi_{D+1} - i \left(\xi_\mu \dot{\xi}^\mu - \xi_{D+1} \dot{\xi}_{D+1} \right) \right]. \quad (1)$$

Здесь x^μ – координаты частицы, $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$; ξ^μ – грассмановы переменные, описывающие спинные степени свободы; e, χ, ξ_{D+1} – дополнительные поля, причем e является грассманово четной величиной, в то время как χ, ξ_{D+1} – грассманово нечетные величины; точка означает дифференцирование по параметру τ вдоль траектории.

Действие (1) инвариантно относительно двух типов калибровочных преобразований: репараметризационных преобразований

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= u \dot{x}^\mu, & \delta e &= \frac{d}{d\tau}(ue), \\ \delta \xi^\mu &= u \dot{\xi}^\mu, & \delta \xi_{D+1} &= u \dot{\xi}_{D+1}, & \delta \chi &= \frac{d}{d\tau}(u\chi) \end{aligned} \quad (2)$$

с четным параметром $u(\tau)$ и суперкалибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= iv\xi^\mu, & \delta e &= iv\chi, & \delta\chi &= 2\dot{v}, \\ \delta\xi^\mu &= v\left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} - \frac{i\chi}{2e}\xi^\mu\right), & \delta\xi_{D+1} &= vm \end{aligned} \quad (3)$$

с нечетным параметром $v(\tau)$.

Гамильтонизация теории приводит к каноническому гамильтониану

$$H = \frac{e}{2}(p^2 - m^2) + \frac{i}{2}\chi(p_\mu\xi^\mu - m\xi_{D+1}) \quad (4)$$

и набору первичных связей

$$\begin{aligned} \Phi_\mu &\equiv \pi_\mu - \frac{i}{2}\xi_\mu \approx 0, & \mu &= 0, 1, \dots, D-1, \\ \Phi_D &\equiv \pi_{D+1} + \frac{i}{2}\xi_{D+1} \approx 0, & \Phi_{D+5} &\equiv \pi_e \approx 0, & \Phi_{D+7} &\equiv \pi_\chi \approx 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь p_μ , π_e , π_μ , π_{D+1} , π_χ — канонические импульсы, сопряженные соответственно координатам x^μ , e , ξ^μ , ξ_{D+1} , χ . С помощью процедуры Дирака [26, 27] находим вторичные связи

$$\Phi_{D+1} \equiv p_\mu\xi^\mu - m\xi_{D+1} \approx 0, \quad \Phi_{D+3} \equiv |p_0| - \omega \approx 0; \quad \omega = (p_i^2 + m^2)^{1/2}. \quad (6)$$

В теории имеется набор связей первого рода: Φ_{D+3} , Φ_{D+5} , Φ_{D+7} и

$$\varphi = p^\mu\Phi_\mu + m\Phi_D + i\Phi_{D+1} = \frac{1}{2}i(p^\mu\xi_\mu - m\xi_{D+1}) + p^\mu\pi_\mu + m\pi_{D+1}. \quad (7)$$

В качестве дополнительных калибровочных условий, фиксирующих калибровочные свободы теории, выберем следующие:

$$\begin{aligned} \Phi_{D+4} &\equiv x^0 - \kappa\tau \approx 0, & \Phi_{D+8} &\equiv \chi \approx 0, & \Phi_{D+6} &\equiv e + 1/|p_0| \approx 0, \\ \Phi_{D+2} &\equiv \xi^0 \approx 0; & \kappa &= -\text{sign } p_0. \end{aligned} \quad (8)$$

После канонического преобразования

$$x^0 \rightarrow x^{0'} = x^0 - \kappa\tau \quad (9)$$

(остальные переменные не меняются), которое приводит к связям, не зависящим явно от времени, теория описывается гамильтонианом (штрихи опускаем)

$$H = \omega = (p_i^2 + m^2)^{1/2} \quad (10)$$

и независимыми переменными x^i , p_i , ξ^i , для которых скобки Дирака, построенные с учетом полной системы связей, имеют вид

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\}_D &= \frac{i}{2\omega^2}[\xi^i, \xi^j]_-, & \{x^i, p_j\}_D &= \delta_j^i, & \{p_i, p_j\}_D &= 0, \\ \{x^i, \xi^j\}_D &= \frac{1}{\omega^2}\xi^i p^j, & \{\xi^i, \xi^j\}_D &= -i\left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\omega^2}\right), & \{p_i, \xi^j\}_D &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Квантование теории осуществляется с помощью следующей реализации операторов $\hat{x}^i$, $\hat{p}_i$, $\hat{\xi}^i$:

$$\begin{aligned}\hat{x}^i &= \hat{q}^i - \frac{i\hbar}{4\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)} [\Sigma^i, \hat{p}_j \Sigma^j], \\ \hat{\xi}^i &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \hat{\kappa} \left[\Sigma^i - \frac{1}{\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)} \hat{p}_i \hat{p}_j \Sigma^j \right], \quad \hat{p}_k = -i \frac{\partial}{\partial q^k},\end{aligned}\quad (12)$$

где операторы $\hat{q}^i$ (операторы физических координат) являются операторами умножения, переменная κ заменена оператором

$$\hat{\kappa} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \tau^3 \otimes I, \quad \hat{\kappa}^2 = 1, \quad (13)$$

имеющим собственные значения $\kappa = \pm 1$; $\Sigma^i = \text{diag}(\sigma^i, \sigma^i)$, σ^i являются $2^{\frac{D-2}{2}} \times 2^{\frac{D-2}{2}}$ -матрицами, реализующими алгебру Клиффорда $[\sigma^i, \sigma^j]_+ = 2\delta^{ij}I$.

Волновая функция f задается выражением

$$f = \begin{pmatrix} f^1(q) \\ f^2(q) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где f^1 и f^2 являются $2^{\frac{D-2}{2}}$ -компонентными столбцами, а уравнение Шредингера имеет вид

$$(i\partial/\partial x^0 - \hat{\kappa}\hat{\omega})f = 0, \quad q = (x^0, q^i), \quad (15)$$

где мы перешли от переменной τ к физическому времени $x^0 = \kappa\tau$.

Канонические генераторы группы Лоренца

$$J^{\mu\nu} = - \left(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \frac{i}{2} [\xi^\mu, \xi^\nu]_- \right) \quad (16)$$

после квантования теории задаются выражениями

$$\begin{aligned}\hat{J}^{ik} &= -\hat{q}^i \hat{p}^k + \hat{q}^k \hat{p}^i - \frac{i\hbar}{4} [\Sigma^i, \Sigma^k]_-, \\ \hat{J}^{0k} &= -x^0 \hat{p}^k - \frac{1}{2} \hat{\kappa} [\hat{q}^k, \hat{\omega}]_+ - \frac{i\hbar}{4\hat{\omega}} \hat{\kappa} \hat{p}^j [\Sigma^k, \Sigma^j]_-.\end{aligned}\quad (17)$$

В [16, 17] показано, что f^1 следует интерпретировать как волновую функцию частицы, f^2 — как комплексно сопряженную волновую функцию античастицы, а квантово-механическое описание совпадает с описанием дираковской частицы в теории поля в представлении Фолди–Ваутхойзена.

Перейдем к построению квантовой механики майорановской частицы. Для этого заметим, что действие (1) инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned}x^\mu(\tau) &\rightarrow x^\mu(-\tau), \quad \xi^\mu(\tau) \rightarrow \xi^\mu(-\tau), \quad \xi_{D+1}(\tau) \rightarrow -\xi_{D+1}(-\tau), \\ \chi(\tau) &\rightarrow \chi(-\tau), \quad e(\tau) \rightarrow e(-\tau), \quad i \rightarrow -i,\end{aligned}\quad (18)$$

отвечающих репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$. В приведенном выше рассмотрении это преобразование не было включено в калибровочную группу. В этом случае модель описывает заряженную частицу, и в калибровке $x^0 - \kappa\tau \approx 0$ траектории с $\kappa = +1$ интерпретируются как траектории частиц, а траектории с $\kappa = -1$ — как траектории античастиц. Включение взаимодействия с электромагнитным полем подтверждает эту интерпретацию, поскольку заряд частиц на траекториях с данным κ равен κe [16] (при

этом действие уже не инвариантно относительно репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$). В случае, когда действие инвариантно относительно репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$, имеется возможность другой интерпретации. Именно, мы можем идентифицировать траектории $\kappa = +1$ и $\kappa = -1$. Это эквивалентно включению репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$ в калибровочную группу (см. [16]), и теория при этом описывает истинно нейтральную частицу.

В данном случае квантование теории можно выполнить двумя способами.

А. Выбрать калибровку, которая нарушает также симметрию относительно репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$.

Б. Проквантовать теорию в калибровке, которая не нарушает симметрию относительно репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$, а затем выполнить факторизацию по этой симметрии (т.е. провести идентификацию траекторий с $\kappa = +1$ и $\kappa = -1$).

А. Удобный выбор калибровки при таком способе действия состоит в замене связи Φ_{D+4} на связь

$$\Phi'_{D+4} = x^0 - \tau \approx 0. \quad (19)$$

Квантовая механика в этом случае совпадает с теорией, описанной в начале этого раздела и рассматриваемой в секторе $\kappa = +1$. В частности, волновая функция f является теперь $2^{\frac{D-2}{2}}$ -компонентным столбцом, совпадающим с f^1 :

$$f = f^1. \quad (20)$$

Для сравнения с описанием нейтральной (майорановской) частицы в КТП удобно ввести “биспинор” f_M :

$$f_M = \begin{pmatrix} f^1 \\ \Lambda f^{1*} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Выбор матрицы Λ обсуждается ниже.

Б. Факторизация квантовой механики дираковской частицы относительно симметрии $\tau \rightarrow -\tau$ состоит фактически в отождествлении секторов $\kappa = +1$ и $\kappa = -1$. Чтобы сформулировать правило такого отождествления, заметим, что из уравнения Шредингера (15) следует, что f^1 содержит только положительные частоты, в то время как f^2 — только отрицательные. Таким образом, правило факторизации должно иметь вид $f^2 \sim f^{1*}$. Это согласуется с интерпретацией f^2 как комплексно сопряженной волновой функции античастицы, а также с явным видом преобразования $\tau \rightarrow -\tau$. Итак, правило факторизации состоит в том, что в пространстве состояний дираковской частицы мы должны ограничиться векторами, имеющими вид (21), где Λ — некоторый унитарный оператор, который мы выберем в виде унитарной числовой $2^{\frac{D-2}{2}} \times 2^{\frac{D-2}{2}}$ -матрицы. Так как f^1 и f^2 обладают определенными трансформационными свойствами относительно лоренцевых преобразований, матрица Λ должна удовлетворять соотношениям

$$\hat{J}^{\mu\nu}(\kappa = -1) = -\Lambda \hat{J}^{\mu\nu*}(\kappa = +1) \Lambda^+. \quad (22)$$

Используя явный вид (17) генераторов $J^{\mu\nu}$, получаем, что матрица Λ должна обладать свойством

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \Lambda [\sigma^{i*}, \sigma^{j*}] \Lambda^+, \quad (23)$$

откуда следует

$$\sigma^i = \epsilon \Lambda \sigma^{i*} \Lambda^+, \quad \epsilon = +1 \text{ или } -1. \quad (24)$$

Нетрудно проверить, что если такая матрица существует, то она единственна с точностью до знака.

Мы приведем явный вид матрицы Λ в произвольной четной размерности $D = 2n$ (хотя матрица Λ существует в произвольной размерности).

Выберем специальный вид матриц $\Gamma_{(2n)}^{\mu(2n)}$ ($\mu_{(2n)} = 0, 1, \dots, 2n-1$) в представлении Дирака в размерности $D = 2n$. Мы опишем структуру этих матриц индуктивно. Пусть $\Gamma_{(0)}^{\mu(0)} = 1$. Тогда 2×2 -мерные матрицы $\Gamma_{(2)}^{\mu(2)}$ равны

$$\Gamma_{(2)}^0 = \tau^3, \quad \Gamma_{(2)}^1 = i\tau^2, \quad (25)$$

где τ^k ($k = 1, 2, 3$) – матрицы Паули. Если построены матрицы $\Gamma_{(2n)}^{\mu(2n)}$, то матрицы $\Gamma_{(2n+2)}^{\mu(2n+2)}$ строятся по правилу

$$\Gamma_{(2n+2)}^0 = \tau^3 \otimes I_{(2n)}, \quad \Gamma_{(2n+2)}^i = i\tau^2 \otimes \sigma_{(2n+2)}^i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad (26)$$

здесь $I_{(2n)}$ – единичная $2^n \times 2^n$ -мерная матрица, а $2^n \times 2^n$ -мерные матрицы $\sigma_{(2n+2)}^i$ равны

$$\sigma_{(2n+2)}^1 = \Gamma_{(2n)}^{D+1}, \quad \sigma_{(2n+2)}^k = -i\Gamma_{(2n)}^{k-1}, \quad k = 2, \dots, 2n, \quad \sigma_{(2n+2)}^{2n+1} = \Gamma_{(2n)}^0, \quad (27)$$

где $\Gamma_{(2n)}^{D+1}$ -матрица задается выражением

$$\Gamma_{(2n)}^{D+1} = i^{n-1} \Gamma_{(2n)}^0 \dots \Gamma_{(2n)}^{2n-1} = \tau^1 \otimes I_{2n-2}. \quad (28)$$

Тогда матрица $\Lambda \equiv \Lambda_{(2n)}$ равна

$$\begin{aligned} \Lambda_{(2)} &= 1, \\ \Lambda_{(4k+2)} &= \underbrace{(I_{(2)} \otimes \tau^2) \times \dots \times (I_{(2)} \otimes \tau^2)}_{k \text{ раз}} = \\ &= (-1)^k \Lambda_{(4k+2)}^T = (-1)^k \Lambda_{(4k+2)}^* = I_{(2)} \times \Lambda_{(4k)}, \\ \Lambda_{(4k)} &= \tau^2 \otimes \underbrace{(I_{(2)} \otimes \tau^2) \times \dots \times (I_{(2)} \otimes \tau^2)}_{k-1 \text{ раз}} = \\ &= (-1)^k \Lambda_{(4k)}^T = (-1)^k \Lambda_{(4k)}^* = \tau^2 \otimes \Lambda_{(4k-2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{(2n)} = (-1)^{n+1}. \quad (30)$$

Таким образом, в произвольной четной размерности мы имеем квантово-механическое описание нейтральной частицы “спина $1/2$ ”, получающееся в результате квантования псевдоклассической теории с расширенной калибровочной группой репараметризаций.

Сравним это описание с описанием нейтральной (майорановской) частицы в КТП. В представлении Дирака майорановский биспинор ψ_M определяется соотношением

$$\psi_M = B_{\text{ТП}} \psi_M^*, \quad B_{\text{ТП}} = C\Gamma^0, \quad (31)$$

где C – матрица зарядового сопряжения. Как известно [28], в теории поля такое определение самосогласованно только в пространствах размерности $D = 2, 4 \pmod{8}$, при этом B – симметричная матрица.

В построенной квантовой механике волновая функция f_M удовлетворяет аналогичному условию в любой размерности:

$$f_M = B_{KM} f_M^*, \quad B_{KM} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda^T \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Для сравнения матриц B_{TP} и B_{KM} напомним, что квантово-механическое описание отвечает представлению Фолди–Ваутхойзена в теории поля. Поэтому сначала следует перейти от дираковского представления к представлению Фолди–Ваутхойзена. Матрицы B_{TP} могут быть легко построены явно. Заметим, что приведенное выше индуктивное построение Γ -матриц обладает свойством

$$\Gamma_{(2n)}^0 = \Gamma_{(2n)}^{0T} = \Gamma_{(2n)}^{0+}, \quad \Gamma_{(2n)}^i = (-1)^i \Gamma_{(2n)}^{iT} = -\Gamma_{(2n)}^{i+}, \quad i = 1, \dots, 2n-1. \quad (33)$$

Это позволяет явно построить матрицы зарядового сопряжения $C_{(2n)}$ по правилу

$$C_{(2n)} = \beta_{2n} \prod_k \Gamma_{(2n)}^k, \quad (34)$$

где числа k четные при четных n и нечетные при нечетных n :

$$\begin{aligned} C_{(8k)} &= \beta_{8k} i (-1)^k \tau^1 \otimes \Lambda_{(8k)}, & C_{(8k+2)} &= \beta_{8k+2} i (-1)^k \Lambda_{(8k+4)}, \\ C_{(8k+4)} &= \beta_{8k+4} (-1)^k \tau^1 \otimes \Lambda_{(8k+4)}, & C_{(8k+6)} &= \beta_{8k+6} (-1)^k \Lambda_{(8k+11)}, \end{aligned} \quad (35)$$

β_{2n} – произвольные коэффициенты, выбираемые из соображений удобства.

Используя (35), выражение для Γ^0 -матрицы и соотношения (29), находим

$$\begin{aligned} B_{TP(8k)} &= \beta_{8k} (-1)^k \tau^2 \otimes \Lambda_{(8k)}, \\ B_{TP(8k+2)} &= \beta_{8k+2} (-1)^{k+1} \tau^1 \otimes \Lambda_{(8k+2)} \equiv \beta_{8k+2} (-1)^{k+1} B_{KM(8k+2)}, \\ B_{TP(8k+4)} &= \beta_{8k+4} i (-1)^{k+1} \tau^2 \otimes \Lambda_{(8k+4)} \equiv \beta_{8k+4} (-1)^k B_{KM(8k+4)}, \\ B_{TP(8k+6)} &= \beta_{8k+6} i (-1)^k \tau^1 \otimes \Lambda_{(8k+6)}. \end{aligned} \quad (36)$$

При переходе к представлению Фолди–Ваутхойзена матрицы B_{TP} заменяются на матрицы B_{FB} по правилу

$$B_{TP} \rightarrow B_{FB} = U B_{TP} U^T, \quad (37)$$

где унитарная матрица

$$U = \frac{\hat{\omega} + m + \Gamma_{(2n)}^i \hat{p}_i}{\sqrt{2\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)}} = \frac{1}{\sqrt{2\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)}} \begin{pmatrix} (\hat{\omega} + m) & \sigma_{(2n)}^i p_i \\ -\sigma_{(2n)}^i p_i & (\hat{\omega} + m) \end{pmatrix} \quad (38)$$

связывает представления Дирака и Фолди–Ваутхойзена. Пользуясь явным выражением для матриц B_{TP} и свойствами Λ -матриц (29), получаем

$$B_{FB} \equiv B_{TP}. \quad (39)$$

Из формул (36) видим, что в тех размерностях, в которых существует майорановская частица, а именно в размерностях $D = 2, 4 \pmod{8}$, имеет место следующее соотношение (при определенном выборе β):

$$B_{\Phi V} = B_{\text{км}}, \quad (40)$$

а это означает, что квантово-механическое описание нейтральной частицы в размерностях $D = 2, 4 \pmod{8}$ совпадает с теоретико-полевым описанием майорановской частицы в представлении Фолди–Ваутхойзена.

Еще раз заметим, что в квантовой механике нейтральная частица существует в произвольной размерности $D = 2n$.

3. $D = 2n$ -МЕРНАЯ ВЕЙЛЕВСКАЯ ЧАСТИЦА

Рассмотрим теорию, действие которой задается выражением

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\frac{1}{e} (z^\mu)^2 + em^2 - i(\xi_\mu \dot{\xi}^\mu - \xi_{D+1} \dot{\xi}_{D+1}) + im\chi \xi_{D+1} \right], \quad (41)$$

$$z^\mu = \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \chi \xi^\mu - \frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda_1 \dots \lambda_{D-2}} b_\nu \xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_{D-2}} + \tilde{\alpha} b^\mu.$$

Здесь b^μ – дополнительные поля, $\tilde{\alpha}$ – константа, b^μ и $\tilde{\alpha}$ грассманово четны.

Эта теория инвариантна относительно репараметризационных преобразований

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= u \dot{x}^\mu, & \delta e &= \frac{d}{d\tau}(ue), & \delta b^\mu &= \frac{d}{d\tau}(ub^\mu), \\ \delta \xi^\mu &= u \dot{\xi}^\mu, & \delta \chi &= \frac{d}{d\tau}(u\chi), & \delta \xi_{D+1} &= u \dot{\xi}_{D+1} \end{aligned} \quad (42)$$

с четным параметром $u(\tau)$ и относительно суперкалибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= iv \xi^\mu, & \delta e &= iv \chi, & \delta b^\mu &= 0, \\ \delta \xi^\mu &= v \frac{z^\mu}{e}, & \delta \chi &= 2\dot{v}, & \delta \xi_{D+1} &= vt \end{aligned} \quad (43)$$

с нечетным параметром $v(\tau)$.

Найдем уравнения движения, соответствующие вариации действия по e и b_μ :

$$\begin{aligned} p_\mu^2 - m^2 &= 0, & p_\mu &\equiv \frac{1}{e} z_\mu, \\ \frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda_1 \dots \lambda_{D-2}} p_\nu \xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_{D-2}} + \tilde{\alpha} p^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Умножая второе из этих уравнений на p_μ , получаем условие

$$\tilde{\alpha} m^2 = 0. \quad (45)$$

Таким образом, теория с действием (41) непротиворечива только при следующем выборе параметров: $\tilde{\alpha} = 0$ или $m = 0$ (при $\tilde{\alpha} \neq 0$). В дальнейшем мы будем считать $\tilde{\alpha} \neq 0$, так что нужно положить $m = 0$ в (41), т.е. рассматривать теорию с действием вида

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2e} \left(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \chi \xi^\mu - \frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda_1 \dots \lambda_{D-2}} b_\nu \xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_{D-2}} + \tilde{\alpha} b^\mu \right)^2 - \frac{i}{2} \xi_\mu \dot{\xi}^\mu \right], \quad (46)$$

которая является обобщением на пространство-время размерности $D = 2n$ псевдоклассической теории вейлевской частицы [23] (оказывается, что при $m = 0$ переменная ξ_{D+1} в действии (41) может быть опущена). Кроме инвариантности относительно преобразований (42) и (43), действие (46) инвариантно относительно калибровочных преобразований (см. [23])

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda_1\ldots\lambda_{D-2}} \eta_\nu \xi_{\lambda_1} \ldots \xi_{\lambda_{D-2}} - \tilde{\alpha} \eta^\mu, \\ \delta \xi^\mu &= \frac{1}{e} \frac{(-i)^{\frac{D}{2}}}{(D-3)!} \varepsilon^{\mu\nu\delta\lambda_2\ldots\lambda_{D-2}} \eta_\nu z_\delta \xi_{\lambda_2} \ldots \xi_{\lambda_{D-2}}, \\ \delta b^\mu &= \frac{d}{d\tau}(\eta^\mu), \quad \delta \chi = -2\eta_\nu (p^\nu \xi^\sigma - p^\sigma \xi^\nu) b_\sigma \delta_{D4}, \quad \delta e = -2i\eta_\nu \xi^\nu \xi^\sigma b_\sigma \delta_{D4}\end{aligned}\quad (47)$$

с четным параметром $\eta_\nu(\tau)$.

Действуя стандартным способом, получим канонический гамильтониан теории

$$\begin{aligned}H &= \dot{x}^\mu p_\mu + \dot{\xi}^\mu \pi_\mu - L = \\ &= \frac{e}{2} p^2 + \frac{i}{2} \chi p_\mu \xi^\mu - \left(\frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^{\nu\mu\lambda_1\ldots\lambda_{D-2}} p_\mu \xi_{\lambda_1} \ldots \xi_{\lambda_{D-2}} + \tilde{\alpha} p^\nu \right) b_\nu,\end{aligned}\quad (48)$$

первичные связи

$$\Phi_1^{(1)} = \pi_e, \quad \Phi_2^{(1)} = \pi_\chi, \quad \Phi_{3\mu}^{(1)} = \pi_\mu - \frac{i}{2} \xi_\mu, \quad \Phi_{4\mu}^{(1)} = \pi_\mu^b \quad (49)$$

и вторичные связи

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(2)} &= |p_0| - \omega, \quad \Phi_2^{(2)} = p_\mu \xi^\mu, \\ \Phi_{3\mu}^{(2)} \equiv T_\mu &= \frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda_1\ldots\lambda_{D-2}} p^\nu \xi^{\lambda_1} \ldots \xi^{\lambda_{D-2}} + \tilde{\alpha} p_\mu,\end{aligned}\quad (50)$$

где $\omega = |\vec{p}|$, $\vec{p} = (p_k)$, $k = 1, \ldots, D-1$. Легко видеть, что канонический гамильтониан H , как и следовало ожидать, равен нулю на поверхности связей.

Связи $F \equiv (\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, \Phi_{4\mu}^{(1)}, \Phi_1^{(2)})$, $\Phi_{3\mu}^{(2)}$ являются связями первого рода. Кроме того, имеется еще одна связь первого рода φ , являющаяся линейной комбинацией связей $\Phi_{3\mu}^{(1)}, \Phi_2^{(2)}$:

$$\varphi = p^\mu \Phi_{3\mu}^{(1)} + i \Phi_2^{(2)} = p_\mu \pi^\mu + \frac{i}{2} p_\mu \xi^\mu. \quad (51)$$

Придерживаясь способа квантования, при котором еще на классическом уровне полностью фиксируются все калибровочные свободы теории [16], мы должны, вообще говоря, ввести в теорию дополнительные связи в количестве, равном числу всех связей первого рода, и сопряженные к последним. Однако, как было отмечено в [23], связи $\Phi_{3\mu}^{(2)}$ при $D \geq 4$, как минимум, квадратичны по переменным ξ^λ , что затрудняет введение дополнительных связей, сопряженных к $\Phi_{3\mu}^{(2)}$. По этой причине связи $\Phi_{3\mu}^{(2)}$ после квантования будут использованы в качестве условия, налагаемого на векторы состояний. По числу

же оставшихся связей первого рода F и φ введем дополнительные связи Φ^G , выбранные в виде

$$\Phi_1^G = x^0 - \kappa\tau, \quad \Phi_2^G = \chi, \quad \Phi_3^G = e - \frac{\kappa}{p_0}, \quad \Phi_{4\nu}^G = b_\nu, \quad \Phi_5^G = \xi_0. \quad (52)$$

Чтобы перейти к системе связей, не зависящих от времени явно, совершим каноническое преобразование (9), в результате чего гамильтониан системы на поверхности связей приобретет вид

$$H = \omega = |\vec{p}|. \quad (53)$$

Квантование теории проводится с использованием формул предыдущего раздела с $m = 0$.

Заметим, что по сравнению с предыдущим разделом система связей второго рода содержит новые связи $\Phi_{4\mu}^{(1)} = \pi_\mu^b \approx 0$, $\Phi_{4\mu}^G = b_\mu \approx 0$. Однако они являются связями специального вида [27] и не меняют скобки Дирака (переменные b_μ и π_μ^b можно исключить из теории с использованием связей).

Далее, используя выражения (12) для ξ^i при $m = 0$, можно найти выражения для операторов $\hat{T}_\mu$, которые соответствуют связям первого рода $\Phi_{3\mu}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \hat{T}_\mu &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{(D-2)/2} \hat{p}_\mu \hat{T}, \quad \hat{T} = \hat{\kappa} \frac{\hat{p}^i \Sigma^i}{\hat{\omega}} - \alpha, \\ \hat{p}_0 &= -\hat{\kappa} \hat{\omega}, \quad \alpha = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-(D-2)/2} \tilde{\alpha}. \end{aligned} \quad (54)$$

При выводе этих соотношений использовалось равенство

$$\varepsilon_{01\dots(D-1)} = -\varepsilon_{12\dots(D-1)} = -1,$$

а также соотношение

$$\frac{(-i)^{\frac{D-2}{2}}}{(D-2)!} \varepsilon^i{}_{j_1\dots j_{D-2}} \sigma^{j_1} \dots \sigma^{j_{D-2}} = \sigma^i \quad (55)$$

из алгебры σ^i -матриц в $(D-1)$ -мерном пространстве [29]. Величина α является собственным значением оператора киральности $\hat{\vec{p}} \vec{\sigma} / \hat{\omega}$ и в квантовой механике может принимать значения $+1$ или -1 .

Как уже говорилось, операторы $\hat{T}_\mu$ будут использованы для наложения условий на физические векторы состояний. Для пространства размерности D вектор состояний имеет, вообще говоря, размерность $2^{D/2}$ (в безмассовом случае это представление оказывается приводимым). Представляя вектор состояния f в виде биспинора

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

где f^1 и f^2 являются столбцами размерности $2^{(D-2)/2}$, выпишем уравнения для векторов состояний в форме

$$\hat{T} f = 0. \quad (57)$$

Естественно интерпретировать построенную выше квантовую механику как теорию вейлевской частицы в представлении Фолди–Ваутхойзена. Действительно, используя реализацию (13) для $\hat{\kappa}$, запишем оператор $\hat{T}$ в виде

$$\hat{T} \equiv \hat{T}_{\text{ФВ}} = \Gamma_{(2n)}^0 \frac{\hat{p}^i \Sigma^i}{\hat{\omega}} - \alpha. \quad (58)$$

Рассмотрим, кроме того, уравнение Шредингера $(i\partial/\partial\tau - \hat{H})f = 0$, описывающее эволюцию вектора состояния f по параметру τ . Это уравнение, будучи переписанным через физическое время $x_0 = \kappa\tau$, имеет вид

$$(i\partial/\partial x^0 - \Gamma_{(2n)}^0 \hat{\omega})f = 0. \quad (59)$$

Воспользовавшись, далее, унитарным преобразованием Фолди–Ваутхойзена при $m = 0$ в D -мерном пространстве:

$$f = U\psi, \quad U = \frac{\hat{\omega} + \Gamma_{(2n)}^i \hat{p}^i}{\hat{\omega}\sqrt{2}}, \quad (60)$$

где ψ – волновая функция в дираковском представлении, получаем (см. [16, 17]), что уравнение Шредингера преобразуется в уравнение Дирака, а выражения для лоренцевых генераторов $\hat{J}^{\mu\nu}$ переходят в стандартные выражения лоренцевых генераторов в представлении Дирака.

Более того, прямым вычислением можно показать, что оператор $\hat{T}_{\text{ФВ}}$ преобразуется в оператор $\hat{T}_{\text{Д}}$

$$\hat{T}_{\text{Д}} = U^+ \hat{T}_{\text{ФВ}} U = \Gamma_{(2n)}^{D+1} - \alpha, \quad (61)$$

который пропорционален стандартному вейлевскому проектору в представлении Дирака.

Таким образом, построенное выше квантово-механическое описание системы после преобразования Фолди–Ваутхойзена переходит в дираковское описание вейлевской частицы. Следовательно, построенная нами квантовая механика описывает вейлевскую частицу в представлении Фолди–Ваутхойзена.

4. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА МАЙОРАНА-ВЕЙЛЕВСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Как обсуждалось в разделе 2, инвариантность действия относительно преобразований репараметризации $\tau \rightarrow -\tau$ позволяет описать нейтральные частицы в рамках квантовой механики путем введения этого преобразования в калибровочную группу. Применим эту идеологию к действию (46) для вейлевской частицы.

Для инвариантности действия относительно замены $\tau \rightarrow -\tau$ кроме преобразований (18) (исключая $\xi_{D+1}(\tau) \rightarrow -\xi_{D+1}(-\tau)$) необходимо еще преобразование

$$b^\mu(\tau) \rightarrow -b^\mu(-\tau). \quad (62)$$

Действие (46) инвариантно относительно преобразований (18), (62) при условии

$$\frac{D-2}{2} = 2n, \quad (63)$$

т.е. в размерностях $D = 4n + 2$. В этих размерностях мы проквантуем действие (46) в предположении расширенной калибровочной группы и сравним полученный результат с описанием майорана-вейлевской частицы в теории поля.

При первом способе квантования, т.е. при выборе вместо калибровки $\Phi = x^0 - \kappa\tau$ калибровки $\Phi' = x^0 - \tau$, мы просто ограничиваем пространство состояний сектором $\kappa = +1$ в квантово-механическом описании вейлевской частицы. Волновая функция есть $2^{(D-2)/2}$ -мерный столбец

$$f = f^1, \quad (64)$$

и условие Вейля имеет вид

$$\hat{P}_\alpha f^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}\vec{\sigma}}{\hat{\omega}} - \alpha \right) f^1 = 0, \quad (65)$$

где операторы $\hat{P}_\alpha$ определены соотношением

$$\hat{P}_\alpha = \frac{1}{2} \hat{T} \Big|_{\kappa=+1}. \quad (66)$$

Для сравнения с теорией поля удобно ввести “биспинор” f_M

$$f_M = \begin{pmatrix} f^1 \\ \Lambda f^{1*} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Точно такая же волновая функция возникает при втором способе квантования, когда мы факторизуем полное пространство состояний вейлевской частицы по репараметризационному преобразованию $\tau \rightarrow -\tau$. Теперь, однако, должно выполняться еще одно условие:

$$\hat{P}_{-\alpha} \Lambda f^{1*} = 0, \quad \hat{P}_{-\alpha} = \frac{1}{2} \hat{T} \Big|_{\kappa=-1}, \quad (68)$$

что приводит к соотношению

$$\hat{P}_{-\alpha} \sim \Lambda \hat{P}_\alpha^* \Lambda^{-1}. \quad (69)$$

С использованием явных формул (24), (30) и свойств (29) Λ -матриц получаем, что это соотношение выполняется только в размерности $D = 4n + 2$. Таким образом, оба способа квантования дают эквивалентные ответы: квантовая механика в размерности $D = 4n + 2$ с расширенной калибровочной группой описывает нейтральную (совпадающую со своей античастицей) вейлевскую частицу. Так как это описание может быть эквивалентно теоретико-полевому описанию майорановской частицы только в размерностях $D = 8k + 2$ и $D = 8k + 4$, то мы получаем, что в размерности $D = 8k + 2$ построенная квантовая механика эквивалентна теоретико-полевому описанию майорана-вейлевской частицы в представлении Фолди–Ваутхейзена. Выделение размерностей $D = 8k + 2$ согласуется с тем, что в теории поля майорана-вейлевская частица существует только в таких размерностях [28] (квантово-механическое описание нейтральной вейлевской частицы существует также в размерностях $D = 8k + 6$).

Это исследование было частично поддержано грантами RFBR/INTAS-96-829 и 211-5291 УРІ Министерства исследований и технологии Германии. И.В. Тютин также благодарен за грант INTAS-94-2317 Евросоюза.

Список литературы

- [1] *Ф. А. Березин, М. С. Маринков.* Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678.
- [2] *F. A. Berezin, M. S. Marinov.* Ann. Phys. 1977. V. 104. P. 336.
- [3] *R. Casalbuoni.* Nuovo Cimento A. 1976. V. 33. P. 115.
- [4] *A. Barducci, R. Casalbuoni, L. Lusanna.* Nuovo Cimento A. 1976. V. 35. P. 377.
- [5] *L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, P. Howe.* Phys. Lett. B. 1976. V. 64. P. 435.
- [6] *L. Brink, P. Di Vecchia, P. Howe.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 118. P. 76.
- [7] *A. P. Balachandran, P. Salomonson, B. S. Skagerstam, J. O. Winnberg.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2308.
- [8] *A. Barducci, R. Casalbuoni, L. Lusanna.* Phys. Lett. B. 1976. V. 64. P. 319.
- [9] *A. Barducci, R. Casalbuoni, D. Dominici, L. Lusanna.* Phys. Lett. B. 1981. V. 100. P. 126.
- [10] *A. Barducci, L. Lusanna.* Nuovo Cimento A. 1983. V. 77. P. 39.
- [11] *A. Barducci, L. Lusanna.* J. Phys. A. 1983. V. 16. P. 1993.
- [12] *P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend.* Phys. Rev. B. 1988. V. 215. P. 555.
- [13] *P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend.* Class. Quantum Gravit. 1989. V. 6. P. 1125.
- [14] *J. Gomis, M. Novell, K. Rafanelli.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1072.
- [15] *В. Д. Гершуц, В. И. Ткач.* Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 320.
- [16] *D. M. Gitman, I. V. Tyutin.* Class. Quantum Gravit. 1990. V. 7. P. 2131.
- [17] *Г. В. Григорян, Р. П. Григорян.* ЯФ. 1991. Т. 53. С. 1737.
- [18] *А. А. Желтухин.* ТМФ. 1985. Т. 65. С. 151–154.
- [19] *D. Gitman, A. Saa.* Class. Quantum Gravit. 1993. V. 10. P. 1447.
- [20] *Г. В. Григорян, Р. П. Григорян.* ЯФ. 1995. Т. 58. С. 1.
- [21] *Г. В. Григорян, Р. П. Григорян, Г. А. Саркисян.* ЯФ. 1996. Т. 59. С. 552; hep-th/-9411023.
- [22] *J. L. Cortes, M. S. Plyushchay, L. Velazquez.* Phys. Lett. B. 1993. V. 306. P. 34.
- [23] *D. M. Gitman, A. E. Gonçalves, I. V. Tyutin.* Phys. Rev. D. 1994. V. 34. P. 5439.
- [24] *Г. В. Григорян, Р. П. Григорян, И. В. Тютин.* ЯФ. 1996. Т. 59. № 12. С. 2299–2304.
- [25] *M. B. Green, J. H. Schwartz, E. Witten.* Superstring theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [26] *P. A. M. Dirac.* Lectures on Quantum Mechanics. N.Y.: Yeshiva Univ., 1964.
- [27] *D. M. Gitman, I. V. Tyutin.* Quantization of fields with constraints. Berlin: Springer Verlag, 1990.
- [28] *J. Sherk.* Extended supersymmetry and extended supergravity theory. In: Recent Development in Gravitation. Eds M. Levy and S. Deser. N. Y.: Plenum Publ. Corp., 1979.
- [29] *K. M. Case.* Phys. Rev. 1955. V. 97. P. 810.

Поступила в редакцию 24.I.1997 г.

G. V. Grigoryan, R. P. Grigoryan, I. V. Tyutin
PSEUDOCCLASSICAL THEORIES OF MAJORANA,
WEYL, AND MAJORANA–WEYL PARTICLES

Pseudoclassical theories of Majorana, Weyl and Majorana–Weyl particles in even-dimensional space-times are constructed. The canonical quantization of these theories is carried out and as a result the quantum mechanical description of neutral particle in $D = 2n$, Weyl particle in $D = 2n$ and neutral Weyl particle in $D = 4n + 2$ is obtained. In $D = 2, 4 \pmod{8}$ dimensional space-time the description of the neutral particle coincides with the field theoretical description of the Majorana particle in the Foldy–Wouthuysen representation. In $D = 8k + 2$ dimensions the description of neutral Weyl particle coincides with the description of Majorana–Weyl particle.