Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Желтухин, С. Н. Рощупкин, О приближенном описании динамики струн и p -бран в искривленных пространствах, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 402–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:53:18

А. А. Желтухин*, С. Н. Рощупкин†

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ СТРУН И p -БРАН В ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Изучена новая формулировка для функционала действия бозонной струны Намбу–Гото в искривленном пространстве-времени, содержащая параметр натяжения в виде константы при “космологическом” члене. Показано, что рассмотрение “космологического” члена в качестве возмущающей добавки позволяет линеаризовать нелинейные уравнения струны. Показано, что в нулевом приближении по натяжению струны и мембраны могут рассматриваться как доминантные источники гравитации для вселенных Фридмана с $\kappa = 0$.

Гипотеза о струнной природе механизма расширения Вселенной [1–4] стимулирует исследования динамики струн в искривленных пространствах [1–7]. В связи с этим актуальными являются вопросы о решении уравнений движения струны в различных искривленных пространствах и самосогласованном рассмотрении струн в качестве доминантных источников гравитации в рассматриваемых пространствах [3–7]. Изучение указанных вопросов осложняется нелинейным характером уравнений движения струны, точно интегрируемых лишь для небольшого числа специальных метрик [1–7]. Поэтому в работах [5–7] (см. также ссылки в них) была предложена программа изучения приближенных решений уравнений движения струны на основе теории возмущений. В работах [5–7], однако, не была представлена процедура последовательного введения малого параметра в уравнения, что привело к некоторому произволу при рассмотрении связей и трактовке констант интегрирования. В связи с этим возникает вопрос о последовательной процедуре реализации эвристической приближенной схемы [5–7]. Такая процедура предполагает наличие нового представления для функционала действия струны в искривленных пространствах, содержащего малый параметр в явном виде. При этом уравнения движения и связи струны, определяемые этим функционалом, должны быть свободны от отмеченного выше произвола. Ниже, в разделе 1, мы показываем, что роль искомого функционала действия струны играет функционал, являющийся суммой функционала действия для нуль-струны [8–10] и “космологического” члена (см. [11]), содержащего натяжение струны в качестве малого параметра. На основе предлагаемой формулировки действия и вариационного принципа Эйлера–Лагранжа получены уравнения движения и связи струны, а также проведена их линеаризация в

* Национальный научный центр, Харьковский физико-технический институт, Харьков, Украина. E-mail: kfti@kfti.kharkov.ua

† Симферопольский государственный университет, Симферополь, Украина

рамках теории возмущений по параметру натяжения. Результаты раздела 1 позволяют интерпретировать лагранжиан нуль-струн как струнный кинетический член, отвечающий нулевому приближению по параметру натяжения для лагранжиана Намбу–Гото [12], расширенного на искривленное пространство. Этим объясняется самостоятельный интерес к изучению динамики нуль-струн в космологии, которому посвящается раздел 2. Учитывая ряд общих свойств струн и мембран в нулевом приближении по натяжению, мы начинаем второй раздел с вывода уравнений движения и связей для протяженных объектов произвольной размерности p ($p \leq D - 1$), характеризуемых нулевым натяжением (эти объекты называются нуль- p -бранами [11, 13]) и движущихся в произвольном искривленном пространстве размерности D . Далее рассмотрение ограничивается случаем пространств Фридмана с $\kappa = 0$, для которых находятся решения уравнений движения нуль- p -бран и строится тензор энергии-импульса для идеальной жидкости нуль- p -бран. Показывается, что идеальная жидкость нуль- p -бран может рассматриваться в качестве доминантного источника гравитации для вселенных Фридмана.

1. В этом разделе мы покажем, что натяжение струны может играть роль малого параметра в ее нелинейных уравнениях движения в D -мерном искривленном пространстве. С этой целью представим действие струны в форме

$$S = S_0 + S_1 = \int d\tau d\sigma \left[\frac{\det(\partial_\mu x^M G_{MN} \partial_\nu x^N)}{E(\tau, \sigma)} - \frac{1}{(\alpha')^2} E(\tau, \sigma) \right], \quad (1)$$

где $G_{MN}(x)$ – метрика D -мерного пространства-времени, $E(\tau, \sigma)$ – двумерная листовая плотность и параметр $T \equiv 1/\alpha'$ в листовом космологическом члене $T^2 E$ имеет физический смысл натяжения струны. Представление (1) классически эквивалентно стандартному представлению Намбу–Гото [12], обобщенному на искривленное пространство. В этом легко убедиться, воспользовавшись уравнением движения

$$E = \alpha' \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}, \quad g_{\mu\nu} = \partial_\mu x^M G_{MN} \partial_\nu x^N, \quad (2)$$

для вспомогательного поля E , с помощью которого последнее исключается из представления (1). Представление (1) удобно тем, что оно содержит параметр натяжения T не в форме мультипликативного фактора, стоящего перед интегралом действия, как в представлении Намбу–Гото, а в виде множителя при аддитивной добавке к кинетическому члену S_0 , совпадающему с полным интегралом действия для нуль-струны [8–10]. Поэтому в пределе слабого натяжения $T \rightarrow 0$ (или $\alpha' \rightarrow \infty$) дополнительный член S_1 в (1) может рассматриваться в качестве возмущения к действию нуль-струны.

Представление (1) порождает плотность гамильтониана $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = -\frac{E}{(x'^L x'_L)} \left[\frac{1}{4} (\mathcal{P}^M \mathcal{P}_M) + T^2 (x'^M x'_M) \right] + \lambda (x'^M \mathcal{P}_M), \quad (3)$$

где каноническая плотность импульса $\mathcal{P}_M$, сопряженная координате x^M , определяется выражением

$$\mathcal{P}_M = -\frac{2}{E} G_{MN} [(x'^L x'_L) \dot{x}^N - (\dot{x}^L x'_L) x'^N]. \quad (4)$$

Фиксация калибровок условиями на лагранжевы множители λ и E

$$E = -\gamma(x'^L x'_L), \quad \lambda = 0, \quad (5)$$

где γ – новая физическая константа с размерностью квадрата длины (в системе $\hbar = 1 = c$), характеризующая обратную кривизну рассматриваемого пространства-времени, переводит $\mathcal{H}$ в релятивистски-инвариантную осцилляторную плотность гамильтониана в искривленном пространстве-времени

$$\mathcal{H} = \frac{\gamma}{4}(\mathcal{P}^M \mathcal{P}_M) + \gamma T^2(x'^M x'_M).$$

Отсюда видно, что “космологический” член – это вклад упругой деформации струны в потенциальную энергию, зависящую от метрики G_{MN} . В пределе $T \rightarrow 0$ $\mathcal{H}$ превращается в плотность гамильтониана $\mathcal{H}_0 = \frac{\gamma}{4}(\mathcal{P}^M \mathcal{P}_M)$ нуль-струны, описывающую непрерывный спектр масс, порождаемый нуль-струной [13]. Введение в $\mathcal{H}_0$ осцилляторной добавки приводит к появлению режима колебаний и генерации известного осцилляторного спектра масс Намбу.

Приведенная физическая интерпретация $\mathcal{H}$ делает удобным изучение нелинейных уравнений струны, следующих из действия S (1), в калибровке (5), т.е.

$$(\dot{x}^L x'_L) = 0, \quad (6)$$

$$E = -\gamma(x'^L x'_L). \quad (6')$$

В этой калибровке уравнения (2) переписываются в виде

$$(\dot{x}^M \cdot \dot{x}_M) + \left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right)^2 (x'^M x'_M) = 0, \quad g_{\mu\nu} = E \operatorname{diag}[\gamma/(\alpha')^2, -1/\gamma]. \quad (7)$$

Из (7) следует, что в пределе $T \rightarrow 0$ метрика $g_{\mu\nu}$ становится вырожденной и описывает изотропную поверхность, заметаемую нуль-струной при движении в искривленном пространстве-времени. В калибровке (6) с учетом (7) искомые уравнения Эйлера–Лагранжа для струны принимают вид

$$\ddot{x}^M - \left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right)^2 x''^M + \Gamma_{PQ}^M(x) \left[\dot{x}^P \dot{x}^Q - \left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right)^2 x'^P x'^Q \right] = 0, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \gamma/\alpha'$ – безразмерный параметр. В рассматриваемом здесь случае замкнутой струны уравнения (8) дополняются периодическими по σ условиями

$$x^M(\tau, \sigma = 0) = x^M(\tau, \sigma = 2\pi). \quad (9)$$

При условии малости параметра ε ($\varepsilon \ll 1$) или эквивалентном условии

$$(\dot{x}^M \dot{x}_M) \ll -(x'^M x'_M) \quad (10)$$

уравнения (8) могут рассматриваться как нелинейные уравнения с малым параметром при производных по σ . Это позволяет искать их решения в виде ряда по степеням малого

параметра с функциями нулевого приближения $\varphi^M(\tau)$, удовлетворяющими уравнениям и связям нулевого приближения, имеющим вид

$$\ddot{\varphi}^M + \Gamma_{PQ}^M(\varphi)\dot{\varphi}^P\dot{\varphi}^Q = 0, \quad (11)$$

$$(\dot{\varphi}^M\dot{\varphi}_M) = 0. \quad (11')$$

В нулевом приближении связь (6') удовлетворяется тождественно. Уравнения (11) эквивалентны уравнениям движения безмассовой частицы с координатами $\varphi^M(\tau)$ вдоль геодезической линии рассматриваемого пространства-времени. Для получения уравнений, определяющих функции следующих приближений по ε , заметим, что параметр ε можно исключить из уравнений (8) переходом к новой переменной ξ , связанной с σ соотношением

$$\xi = \sigma/\varepsilon, \quad \partial_\xi = \varepsilon\partial_\sigma, \quad \partial_\xi^2 = \varepsilon^2\partial_\sigma^2. \quad (12)$$

С учетом этого замечания решение уравнений (8) можно представить в виде асимптотического разложения по степеням параметра ε

$$X^M = \varphi^M(\tau) + \varepsilon\psi^M(\tau, \xi) + \varepsilon^2\chi^M(\tau, \xi) + \dots. \quad (13)$$

Это разложение показывает, что эффекты, связанные с протяженностью струны, начинают проявляться в первом приближении по ε . Непосредственно убедиться в этом можно подстановкой разложения (13) в выражение (6') для листовой плотности E , определяющей упругую энергию натяжения струны. После такой подстановки и учета описанного выше условия

$$\varphi_{,\xi}^M \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\varphi^M = 0 \quad (14)$$

получим для потенциальной энергии E (6') релятивистски-инвариантное осцилляторное представление в терминах производных функций ψ^M первого приближения

$$E = -\gamma\psi_{,\xi}^M G_{MN}(\varphi)\psi_{,\xi}^N + \dots. \quad (15)$$

С учетом сделанного выбора для функций нулевого приближения φ^M (14) уравнения движения и связи для функций последующих приближений существенно упрощаются. Для вывода этих уравнений и связей подставим разложения (13) в уравнение (8) и связи (6'), (7) и, принимая во внимание (14), получим уравнения и связи для функций первого приближения ψ^M в виде (1)¹⁾

$$D_L^M \psi^L \equiv \ddot{\psi}^M - \psi_{,\xi\xi}^M + 2\left[\Gamma_{PQ}^M(\varphi)\dot{\psi}^P + \frac{1}{2}\psi^L\partial_L\Gamma_{PQ}^M\dot{\varphi}^P\right]\dot{\varphi}^Q = 0. \quad (16)$$

¹⁾Здесь и далее используется сокращенная запись

$$\partial_{LK\dots}G_{MN} \equiv \frac{\partial}{\partial\varphi^L}\frac{\partial}{\partial\varphi^K}\dots G_{MN}(\varphi), \quad (\varphi^M\psi_M) \equiv \varphi^MG_{MN}\psi^N, \quad \dots$$

Удержание в уравнениях (8) членов второго порядка малости по ε позволяет получить линейаризованные уравнения для функций второго порядка $\chi^M(\tau, \xi)$:

$$D_L^M \chi^L + \Gamma_{PQ}^M [\dot{\psi}^P \dot{\psi}^Q - \psi_{,\xi}^P \psi_{,\xi}^Q] + 2\psi^L \partial_L \Gamma_{PQ}^M \dot{\psi}^P \dot{\psi}^Q + \frac{1}{2} \psi^L \psi^K \partial_{LK} \Gamma_{PQ}^M \dot{\psi}^P \dot{\psi}^Q = 0. \quad (17)$$

Аналогичным образом получается разложение по степеням ε связей (6') и (7) вплоть до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned} (\dot{x}^M \cdot \dot{x}_M) + \left(\frac{\gamma}{\alpha'} \right)^2 (x_{,\xi}^M x_{M,\xi}) &= \varepsilon [2(\dot{\varphi}^M \dot{\psi}_M) + \psi^L (\dot{\varphi}^M \partial_L G_{MN} \dot{\varphi}^N)] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[2(\dot{\varphi}_M \dot{\chi}^M) + \chi^L (\dot{\varphi}^M \partial_L G_{MN} \dot{\varphi}^N) + (\dot{\psi}^M \dot{\psi}_M) + \psi_{,\xi}^M \psi_{M,\xi} + \right. \\ &\left. + 2\psi^L (\dot{\varphi}^M \partial_L G_{MN} \dot{\psi}^N) + \frac{1}{2} \psi^L \psi^K (\dot{\varphi}^M \partial_{LK} G_{MN} \dot{\varphi}^N) \right] + \dots = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\dot{x}^M x'_M) &= \varepsilon (\dot{\varphi}^M \psi_{M,\xi}) + \varepsilon^2 [(\dot{\varphi}_M \chi_{,\xi}^M) + (\dot{\psi}_M \psi_{,\xi}^M) + \\ &+ \psi^L (\dot{\varphi}_M \partial_L G_{MN} \psi_{,\xi}^N)] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (18')$$

Отсутствие в разложениях связей (18) членов нулевого приближения объясняется выбором траектории эффективной безмассовой частицы в качестве нулевого приближения к истинной траектории струны. Мы считаем малой энергию колебаний $\mathcal{E} \sim 1/\sqrt{\alpha'}$, которые совершает струна относительно геодезической (11), в энергетических единицах, определяемых эффективным массовым параметром $M \sim 1/\sqrt{\gamma}$ искривленного пространства, в котором рождаются рассматриваемые здесь струны, т.е. принимаем, что $\mathcal{E}/M \sim \sqrt{\gamma/\alpha'} \ll 1$. Заметим также, что осцилляторный член $(x'_M x'^M)$ в связи (7) возникает лишь во втором приближении, вследствие чего вирасоровские члены $[\dot{\psi}^M \dot{\psi}_M + \psi_{,\xi}^M \psi_{M,\xi}]$ в (18) и $\psi_{M,\xi} \psi_{,\xi}^M$ в (18') также появляются во втором приближении по ε .

Рассмотренный здесь подход является последовательной реализацией эвристической схемы, развитой в [5–7]. Имеется, однако, важное отличие. Дело в том, что в [5–7] не рассматривалась формулировка функционала действия струны, которая бы с самого начала содержала естественный малый физический параметр. Вследствие этого имелся некоторый произвол в выборе связей для функций нулевого приближения φ^M . Фиксируя этот произвол, авторы [5–7] предположили, что координаты центра масс струны $q^M(\tau)$, формально играющие роль функций нулевого приближения φ^M , подчиняются уравнениям геодезической (11) и связям

$$(\dot{q}^M \dot{q}_M) = (\alpha' m)^2, \quad (19)$$

где параметр m интерпретировался как масса струны в искривленном пространстве. В нашем подходе, воспроизводящем все уравнения подхода [5–7], отсутствует произвол в выборе связей, поскольку используется представление для действия струны (1), классически эквивалентное представлению Намбу–Гото и содержащее в явном виде малый параметр, из которого самосогласованным образом выводятся все уравнения движения и связи, в том числе и для функций нулевого приближения. Полученная нами связь (11') на функции нулевого приближения при всех совпадающих связях, включающих функции высших приближений, совпадает с (19) лишь при $m = 0$. Это ограничение имеет принципиальное значение, поскольку требует дополнительного анализа эффектов струнной динамики в космологии, при изучении которых условие $m \neq 0$ играет существенную роль [5–7]. Изучение этих эффектов будет проведено в отдельной работе.

2. Рассмотренная в предыдущем разделе схема приближений по параметру натяжения может применяться для решения нелинейных уравнений струны в искривленных пространствах.

В связи с тем что нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для струн Намбу–Гото, представляет интерес изучение их динамики в искривленных пространствах. В пределе нулевого натяжения можно с единых позиций рассмотреть динамику целого класса протяженных нуль-объектов – нуль- p -бран, мировые гиперлисты которых являются $(p+1)$ -мерными изотропными геодезическими искривленного пространства-времени. Напомним, что случаю $p=1$ отвечает нуль-струна, случаю $p=2$ – нуль-мембрана и т.д.

Приступая к выводу уравнений движения нуль- p -бран в искривленном пространстве, заметим, что их действие может быть представлено в форме, естественным образом обобщающей представление (1) (см. [11]),

$$S = \int d^{p+1} \xi \frac{\det(\partial_\mu x^M G_{MN}(x) \partial_\nu x^N)}{E(\tau, \sigma^n)}, \quad (20)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, \dots, p$ – индексы мировой гиперповерхности нуль- p -браны ($\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma^1$, $\xi^2 = \sigma^2, \dots, \xi^p = \sigma^p$) и $E(\tau, \sigma^n)$ – $(p+1)$ -мерная гиперлистовая плотность. Детерминант индуцированной метрики $g_{\mu\nu}$ нуль- p -браны

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x^M G_{MN}(x) \partial_\nu x^N = \begin{pmatrix} \dot{x}^A G_{AB}(x) \dot{x}^B & \dot{x}^A G_{AB}(x) \partial_n x^B \\ \partial_m x^A G_{AB}(x) \dot{x}^B & \hat{g}_{mn}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{g}_{mn}(x) = \partial_m x^A G_{AB}(x) \partial_n x^B, \quad (21)$$

можно представить в факторизованном виде [13]

$$g = \dot{x}^M \tilde{\Pi}_{MN}(x) \dot{x}^N \hat{g}, \quad \hat{g} = \det \hat{g}_{mn}, \quad (22)$$

где точка обозначает дифференцирование по τ , а матрица $\tilde{\Pi}_{MN}(x)$

$$\tilde{\Pi}_{MN} = G_{MN} - G_{MB} \partial_m x^B \hat{g}^{-1mn} \partial_n x^L G_{LN} \quad (23)$$

имеет свойства проекционного оператора: $\tilde{\Pi}_{ML}(x) \tilde{\Pi}^{LN}(x) = \tilde{\Pi}_M^N(x)$. Поэтому действие (20) может быть записано следующим образом:

$$S = \frac{\int d^{p+1} \xi \dot{x}^M \tilde{\Pi}_{MN}(x) \dot{x}^N \hat{g}}{E(\tau, \sigma^n)}. \quad (24)$$

Вариация действия S_p по гиперливой плотности E дает условие вырожденности индуцированной гиперливой метрики $g_{\mu\nu}$

$$g = \det g_{\mu\nu} = 0, \quad (25)$$

выделяющее класс $(p+1)$ -мерных изотропных геодезических с нулевым гиперобъемом. Варьируя действие (24) по x^M и фиксируя калибровку условиями

$$\dot{x}^M G_{MN} \partial_m x^N = 0; \quad \left(\frac{\hat{g}}{E} \right)' = 0, \quad (26)$$

получаем уравнения движения и связи в форме

$$\begin{aligned} \ddot{x}^M + \Gamma_{PQ}^M \dot{x}^P \dot{x}^Q &= 0, \\ \dot{x}^M G_{MN} \dot{x}^N &= 0, \quad \dot{x}^M G_{MN} \partial_m x^N = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим решение уравнений движения нуль- p -бран (27) для случая D -мерной фридмановской вселенной, описываемых однородной и изотропной метрикой, которая в калибровке космического времени имеет вид

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = (dx^0)^2 - R^2(x^0) dx^i \delta_{ik} dx^k, \quad (28)$$

где $M, N = 0, 1, \dots, D-1$. Для решения уравнения (27) удобно перейти к конформному времени $\tilde{x}^0(\tau, \sigma^m)$, определяемому соотношениями

$$dx^0 = C(\tilde{x}^0) d\tilde{x}^0, \quad C(\tilde{x}^0) = R(x^0), \quad \tilde{x}^i = x^i. \quad (29)$$

В калибровке конформного времени метрика (28) переписывается в конформно-плоской форме

$$ds^2 = C(\tilde{x}^0) \eta_{MN} d\tilde{x}^M d\tilde{x}^N, \quad \eta_{MN} = \text{diag}(1, -\delta_{ij}), \quad (30)$$

с символами Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{PQ}^M(\tilde{x})$ [14]:

$$\tilde{\Gamma}_{PQ}^M(\tilde{x}) = C^{-1}(\tilde{x}) [\delta_P^M \tilde{\partial}_Q C + \delta_Q^M \tilde{\partial}_P C - \eta_{PQ} \tilde{\partial}^M C]. \quad (31)$$

С учетом (29) и (31) уравнения (27) преобразуются к виду

$$\ddot{\tilde{x}}^M + 2C^{-1} \dot{C} \dot{\tilde{x}}^M = 0, \quad (32)$$

$$\eta_{MN} \dot{\tilde{x}}^M \dot{\tilde{x}}^N = 0, \quad \eta_{MN} \dot{\tilde{x}}^M \partial_m \tilde{x}^N = 0, \quad (33)$$

где $m, n = 1, \dots, p$. Первое интегрирование этих уравнений приводит к уравнениям первого порядка

$$H^* C^2 \dot{\tilde{x}}^0 = \psi^0(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p), \quad H^* C^2 \dot{\tilde{x}}^i = \psi^i(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p), \quad (34)$$

решение которых можно представить в форме

$$\begin{aligned} \tau &= H^* \psi_0^{-1} \int_{t_0}^t dt R(t), \\ x^i(\tau, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p) &= x^i(0, \sigma, \dots, \sigma^p) + H^{*-1} \psi^i \int_0^\tau d\tau R^{-2}(t), \end{aligned} \quad (35)$$

где H^* — константа с размерностью L^{-1} , $t_0 \equiv x^0(0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p)$ и $x^i(0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p)$ и $\psi^M(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p)$ являются начальными данными задачи.

Использование решений (35) позволяет преобразовать связи (33) в связи на начальные данные задачи Коши:

$$\nu^i(\sigma^m)\nu^k(\sigma^n)\delta_{ik} = 1, \quad (36)$$

$$\partial_m x^0(0, \sigma^m) = R(x^0(0, \sigma^m))\nu^i(\sigma^n)\delta_{ik}\partial_m x^{0k}(0, \sigma^m), \quad (37)$$

где $\nu^i(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^p) = \psi^i\psi_0^{-1}$. Важно отметить, что связи (36) и (37) дополняются условиями их интегрируемости, которые имеют следующий вид:

$$\partial_m(\nu_i(\sigma^n)\partial_n x^i(0, \sigma^l)) - \partial_n(\nu_i(\sigma^n)\partial_m x^i(0, \sigma^l)) = 0, \quad (38)$$

и накладывают дополнительные ограничения на начальные данные.

Сейчас мы хотим показать, что идеальная жидкость нуль- p -бран может рассматриваться в качестве доминантного источника гравитации для фридмановской вселенной. С этой целью рассмотрим идеальную жидкость нуль- p -бран, давление $p(t)$ и плотность $\rho(t)$ которой связаны с ее тензором энергии-импульса $\langle T_{MN} \rangle$ стандартными соотношениями

$$\langle T_0^0 \rangle = \rho(t), \quad \langle T_i^j \rangle = -p(t)G_i^j. \quad (39)$$

Тензор T_{MN} нуль- p -браны находится варьированием действия (20) по метрике G_{MN} и после учета калибровочных условий (26) представляется в виде

$$T^{MN}(X) = \frac{1}{\pi\gamma^*\sqrt{|G|}} \int d\tau d^p\xi \dot{x}^M \dot{x}^N \delta^D(X^M - x^M). \quad (40)$$

Компоненты $T^{MN}(X)$ (40) после подстановки скоростей $\dot{x}^m$ (34) и последующего интегрирования по переменной τ принимают вид (выписаны ненулевые компоненты)

$$\begin{aligned} T^{00}(X) &= \frac{1}{\pi\gamma^*H^*} R^{(-D)}(t) \int d\tau d^p\xi \psi_0(\sigma^m) \delta^{D-1}(X^i - x^i(\tau, \sigma^m)), \\ T^{ik}(X) &= \frac{1}{\pi\gamma^*H^*} R^{(-D-2)}(t) \int d\tau d^p\xi \nu^i(\sigma) \nu^k(\sigma) \psi_0(\sigma) \delta^{D-1}(X^i - x^i(\tau, \sigma^m)). \end{aligned} \quad (41)$$

Отметим, что временная зависимость компонент T^{MN} факторизуется в форме скалярного множителя, пропорционального обратным степеням $R(t)$. Учет связи

$$\nu^i(\sigma^m)\nu^k(\sigma^n)\delta_{ik} = 1$$

приводит к следующему соотношению между компонентами $\langle T_{MN} \rangle$:

$$\text{Sp } T = T_0^0 + G_{ij}T^{ij} = 0. \quad (42)$$

Переход к идеальной жидкости нуль- p -бран совершается посредством усреднения по $(D-1)$ -мерному пространству тензора T_{MN} (41) отдельной нуль- p -браны. В результате такого усреднения для ненулевых компонент $\langle T_{MN} \rangle$ (41) получим

$$\langle T_0^0 \rangle = \rho(t) = \frac{A}{R^D(t)}, \quad \langle T_i^j \rangle = -p(t)R^2\delta_i^j = -\frac{\delta_i^j}{D-1} \frac{A}{R^D(t)}, \quad (43)$$

где константа A имеет размерность L^{-D} . Уравнение (42) переписывается в форме хорошо известного уравнения состояния для идеального газа безмассовых частиц:

$$\langle \text{Sp } T \rangle = \langle T_M^M \rangle = 0 \iff \rho = (D - 1)p, \quad (44)$$

полученного ранее в [4] в качестве приближенного уравнения состояния газа струн, отвечающего асимптотическому режиму коллапсирующих струн ($R(t) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$). Отметим, что вследствие различной структуры членов, описывающих взаимодействие точечных и протяженных объектов, уравнения состояний для ультрарелятивистских газов безмассовых частиц и нуль- p -бран перестают совпадать при включении дополнительных взаимодействий с внешними полями. Примером такого взаимодействия может быть взаимодействие с антисимметричным внешним полем, рассмотренное в [11].

Рассмотрим теперь идеальную жидкость нуль- p -бран как источник гравитации в уравнениях Гильберта–Эйнштейна

$$R_M^N = 8\pi G_D \langle T_M^N \rangle. \quad (45)$$

Подставляя в правую часть (45) выражения для ненулевых компонент $\langle T_M^N \rangle$ (43), получим единственное независимое уравнение для скейлингового фактора R (см. (28))

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{16\pi G_D}{(D-1)(D-2)} \frac{A}{R^D}, \quad (46)$$

которое при $D = 4$ переходит в известное уравнение Фридмана для плотности радиационно-доминированной вселенной $\kappa = 0$. Решения уравнения (46) имеют вид

$$\begin{aligned} R_I(t) &= [q(t_c - t)]^{2/D}, \quad t < t_c, \\ R_{II}(t) &= [q(t - t_c)]^{2/D}, \quad t > t_c, \end{aligned}$$

где $q = [4\pi G_D A / (D-1)(D-2)]^{1/2}$ и t_c – константа интегрирования, являющаяся сингулярной точкой метрики (28). Решения R_I описывает режим ускоренного сжатия D -мерной вселенной Фридмана ($dR/dt < 0$, $d^2 R/dt^2 < 0$) с коллапсом в момент времени $t = t_c$. В пределе $R \rightarrow 0$ и $p = 1$ аналогичный режим сжатия был получен в [4] для асимптотических конфигураций струнного газа. Второе решение R_{II} описывает режим замедленного расширения вселенной ($dR/dt > 0$, $d^2 R/dt^2 < 0$) из сверхсжатого состояния с нулевым объемом.

Таким образом, мы показали, что идеальная жидкость нуль- p -бран может рассматриваться как доминантный источник гравитации D -мерной вселенной Фридмана с $\kappa = 0$, альтернативный жидкости ультрарелятивистских безмассовых частиц.

В дополнение к рассмотренному лагранжеву описанию приведем выражение для плотности гамильтониана нуль- p -браны, вытекающее из представления (19):

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4} E \hat{g}^{-1} G^{MN} \mathcal{P}_M \mathcal{P}_N, \quad (47)$$

а также выражение для полного гамильтониана нуль- p -браны в искривленном пространстве-времени, включающее репараметризационные связи:

$$H = \int d^p \xi \left[\lambda^m (G_{MN} \partial_m x^N \mathcal{P}^M) + \frac{E}{4\hat{g}} G^{MN} \mathcal{P}_M \mathcal{P}_N + \omega \mathcal{P}_{(E)} \right], \quad (48)$$

где λ^m , E , ω — множители Лагранжа, отвечающие репараметризационным связям, а $\mathcal{P}_{(E)}$ — канонический импульс для листовой плотности E . Этот гамильтониан может использоваться для изучения гамильтонова формализма для нуль- p -бран в искривленном пространстве-времени и построения квантовой картины, обобщающей результаты [13] на искривленное пространство-время.

В заключение отметим, что в последнее время в связи с развитием M -теории струн и мембран (см., например, [15, 16]) струны и мембраны без натяжения привлекают большое внимание, в частности, ввиду их связи с инстантонами и фазовыми переходами в M -теории [17–20]. Поэтому представляется интересным применение рассмотренного здесь пертурбативного подхода в M -теории. Отметим также интересные недавние работы [21, 22], обобщающие результаты работы [23], в которых изучены решения уравнений нуль-струны в пространстве Шварцшильда и других искривленных пространствах.

После завершения настоящей работы авторам стали известны работы [24] и [25], в которых изучался подход, основанный на рассмотрении нуль-струн в качестве нулевого приближения по натяжению²⁾. Несмотря на сходство поставленных задач работы [24, 25] и, в частности, полученные в них результаты отличаются от нашей работы. Авторы указанных работ используют подход, основанный на разложении по ε вида (13), однако с функциями нулевого и первого приближений, зависящими от пространственной листовой переменной σ . Как следствие такого разложения авторы [24, 25] не получают осцилляторного режима для функций первого приближения. Появление осцилляторного режима, однако, является естественным с физической точки зрения, поскольку включение натяжения с необходимостью приводит к колебаниям струны. В нашем подходе, напротив, все функции в разложении (13) должны зависеть от переменной $\xi = \sigma/\varepsilon$, поскольку параметр ε вводится в функции n -го приближения простым переопределением переменной $\sigma \rightarrow \xi$ (12), в результате чего функции первого приближения $\psi^M(\tau, \xi)$ удовлетворяют осцилляторному уравнению (16).

А. А. Желтухин благодарит Г. Венециано, А. А. Водянишского, М. Дабровского, А. Ларсена, С. П. Новикова, Е. С. Фрадкина и В. П. Фролова за плодотворные обсуждения и выражает признательность А. Зикики и Н. Санчес за поддержку и теплый прием в Международном центре им. Э. Майораны.

Работа частично поддержана грантом INTAS и правительства Голландии (№ 94-2317), грантами INTAS (№ 93-633-ext, 93-127-ext), а также грантом по физике высоких энергий ГКНТ Украины.

Список литературы

- [1] *G. Veneziano*. Status of String Cosmology. In: Proceedings of the Erice Course “String Gravity and Physics at the Planck Scale”. Eds N. Sanches and A. Zichichi. NATO ASI Series, 1996. P. 285–304.
- [2] *M. Gasperini, G. Veneziano*. Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 2519.
- [3] *N. Sanchez, G. Veneziano*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 253.
- [4] *M. Gasperini, N. Sanchez, G. Veneziano*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 364. P. 653; CERN Preprints TH. 5893/91; TH. 5010/91.
- [5] *H. J. de Vega, N. Sanchez*. Phys. Lett. B. 1987. V. 197. P. 320.
- [6] *H. J. de Vega, N. Sanchez*. String Quantum Gravity. String Theory in Curved Space. In: Proceedings of the Erice Course “String Gravity and Physics at the Planck Scale”. Eds N. Sanches and A. Zichichi. NATO ASI Series, 1996. P. 11.

²⁾ А. Желтухин благодарит А. Николаидиса, приславшего свою работу [24].

- [7] *H. J. de Vega, N. Sanchez.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 309. P. 552.
- [8] *A. Schild.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 1722.
- [9] *A. Karlhede, O. Lindstrom.* Class. Quantum Gravit. 1986. V. 3. P. 73.
- [10] *A. A. Желтухин.* Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 208; ЯФ. 1988. Т. 48. С. 587.
- [11] *A. A. Желтухин.* ЯФ. 1990. Т. 51. С. 1504; *A. A. Zheltukhin.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 364. P. 265.
- [12] *M. Green, J. Schwarz, E. Witten.* Superstring Theory. V. I. Cambridge University Press, 1987.
- [13] *I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin.* Fortschr. Phys. 1993. V. 41. P. 619.
- [14] *А. З. Петров.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
- [15] *J. H. Schwarz.* Lectures superstring and *M* theory dualities. Preprint hep-th/9607201.
- [16] *J. Polchinski, S. Chaudhuri, C. V. Johnson.* Notes on *D*-branes. Preprint hep-th/9602052.
- [17] *E. Witten.* Small instantons in string theory. Preprint hep-th/954030.
- [18] *A. Strominger.* Open *p*-branes. Preprint hep-th/9512059.
- [19] *M. Bershadsky, C. Vafa, V. Sadov.* *D*-strings on *D*-manifolds. Preprint HUTP-95/A035. Harvard.
- [20] *A. Hanany, I. Klebanov.* One tensionless strings in 3 + 1 dimensions. Preprint hep-th/9606136.
- [21] *S. Kar.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 6842.
- [22] *M. P. Dabrowski, A. L. Larsen.* Null strings in Schwarzschild spacetime. Preprint hep-th/9610243.
- [23] *S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin.* Class. Quantum Gravit. 1995. V. 12. P. 2529.
- [24] *H. J. de Vega, A. Nicolaidis.* Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 214.
- [25] *C. O. Lousto, N. Sanchez.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 6399.

Поступила в редакцию 15.VI.1995 г.,
после доработки 23.I.1997 г.

A. A. Zheltukhin, S. N. Roshchupkin

AN APPROXIMATE DESCRIPTION OF STRING AND *p*-BRANE DYNAMICS IN CURVED SPACE-TIMES

A new formulation for the action of the Nambu–Goto string moving in curved space-time is studied. The action contains a two-dimensional “cosmological” world-sheet term multiplied by a tension parameter. It is shown that the consideration of this cosmological term as a perturbative addition allows one to linearise nonlinear equation for the string. It is argued that in zero approximation with respect to tension of strings and membranes can be considered as dominant gravitation sources for the Friedmann universe with $\kappa = 0$.