Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Хрусталеv, М. В. Чичикина, Переменные Боголюбова для релятивистски-инвариантных систем, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 413–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:16:51

О. А. Хрусталеv*, М. В. Чичикина*

ПЕРЕМЕННЫЕ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

Продолжается рассмотрение релятивистски-инвариантных систем, начатое в работе [1]. Проводится редукция числа состояний поля. Приводятся выражения для интегралов движения в нулевом порядке по обратным степеням константы связи как производных по групповым переменным.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] решалась задача нахождения условий применимости теории возмущений к системам с сильной связью, инвариантным относительно преобразований группы Пуанкаре. Для определенности рассматривалось поле в (1+1)-мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$L(x) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Phi_\alpha\Phi_\beta - g^2V\left(\frac{1}{g}\Phi\right). \quad (1.1)$$

Лагранжиан инвариантен относительно преобразований группы Пуанкаре, взаимодействие является сильным, безразмерный параметр $g \gg 1$. Тогда главным эффектом взаимодействия будет рождение классического поля.

Напомним основные результаты работы [1]. Было определено преобразование Боголюбова

$$f(x) = gv(x') + u(x') \quad (1.2)$$

и наложены дополнительные условия, уравнивающие число переменных в левой и правой частях уравнения (1.2):

$$\omega(N^a, u) = \int_C d\lambda \left(\tilde{N}_n^a(x')u(x') - \tilde{N}^a(x')u_n(x') \right) = 0. \quad (1.3)$$

Функции $N^a(x')$ задаются формулами (1.2.5)¹⁾.

¹⁾(1.2.5) обозначает формулу (2.5) работы [1] (и т.д.).

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khrust@bog.msu.su; chichikina@hep.phys.msu.su

В терминах переменных Боголюбова было проведено вторичное квантование. Были определены самосопряженные операторы

$$\hat{q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f_n(x) + i \frac{\delta}{\delta f(x)} \right), \quad \hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f(x) - i \frac{\delta}{\delta f_n(x)} \right),$$

удовлетворяющие формальному коммутационному соотношению

$$[\hat{q}(x), \hat{p}(x')] = i\delta(x - x'),$$

что позволяет трактовать $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$ как операторы координаты и импульса и развить схему вторичного квантования. Однако, как отмечалось в работе [1], использование этих векторов приводит к удвоению числа возможных состояний поля. Редукция числа состояний поля является задачей настоящей статьи.

Интегралы движения, порождаемые группой симметрии лагранжиана (1.1), представляют собой вектор энергии-импульса и генератор преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} P_0 &= \beta \int d\lambda \left(\frac{1}{2} u^2(x') + \frac{1}{2} u_\lambda^2(x') + V \right) - \alpha \int_C d\lambda (u_\lambda(x') u_n(x')), \\ P_1 &= -\alpha \int d\lambda \left(\frac{1}{2} u^2(x') + \frac{1}{2} u_\lambda^2(x') + V \right) + \beta \int_C d\lambda (u_\lambda(x') u_n(x')), \\ M &= \int_C \lambda d\lambda \left(\frac{1}{2} u_n^2(x') + \frac{1}{2} u_\lambda^2(x') + V \right). \end{aligned}$$

В [1] было найдено необходимое условие применимости теории возмущений: при выполнении граничных условий

$$F_\lambda(x') Q(x')|_{\partial C} = 0, \quad F_n(x') Q(x')|_{\partial C} = 0, \quad \lambda F_\lambda(x') Q(x')|_{\partial C} = 0$$

(выражения для $F(x')$, $Q(x')$, $P(x')$ см. в [1, раздел 4]) $F(x')$ должно быть решением уравнения движения

$$F_{tt} - F_{xx} + V'(F) = 0,$$

а $N^a(x')$ и $u(x')$ – решениями уравнения

$$y_{tt} - y_{xx} + V''(F)y = 0.$$

Задачей настоящей статьи является нахождение выражения для оператора поля с точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи.

С этой целью необходимо построить пространство состояний системы, на котором можно провести редукцию числа состояний поля и найти выражения для интегралов движения в нулевом порядке по обратным степеням константы связи как производных по генераторам группы симметрии.

2. РЕДУКЦИЯ ЧИСЛА ПОЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Напомним, что, рассматривая функции $f(x)$ и $f_n(x)$ как независимые, мы удвоили число независимых переменных. Дополнительные условия (1.3), связывающие $u(x')$ и $u_n(x')$, свели число независимых переменных (за вычетом групповых переменных) к $(2 \cdot \infty - 3)$. Чтобы свести их число к $(\infty - 3)$, нужны еще три дополнительных условия. Для их формулировки вернемся к операторам $Q(x')$ и $P(x')$ работы [1]:

$$\begin{aligned} Q(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u(x') + i \frac{\delta}{\delta u_n(x')} - \tilde{N}^b(x') r_b \right), \\ P(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_n(x') - i \frac{\delta}{\delta u(x')} - \tilde{N}_n^b(x') r_b \right) \end{aligned}$$

(r_b определены в [1, раздел 4]).

Представим $u(x')$, $u_n(x')$ в виде

$$u(x') = w(x') + \tilde{N}^a(x') r_a, \quad u_n(x') = w_n(x') + \tilde{N}_n^a(x') r_a. \quad (2.1)$$

Будем считать, что эти соотношения выражают $u(x')$, $u_n(x')$ в терминах независимых переменных r_a и новых функций $w(x')$, $w_n(x')$. Очевидно, что это возможно только в том случае, если (w, w_n) связаны тремя линейными соотношениями.

Эти соотношения можно сформулировать следующим образом. Из (2.1) следует, что $w(x')$ и $w_n(x')$ можно представить в форме

$$\begin{aligned} w(x') &= w(x') - M_a(x') \omega(\tilde{N}^a, w) + \tilde{N}^a(x') \omega(M_a, w) - \\ &\quad - \tilde{N}^a(x') \omega(M_a, M_b) \omega(\tilde{N}^b, w), \\ w_n(x') &= w_n(x') - M_{na}(x') \omega(\tilde{N}^a, w) + \tilde{N}_n^a(x') \omega(M_a, w) - \\ &\quad - \tilde{N}_n^a(x') \omega(M_a, M_b) \omega(\tilde{N}_n^b, w) \end{aligned} \quad (2.2)$$

($M_a(x')$ определяются формулами (1.2.56)). Если выбрать $\tilde{N}^a(x')$ так, чтобы выполнялись условия $\omega(\tilde{N}^a, \tilde{N}^b) = 0$, то соотношения (2.2) можно сформулировать в виде шести условий, которым удовлетворяют $w(x')$, $w_n(x')$:

$$\omega(\tilde{N}^a, w) = 0, \quad \omega(M_a, w) = 0. \quad (2.3)$$

Операторы Q , P в терминах новых переменных принимают вид

$$Q(x') = \hat{Q}(x') + q(x'), \quad P(x') = \hat{P}(x') + p(x'),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Q}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(w(x') + i \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right), & \hat{P}(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(w_n(x') - i \frac{\delta}{\delta w(x')} \right), \\ q(x') &= i \frac{\delta r_a}{\delta u_n(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}, & p(x') &= -i \frac{\delta r_a}{\delta u(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}. \end{aligned}$$

Следствием соотношений (1.3) является линейная зависимость между функциональными производными по $w(x')$ и $w_n(x')$:

$$\int_C d\lambda \left(N^a(x') \frac{\delta}{\delta w(x')} + N_n^a(x') \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right) = 0,$$

$$\int_C d\lambda \left(M_a(x') \frac{\delta}{\delta w(x')} + M_{an}(x') \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right) = 0.$$

В терминах переменных $w(x')$, $w_n(x')$ и r_a вариационные производные по $u(x')$ и $u_n(x')$ имеют вид

$$\frac{\delta}{\delta u(x')} = \frac{\delta}{\delta w(x')} + \frac{\delta r_a}{\delta u(x')} \frac{\partial}{\partial r_a}, \quad \frac{\delta}{\delta u_n(x')} = \frac{\delta}{\delta w_n(x')} + \frac{\delta r_a}{\delta u_n(x')} \frac{\partial}{\partial r_a},$$

где

$$\frac{\delta r_a}{\delta u(x')} = -M_{na}(x') + \omega(M_a, M_b) \tilde{N}_n^b(x'), \quad \frac{\delta r_a}{\delta u_n(x')} = M_a(x') - \omega(M_a, M_b) \tilde{N}^b(x').$$

Необходимую редукцию числа состояний можно осуществить следующим образом: пусть состояние поля определяют такие функционалы $w(x')$ и $w_n(x')$, на которых $\frac{\delta}{\delta w(x')}$ и $\frac{\delta}{\delta w_n(x')}$ сводятся к операторам:

$$\frac{\delta}{\delta w(x')} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta w(x')} - iw_n(x'), \quad \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \longrightarrow -iw(x'). \quad (2.4)$$

Тогда

$$\hat{Q}(x') \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} w(x'), \quad \hat{P}(x') \longrightarrow i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\delta w(x')}.$$

После такой редукции независимые переменные сводятся к следующим: (3 групповых параметра) + (3 переменные r_a) + (пространство функций $w(x')$ размерности $\infty - 3$).

Переменные r_a не имеют физического смысла. Их происхождение связано с редукцией пространства состояний в терминах переменных Боголюбова. Ниже будет показано, что выделение этих переменных обусловлено структурой интегралов движения в нулевом порядке, т.е. имеет динамическую природу.

3. ПРИМЕР РЕДУКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯ

Не ограничивая общности, можно рассмотреть случай, когда функция $F(x')$ удовлетворяет на прямой C условию $F_n(x') = 0$. Тогда

$$M_\alpha(x') = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_\alpha F_\lambda(x'), \quad M_{n\alpha}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}} n_\alpha F_{nn}(x'),$$

$$M_2(x') = 0, \quad M_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda F_{nn}(x') + F_\lambda(x')).$$

Необходимые соотношения

$$\omega(\tilde{N}^a, M_b) = \delta_b^a, \quad \omega(\tilde{N}^a, \tilde{N}^b) = 0$$

выполняются, если определить $\tilde{N}^\alpha(x')$ формулами

$$\begin{aligned}\tilde{N}_\alpha(x') &= A n_\alpha F_{nn}(x'), & \tilde{N}_n^\alpha(x') &= B e_\alpha F_\lambda(x'), \\ \tilde{N}^2(x') &= b_1 \lambda F_{nn}(x') + b_2 F_\lambda(x'), & \tilde{N}_n^2(x') &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{A}{\sqrt{2}} \int_C d\lambda F_{nn}^2(x') &= -1, & \frac{B}{\sqrt{2}} \int_C d\lambda F_\lambda^2(x') &= 1, \\ b_1 &= -b \int_C d\lambda F_\lambda^2(x'), & b_2 &= b \int_C d\lambda \lambda F_{nn}(x') F_\lambda^2(x'), \\ b &= \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{4} \left(\int d\lambda F_{nn}(x') F(x') \right)^2 - \int d\lambda F_\lambda^2(x') \int d\lambda \lambda^2 F^2(x')}. \quad (3.1)\end{aligned}$$

Условия (2.2), которым должны удовлетворять функции $w(x')$, $w_n(x')$, принимают вид

$$\begin{aligned}w(x') &= w(x') - \frac{\int d\lambda F_\lambda(x') w(x')}{\int d\lambda F_\lambda^2(x')} F_\lambda(x') - \\ &\quad - \frac{\int d\lambda F_{nn}(x') w(x')}{\int d\lambda F_{nn}^2(x')} F_{nn}(x') - \frac{\int d\lambda N^{(2)}(x') w(x')}{\int d\lambda (N^{(2)}(x'))^2} N^{(2)}(x'), \\ w_n(x') &= w_n(x') - \frac{\int d\lambda F_\lambda(x') w_n(x')}{\int d\lambda F_\lambda^2(x')} F_\lambda(x') - \\ &\quad - \frac{\int d\lambda F_{nn}(x') w_n(x')}{\int d\lambda F_{nn}^2(x')} F_{nn}(x') - \frac{\int d\lambda N^{(2)}(x') w_n(x')}{\int d\lambda (N^{(2)}(x'))^2} N^{(2)}(x').\end{aligned}$$

Они показывают, что $w(x')$ и $w_n(x')$ получаются из независимых функций $f(x)$ и $f_n(x)$ одним и тем же самосопряженным проектированием, что позволяет, например, перейти к переменным $z(x')$ и $z^*(x')$ и связанному с ними голоморфному представлению.

4. НУЛЕВОЙ ПОРЯДОК ПО g

В нулевом порядке по g интегралы движения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}H_0 &= i n^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_{01} + H_{02} + H_{03}, \\ P_0 &= i e^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + P_{01} + P_{02} + P_{03}, \\ M_0 &= i \frac{\partial}{\partial \tau^2} + i \Im^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + M_{01} + M_{02} + M_{03},\end{aligned}$$

где $\Im^\alpha = t_\beta^\alpha \tau^\beta$ (t_β^α см. в [1, раздел 2]),

$$H_{01} = \frac{1}{2} \int d\lambda (\hat{P}^2(x') + \hat{Q}_\lambda^2(x') + V''(F) \hat{Q}^2(x')), \quad (4.1a)$$

$$H_{02} = i \int d\lambda \left(w_n(x') \frac{\delta}{\delta w(x')} + w_{nn}(x') \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right), \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} H_{03} = & \frac{1}{2} \int d\lambda (p^2(x') + q_\lambda^2(x') + V''(F)q^2(x')) + \\ & + ir_c \frac{\partial}{\partial r_b} \int d\lambda \left(\tilde{N}_n^c(x') \frac{\delta r_b}{\delta u(x')} - \tilde{N}_{nn}^c(x') \frac{\delta r_b}{\delta u_n(x')} \right) + \\ & + r_c r_a \int d\lambda (\tilde{N}_n^c(x') \tilde{N}_n^a(x') - \tilde{N}_{nn}^c(x') \tilde{N}^a(x')), \end{aligned} \quad (4.1b)$$

$$P_{01} = \int d\lambda \hat{Q}_\lambda(x') \hat{P}(x'),$$

$$P_{02} = i \int d\lambda \left(w_n(x') \frac{\delta}{\delta w(x')} + w_{\lambda n} \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right),$$

$$\begin{aligned} P_{03} = & \int d\lambda q_\lambda(x') p(x') + ir_c \frac{\partial}{\partial r_b} \int d\lambda \left(\tilde{N}_\lambda^c(x') \frac{\delta r_b}{\delta u(x')} - \tilde{N}_{\lambda n}^c(x') \frac{\delta r_b}{\delta u_n(x')} \right) + \\ & + r_c r_a \int d\lambda (\tilde{N}_\lambda^c(x') \tilde{N}_n^a(x') - \tilde{N}_{\lambda n}^c(x') \tilde{N}^a(x')), \end{aligned}$$

$$M_{01} = \frac{1}{2} \int d\lambda \lambda (\hat{P}^2(x') + \hat{Q}_\lambda^2(x') + V''(F)\hat{Q}^2(x')),$$

$$M_{02} = i \int d\lambda \left(\lambda w_n(x') \frac{\delta}{\delta w(x')} + (\lambda w_{nn}(x') + w_\lambda(x')) \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \right),$$

$$\begin{aligned} M_{03} = & \frac{1}{2} \int d\lambda \lambda (p^2(x') + q_\lambda^2(x') + V''(F)q^2(x')) + \\ & + ir_c \frac{\partial}{\partial r_b} \int d\lambda \left(\lambda \tilde{N}_n^c(x') \frac{\delta r_b}{\delta u(x')} - (\lambda \tilde{N}_{nn}^c(x') + \tilde{N}_\lambda^c(x')) \frac{\delta r_b}{\delta u_n(x')} \right) + \\ & + r_c r_a \int d\lambda (\lambda \tilde{N}_n^c(x') \tilde{N}_n^a(x') - (\lambda \tilde{N}_{nn}^c(x') + \tilde{N}_\lambda^c(x')) \tilde{N}^a(x')). \end{aligned}$$

Обозначим перечисленные выше операторы символами O_{0a} . Все они действуют в пространстве векторов вида $F[w, w_n]F[r]$, причем O_{01} и O_{02} действуют в пространстве векторов $F[w, w_n]$, а операторы O_{03} – в пространстве векторов $F[r]$. Указанные пространства ортогональны.

Оператор H_{02} в форме (4.16) по своей структуре есть оператор смещения вдоль нормали к прямой C . Оператор H_{01} , будучи гамильтонианом системы, описываемой операторами $\hat{Q}(x')$ и $\hat{P}(x')$, имеет тот же смысл. Покажем, что H_{02} отличается от H_{01} только знаком, поэтому они взаимно уничтожаются в представлении H_0 . С точностью до слагаемых порядка $O(t^2)$ справедливо представление $w(x)$ в виде ряда:

$$w(x) = \sum \varphi_s(x) c_s(t),$$

где $\varphi(x)$ – ортонормированные функции, являющиеся решением уравнений

$$-\varphi_{sxx}(x) + V''(F(0, x))\varphi_s(x) = \omega_s^2 \varphi_s(x), \quad \int dx \varphi_s(x) \varphi_p(x) = \delta_{sp}.$$

Операторы рождения и уничтожения могут быть определены следующим образом:

$$a_s^+(t) = \sqrt{\omega_s} c_s(t) - \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}} \frac{\partial}{\partial c_s}(t), \quad a_s(t) = \sqrt{\omega_s} c_s(t) + \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}} \frac{\partial}{\partial c_s}(t).$$

Функция $w(x')$, заданная в форме ряда по $\varphi_s(x)$, будет (по крайней мере при малых t) удовлетворять волновому уравнению, если зависимость a и a^+ от времени определяется уравнениями Гайзенберга:

$$a_s(t) = e^{-i\omega_s t} a_s, \quad a_s^+(t) = e^{i\omega_s t} a_s^+.$$

Зависимость w от t имеет вид

$$w(t) = \sum_s \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}} \varphi_s(x) (a_s e^{-i\omega_s t} + a_s^+ e^{i\omega_s t}),$$

$$w_t(t) = -i \sum_s \frac{\sqrt{\omega_s}}{2} \varphi_s(t) (a_s e^{-i\omega_s t} - a_s^+ e^{i\omega_s t}).$$

Прямым вычислением получаем соотношение $\hat{P} = 2w_t|_{t=0}$, подстановка которого в выражения H_{01} и H_{02} показывает, что после редукции операторов дифференцирования по $w(x')$, $w_n(x')$ (см. (2.4)) сумма операторов H_{01} и H_{02} действительно обращается в нуль. После этого H_0 принимает вид

$$H_0 = in^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + H_{03}.$$

Оператор P_{02} является оператором смещения вдоль прямой C и взаимно уничтожается с оператором импульса системы P_{01} , так что оператор P_0 принимает аналогичный вид:

$$P_0 = ie^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + P_{03}.$$

В свою очередь, оператор M_{02} описывает поворот на угол ϕ и компенсируется оператором лоренцева поворота M_{01} , так что оператор M_0 имеет вид

$$M_0 = i \frac{\partial}{\partial \tau^2} + i\Im^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha} + M_{03}.$$

Операторы O_{03} содержат только избыточные переменные r_a , $\frac{\partial}{\partial r_a}$. Эти переменные следует удалить. С этой целью введем обозначения

$$r_{\parallel} = e^\alpha r_\alpha, \quad r_{\perp} = n^\alpha r_\alpha,$$

$$x_0 = \frac{r_{\parallel}}{\sqrt{\int d\lambda F_\lambda^2}}, \quad x_1 = i \frac{r_{\perp}}{\sqrt{\int d\lambda F F_{nn}}}, \quad x_2 = ib \sqrt{\frac{b}{\sqrt{2}}},$$

$$a = \sqrt{\int d\lambda F_{nn} F}, \quad p = \sqrt{\int d\lambda F_\lambda^2}, \quad c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{b}}, \quad d = \frac{1}{c} \left(p^2 - \frac{1}{2} a^2 \right)$$

(b задается формулой (3.1)).

Если выполняются условия

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{4}{\beta} - i \left(\frac{\mu}{2} + \frac{c}{a^2} \right) \right), \quad \gamma = \frac{1}{a^2} \left(i \frac{p^2 d}{3} - \frac{4c}{\beta} \right), \quad \mu = \frac{4d}{3\omega^2}$$

и β удовлетворяет уравнению

$$\beta^2 - i \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{3c}{2a^2} + \frac{d}{\omega^2} \right) \beta + \frac{6}{\omega^2} = 0,$$

то на векторе состояния

$$f = \exp(\alpha x_0^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_2^2 + \mu x_0 x_2)$$

слагаемые, зависящие от r_a , коммутируют, средние P_{03} и M_{03} равны нулю, среднее H_{03} можно обратить в нуль соответствующей перенормировкой. Таким образом, эти слагаемые могут быть удалены.

После удаления избыточных переменных интегралы движения в нулевом порядке сводятся к следующим:

$$P_\alpha = i \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha}, \quad M = i \frac{\partial}{\partial \tau^2} + i \Im^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau^\alpha}.$$

Они удовлетворяют перестановочным соотношениям генераторов группы Пуанкаре

$$[P_0, P_1] = 0, \quad [M, P_\alpha] = -g_{0\alpha} P_1 + g_{1\alpha} P_0.$$

Уравнения Гайзенберга

$$\frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} = i[P_\alpha, Z], \tag{4.2a}$$

$$\left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} \right) Z = i[M, Z] \tag{4.2б}$$

для поля $\psi(x)$ имеют вид

$$\frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial Z}{\partial \tau^\alpha},$$

$$\left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} \right) Z = -\left(\frac{\partial}{\partial \phi} + \tau^0 \frac{\partial}{\partial \tau^1} + \tau^1 \frac{\partial}{\partial \tau^0} \right) Z$$

с граничными условиями $\psi|_c = q$, $\psi_n|_c = p$. Решением уравнений (4.2a) являются функции вида

$$Z = Z(x^\alpha - \tau^\alpha),$$

а уравнений (4.2б) – функции вида

$$Z = Z(A_\beta^\alpha(\phi)(x^\alpha - \tau^\alpha)).$$

Оператор поля $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = gF(x') + \widehat{\Phi}(x') + \frac{\delta r_a}{\delta u_n(x')} \frac{\partial}{\partial r_a} + \frac{1}{g} A(x'),$$

где $\widehat{\Phi}(x')$ есть решение волнового уравнения

$$\widehat{\Phi}_{tt} - \widehat{\Phi}_{xx} + Y(x)\widehat{\Phi} = 0$$

с граничными условиями на C :

$$\widehat{\Phi} = \widehat{Q}(x'), \quad \widehat{\Phi}_t = \widehat{P}(x').$$

Перестановочная функция $D(x', x'') = [\psi(x'), \psi(x'')]$ имеет вид

$$D(x', x'') = [F(x'), A(x'')] + [A(x'), F(x'')] + [\widehat{\Phi}(x'), \widehat{\Phi}(x'')].$$

На прямой C производная функции $D(x', x'')$ по времени с учетом граничных условий равна

$$D_t(x', x'') = [\hat{q}(x')\hat{p}(x'')] = [F(x') A_n(x'')] + [A(x'), F_n(x'')] + [Q(x'), P(x'')].$$

Последнее слагаемое представляет собой следующее выражение:

$$\begin{aligned} [\widehat{Q}(x'), \widehat{P}(x'')] &= i \left(\delta(x' - x'') - \frac{F_\lambda(x') F_\lambda(x'')}{\int d\lambda F_\lambda^2} - \frac{F_{nn}(x') F_{nn}(x'')}{\int d\lambda F_\lambda^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\widetilde{N}^{(2)}(x') \widetilde{N}^{(2)}(x'')}{\int d\lambda (\widetilde{N}^{(2)})^2} \right) = i(\delta(x' - x'') + \widetilde{L}), \end{aligned}$$

а сумма первого и второго равна

$$\begin{aligned} L &= [F(x'), A_n(x'')] + [A(x'), F_n(x'')] = \widetilde{N}_n^a(x'') M_a(x') - \widetilde{N}^a(x') M_{an}(x'') = \\ &= \frac{F_\lambda(x') F_\lambda(x'')}{\int d\lambda F_\lambda^2} - \frac{F_{nn}(x') F_{nn}(x'')}{\int d\lambda F_\lambda^2} - \widetilde{N}^{(2)}(x') M_{2n}(x''). \end{aligned}$$

Операторы $\widehat{Q}(x')$ и $\widehat{P}(x')$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и $w(x')$ (см. (2.3)), и, следовательно, действуют на векторы вида

$$\eta(x') = \frac{\int d\lambda F_\lambda w}{\int d\lambda F_\lambda^2} F_\lambda(x') - \frac{\int d\lambda F_{nn} w}{\int d\lambda F_{nn}^2} F_{nn}(x') - \frac{\int d\lambda \widetilde{N}^{(2)} w}{\int d\lambda (\widetilde{N}^{(2)})^2} \widetilde{N}^{(2)}(x').$$

Сумма операторов L и $\widetilde{L}$ на векторе η равна нулю. Поэтому

$$[\hat{q}(x'), \hat{p}(x'')] = i\delta(x' - x'').$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе решалась задача нахождения векторов состояния системы с сильной связью, инвариантной относительно преобразования группы Пуанкаре. Перечислим основные результаты, полученные в работе.

1. Построено пространство состояний системы, на котором проведена редукция числа состояний поля.

2. Выделены и удалены из динамической схемы избыточные переменные.

3. Найдены выражения для интегралов движения в нулевом порядке по обратным степеням константы связи как производных по генераторам группы симметрии.

4. Найдено выражение для оператора поля с точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи.

Итак, дано полностью релятивистски-инвариантное описание квантовой системы с ненулевой классической компонентой. Все вычисления были сделаны в нулевом порядке. Подобным же образом могут быть проведены вычисления для более высоких порядков.

В дальнейшем предложенная схема может быть развита для конкретных систем с заданным взаимодействием.

Список литературы

- [1] О. А. Хрусталеv, М. В. Чичикина. ТМФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 242–251.

Поступила в редакцию 11.XII.1996 г.

O. A. Khrustalev, M. V. Chichikina

BOGOLIUBOV GROUP VARIABLES FOR THE RELATIVISTICALLY INVARIANT SYSTEMS

Bogoliubov group variables for the relativistically invariant systems are considered [1]. Reduction of states number is performed. Expressions for the integrals of motion in the zero-point order with respect to inverted powers of the coupling constant are given as derivatives with respect to group variables.