Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Соловьев, Базис Картана–Вейля для дубля янгиана $DY(sl_3)$, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 423–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1019>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:46:28

А. В. Соловьев*

БАЗИС КАРТАНА–ВЕЙЛЯ ДЛЯ ДУБЛЯ ЯНГИАНА $DY(sl_3)$

Построена реализация янгиана $Y(sl_3)$ в терминах элементов Картана–Вейля. На языке этой реализации получены в явном виде формулы для коумножения в $Y(sl_3)$, описан квантовый дубль янгиана $DY(sl_3)$ и вычислена универсальная R -матрица.

1. ВВЕДЕНИЕ

Янгиан $Y(g)$ простой алгебры Ли g был введен Дринфельдом в работе [1]. Там же было показано, что рациональные R -матрицы находятся с помощью конечномерных неприводимых представлений янгианов. Вторая реализация янгианов, введенная в [2], оказалась удобной для описания этих представлений. Однако такая реализация (в терминах образующих Шевалле, соотношений типа Серра) не дает нам линейного базиса. Это является препятствием к построению квантового дубля $DY(g)$ и универсальной R -матрицы, которые играют важную роль в физических приложениях.

В данной работе вводится новый набор образующих для $Y(sl_3)$ – аналог элементов Картана–Вейля. В терминах этих элементов дано явное описание дубля $DY(sl_3)$, в частности получены формулы коумножения (теорема 5.2), и найдено выражение для универсальной R -матрицы.

Автор благодарен своему руководителю С. М. Хорошкину, многочисленные беседы с которым легли в основу данной работы, а также признателен Ф. Ф. Воронову, оказавшему значительную помощь в процессе работы над текстом.

2. ЯНГИАН $Y(G)$

Пусть g – простая алгебра Ли над полем комплексных чисел. Зафиксируем базис простых корней $\{\alpha_i\}$, $i \in \Gamma$, с матрицей Картана $A_{i,j}$. Обозначим через $\Delta_+(g)$ множество положительных корней. Янгиан $Y(g)$ является деформацией универсальной обертывающей алгебры $U(g[t])$. Его можно задать с помощью образующих (см. [2]) $e_{i,j}$,

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: sashas@math.mit.edu

$f_{i,j}, h_{i,j}$, $i \in \Gamma$, $j \geq 0$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
[h_{i,k}, h_{j,l}] &= 0, & [h_{i,0}, e_{j,l}] &= (\alpha_i, \alpha_j) e_{j,l}, \\
[h_{i,0}, f_{j,l}] &= -(\alpha_i, \alpha_j) f_{j,l}, & [e_{i,k}, f_{j,l}] &= \delta_{i,j} h_{i,k+l}, \\
[h_{i,k+1}, e_{j,l}] - [h_{i,k}, e_{j,l+1}] &= \frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_j) \{h_{i,k}, e_{j,l}\}, \\
[h_{i,k+1}, f_{j,l}] - [h_{i,k}, f_{j,l+1}] &= -\frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_j) \{h_{i,k}, f_{j,l}\}, \\
[e_{i,k+1}, e_{j,l}] - [e_{i,k}, e_{j,l+1}] &= \frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_j) \{e_{i,k}, e_{j,l}\}, \\
[f_{i,k+1}, f_{j,l}] - [f_{i,k}, f_{j,l+1}] &= -\frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_j) \{f_{i,k}, f_{j,l}\},
\end{aligned} \tag{2.1a}$$

где $\{a, b\} = ab + ba$. Еще две группы соотношений, определяющих янгиан, мы будем называть соотношениями типа Серра:

$$\begin{aligned}
\text{Sym}_{\{k\}} [e_{i,k_1} [e_{i,k_2} \dots [e_{i,k_{n_{i,j}}}, e_{j,l}] \dots]] &= 0, \\
\text{Sym}_{\{k\}} [f_{i,k_1} [f_{i,k_2} \dots [f_{i,k_{n_{i,j}}}, f_{j,l}] \dots]] &= 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

здесь $i \neq j$, $n_{i,j} = 1 - A_{i,j}$, а $\text{Sym}_{\{k\}}$ обозначает симметризацию по переменным $k_1, \dots, k_{n_{i,j}}$.

Структура биалгебры (а затем и алгебры Хопфа) задается с помощью коумножения Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x, & x &\in g, \\
\Delta(e_{i,1}) &= e_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,1} + h_{i,0} \otimes e_{i,0} - \sum_{\gamma \in \Delta_+(g)} f_\gamma \otimes [e_{i,0}, e_\gamma], \\
\Delta(f_{i,1}) &= f_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,1} + f_{i,0} \otimes h_{i,0} + \sum_{\gamma \in \Delta_+(g)} [f_{i,0}, f_\gamma] \otimes e_\gamma, \\
\Delta(h_{i,1}) &= h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} - \sum_{\gamma \in \Delta_+(g)} (\alpha_i, \gamma) f_\gamma \otimes e_\gamma.
\end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие производящие функции:

$$\begin{aligned}
e_i^+(u) &= \sum_{k \geq 0} e_{i,k} u^{-k-1}, & f_i^+(u) &= \sum_{k \geq 0} f_{i,k} u^{-k-1}, \\
h_i^+(u) &= 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,k} u^{-k-1}.
\end{aligned}$$

3. ЯНГИАН В ТЕРМИНАХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Данный раздел содержит описание янгиана $Y(sl_2)$ в терминах производящих функций [3, 4]. Такое описание допускает возможность обобщения на $Y(g)$. Мы будем опускать нижний индекс у производящих функций, так что $e^+(u) := e_1^+(u)$, $f^+(u) := f_1^+(u)$,

$h^+(u) := h_1^+(u)$. Тогда соотношения (2.1а) приобретают вид

$$\begin{aligned} [h^+(u), h^+(v)] &= 0, & [e^+(u), f^+(v)] &= -\frac{h^+(u) - h^+(v)}{u - v}, \\ [e^+(u), e^+(v)] &= -\frac{(e^+(u) - e^+(v))^2}{u - v}, \\ [f^+(u), f^+(v)] &= \frac{(f^+(u) - f^+(v))^2}{u - v}, \\ [h^+(u), e^+(v)] &= -\frac{\{h^+(u), e^+(u) - e^+(v)\}}{u - v}, \\ [h^+(u), f^+(v)] &= \frac{\{h^+(u), f^+(u) - f^+(v)\}}{u - v}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соответствующие формулы для коумножения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta(e^+(u)) &= e^+(u) \otimes 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (f^+(u+1))^k h^+(u) \otimes (e^+(u))^{k+1}, \\ \Delta(f^+(u)) &= 1 \otimes f^+(u) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (f^+(u))^{k+1} \otimes h^+(u) (e^+(u+1))^k, \\ \Delta(h^+(u)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) (f^+(u+1))^k h^+(u) \otimes h^+(u) (e^+(u+1))^k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Как мы видим, все определяющие соотношения янгиана $Y(sl_2)$ могут быть записаны в терминах производящих функций. Преимущества такой записи трудно переоценить: прежде всего из перестановочных соотношений (3.1) сразу следует теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта, или, говоря иначе, мономы

$$e_0^{n_0} \dots e_k^{n_k} h_0^{m_0} \dots h_p^{m_p} f_0^{l_0} \dots f_q^{l_q}$$

образуют базис $Y(sl_2)$ как линейного пространства. Кроме того, видно, что формулы (3.2), определяющие коумножение, просты и компактны. Выписанные в терминах e_i, f_i, h_i , эти формулы приобретают очень громоздкий вид уже для $i = 2$. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем, соотношения в терминах производящих функций “не меняются” при переходе к дуальной алгебре Хопфа. Меняются только сами производящие функции: в дуальном случае переменная u входит в неотрицательных степенях. Более того, дуальная алгебра не является конечнопорожденной, а это означает, что определить коумножение на всех образующих невозможно. Таким образом, задача описания определяющих соотношений янгиана и коумножения в терминах производящих функций равносильна задаче нахождения дуальной алгебры Хопфа и, по сути, задаче построения квантового дубля.

Почти все соотношения для янгиана $Y(sl_n)$ имеют тот же вид, что и для $Y(sl_2)$, а значит, верны формулы, аналогичные (3.1). Однако есть две группы новых соотношений:

$$[e_{i,k+1}, e_{j,l}] - [e_{i,k}, e_{j,l+1}] = (\alpha_i, \alpha_j) \{e_{i,k}, e_{j,l}\}, \quad (3.3)$$

$$[f_{i,k+1}, f_{j,l}] - [f_{i,k}, f_{j,l+1}] = -(\alpha_i, \alpha_j) \{f_{i,k}, f_{j,l}\}, \quad (3.4)$$

где α_i, α_j – соседние корни $((\alpha_i, \alpha_j) = -1)$. Эти соотношения не могут быть разрешены относительно коммутатора, т.е. $[e_{i,k}, e_{j,l}]$ не может быть выражен так, чтобы обеспечить упорядочение $e_{i,k+1}$ и $e_{j,l}$, необходимое для выполнения теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Это не является случайным обстоятельством. В янгиане, реализованном образующими Шевалле, нет естественного линейного базиса – нужны дополнительные элементы.

4. БАЗИС КАРТАНА–ВЕЙЛЯ ЯНГИАНА $Y(SL_3)$

В этом разделе построены элементы Картана–Вейля для янгиана $Y(sl_3)$ и найдены явные формулы для коумножения.

Если строить элементы Картана–Вейля в $Y(sl_3)$, то определение дополнительных элементов $e_{3,k}, f_{3,k}$ как компонент производящих функций $e_3^+(u) = -[e_1^+(u), e_{2,0}]$, $f_3^+(u) = [f_1^+(u), f_{2,0}]$ выглядит вполне оправданно. Используя определение янгиана (2.1), можно получить соотношения (теорема 4.3) для определения этих производящих функций. Однако непонятно, как определить коумножение на таком наборе образующих. Для решения этого вопроса принципиальным моментом является существование изоморфизма $Y(sl_n)$ и алгебры Хопфа, задаваемой RTT -соотношением (см. [2, 5]). Такой изоморфизм строится из треугольного разложения [6]. При этом в треугольном разложении $T(u)$ функции, располагающиеся на диагонали, соседней с главной, дают (с точностью до сдвига) производящие функции образующих Шевалле из определения янгиана (2.1). В теореме 4.3 показано, что в случае $Y(sl_3)$ две оставшиеся функции в верхнетреугольной и нижнетреугольной частях совпадают с введенными выше $e_3^+(u)$ и $f_3^+(u)$. Таким образом, изоморфизм естественно продолжается на элементы Картана–Вейля, что позволяет получить формулы коумножения.

Теперь перейдем к описанию изоморфизма двух реализаций $Y(sl_n)$. Рассмотрим биалгебру $Y(R)$, заданную образующими $t_{ij}^{(k)}$, $1 \leq i, j \leq n$, $k = 1, 2, \dots$, и определяющими соотношениями

$$R(u-v)(T(u) \otimes E_n)(E_n \otimes T(v)) = (E_n \otimes T(v))(T(u) \otimes E_n)R(u-v), \quad (4.1)$$

$$\det_q T(u) = 1,$$

где $R = R(u-v) = 1 + \frac{P}{u-v}$, $P \in \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ – перестановка сомножителей,

$$T(u) = (t_{ij}(u)), \quad t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{k \geq 0} t_{ij}^k u^{-k-1},$$

$\det_q T(u)$ – квантовый определитель $T(u)$, т.е.

$$\det_q T(u) = \sum \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) t_{1i_1} \left(u + \frac{n-1}{2}\right) t_{2i_2} \left(u + \frac{n-3}{2}\right) \dots t_{ni_n} \left(u + \frac{1-n}{2}\right)$$

– сумма по всем перестановкам индексов $(i_1, \dots, i_n)$. При этом коумножение дается формулой

$$\Delta(t_{ij}(u)) = \sum_{k=1}^n t_{kj}(u) \otimes t_{ik}(u).$$

ТЕОРЕМА 4.1 [2]. *Янгиан $Y(sl_n)$ изоморфен биалгебре $Y(R)$, описанной выше.*

Прежде всего заметим, что равенство (4.1) есть квадратичное соотношение:

$$[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = -\frac{1}{u-v}(t_{kj}(u)t_{il}(v) - t_{kj}(v)t_{il}(u)). \quad (4.2)$$

Кроме того, биалгебра $Y(R)$ имеет структуру алгебры Хопфа (см. [7, 5]). Тем самым на $Y(sl_n)$ индуцируется структура алгебры Хопфа.

Изоморфизм теоремы 4.1 реализуется с помощью гауссова разложения. Покажем на примере $Y(sl_3)$, как это делается. Рассмотрим треугольное разложение $T(u)$:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} (u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{f}_1(u) & 1 & 0 \\ \tilde{f}_3(u) & \tilde{f}_2(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(u) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(u) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & \tilde{e}_1(u) & \tilde{e}_3(u) \\ 0 & 1 & \tilde{e}_2(u) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 4.1. *Из равенства (4.3) следуют формулы*

$$\begin{aligned} k_1(u) &= t_{11}(u), & k_2(u) &= t_{22}(u) - t_{21}(u)t_{11}(u)^{-1}t_{12}(u), \\ \tilde{e}_1(u) &= t_{11}(u)^{-1}t_{12}(u), & \tilde{f}_1(u) &= t_{21}(u)t_{11}(u)^{-1}, \\ \tilde{e}_2(u) &= k_2(u)^{-1}(t_{23}(u) - t_{21}(u)t_{11}(u)^{-1}t_{13}(u)), \\ \tilde{f}_2(u) &= (t_{32}(u) - t_{31}(u)t_{11}(u)^{-1}t_{12}(u))k_2(u)^{-1}, \\ \tilde{e}_3(u) &= t_{11}(u)^{-1}t_{13}(u), & \tilde{f}_3(u) &= t_{31}(u)t_{11}(u)^{-1}, \\ k_3(u) &= t_{33}(u) - \tilde{f}_3(u)k_1(u)\tilde{e}_3(u) - \tilde{f}_2(u)k_2(u)\tilde{e}_2(u). \end{aligned}$$

Доказательство леммы тривиально и состоит в перемножении матриц и решении простейшей системы уравнений.

Поскольку $\tilde{e}_i(u)$, $\tilde{f}_i(u)$, $k_i(u)$ выражаются через $t_{ij}(u)$, компоненты $\tilde{e}_i(u)$, $\tilde{f}_i(u)$, $k_i(u)$ можно рассматривать как элементы из $Y(R)$. Возьмем теперь $Y(sl_3)$, заданный в терминах образующих $e_{i,k}$, $f_{i,k}$, $h_{i,k}$, $i = 1, 2$, $k \geq 0$, и соотношений (2.1).

Рассмотрим отображение $j: Y(sl_3) \rightarrow Y(R)$:

$$\begin{aligned} j(e_1^+(u)) &= \tilde{e}_1(u), & j(e_2^+(u)) &= \tilde{e}_2(u + 1/2), \\ j(f_1^+(u)) &= \tilde{f}_1(u), & j(f_2^+(u)) &= \tilde{f}_2(u + 1/2), \\ j(h_1^+(u)) &= \tilde{h}_1(u), & j(h_2^+(u)) &= \tilde{h}_2(u + 1/2), \end{aligned}$$

где $\tilde{h}_1(u) = k_1^{-1}(u)k_2(u)$, $\tilde{h}_2(u) = k_2^{-1}(u)k_3(u)$.

ТЕОРЕМА 4.2 [2]. *Отображение $j: Y(sl_3) \rightarrow Y(R)$, определенное выше, — изоморфизм, удовлетворяющий условиям теоремы 4.1 для $Y(sl_3)$.*

Абсолютно такая же ситуация имеет место для $Y(sl_n)$. Если обозначить через $\tilde{e}_i(u)$ i -й по счету элемент надглавной диагонали в треугольном разложении $T(u)$, то нужно взять сдвиг $e_i^+(u) = \tilde{e}_i(u + \frac{i-1}{2})$, чтобы выразить $e_i^+(u)$ из определения $Y(sl_n)$ через образующие Шевалле (аналогично для $f_i^+(u)$ и для $h_i^+(u)$). В работе [2] приведены общие формулы, определяющие этот изоморфизм, мы же выписали их для $Y(sl_3)$.

Пусть

$$\begin{aligned} e_3^+(u) &= -[e_1^+(u), e_{2,0}], & f_3^+(u) &= [f_1^+(u), f_{2,0}], \\ h_3^+(u) &= h_1^+(u)h_2^+(u) + \frac{1}{4}\{\{h_1^+(u), e_2^+(u)\}, f_2^+(u)\}. \end{aligned}$$

Компоненты $f_i^+(u)$, $e_i^+(u)$, $h_i^+(u)$, $i = 1, 2, 3$, лежат в $Y(sl_3)$, а компоненты $\tilde{e}_i(u)$, $\tilde{f}_i(u)$ лежат в $Y(R)$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.3. А. *При изоморфизме теоремы 4.2 имеем*

$$j(e_3^+(u)) = \tilde{e}_3(u), \quad j(f_3^+(u)) = \tilde{f}_3(u), \quad (4.4)$$

$$j(h_3^+(u)) = t_{11}^{-1}(u)(t_{33}(u) - t_{31}(u)t_{11}^{-1}(u)t_{13}(u)). \quad (4.5)$$

Б. *Выполняются соотношения*

$$[e_i^+(u), e_i^+(v)] = -\frac{(e_i^+(u) - e_i^+(v))^2}{u - v}, \quad (4.6)$$

$$[f_i^+(u), f_i^+(v)] = \frac{(f_i^+(u) - f_i^+(v))^2}{u - v}, \quad (4.7)$$

где $i = 1, 2, 3$;

$$[e_i^+(u), f_j^+(v)] = -\delta_{ij} \frac{h_i^+(u) - h_i^+(v)}{u - v}, \quad (4.8)$$

$$[h_i^+(u), h_j^+(v)] = 0, \quad (4.9)$$

$$[h_i^+(u), e_i^+(v)] = -\frac{\{h_i^+(u), e_i^+(u) - e_i^+(v)\}}{u - v}, \quad (4.10)$$

$$[h_i^+(u), f_i^+(v)] = \frac{\{h_i^+(u), f_i^+(u) - f_i^+(v)\}}{u - v}, \quad (4.11)$$

где $i = 1, 2$;

$$[e_1^+(u), e_2^+(v)] = -\frac{1}{2} \frac{\{e_1^+(u) - e_1^+(v), e_2^+(v)\}}{u - v} + \frac{e_3^+(u) - e_3^+(v)}{u - v}, \quad (4.12)$$

$$[f_1^+(u), f_2^+(v)] = \frac{1}{2} \frac{\{f_1^+(u) - f_1^+(v), f_2^+(v)\}}{u - v} - \frac{e_3^+(u) - e_3^+(v)}{u - v}, \quad (4.13)$$

$$[e_1^+(u), e_3^+(v)] = -\frac{1}{u-v}(e_1^+(u) - e_1^+(v))(e_3^+(u) - e_3^+(v)), \quad (4.14)$$

$$[f_1^+(u), f_3^+(v)] = \frac{1}{u-v}(f_1^+(u) - f_1^+(v))(f_3^+(u) - f_3^+(v)), \quad (4.15)$$

$$[h_1^+(u), e_2^+(v)] = \frac{1}{2} \frac{\{h_1^+(u), e_2^+(u) - e_2^+(v)\}}{u-v}, \quad (4.16)$$

$$[h_2^+(u), e_1^+(v)] = \frac{1}{2} \frac{\{h_2^+(u), e_1^+(u) - e_1^+(v)\}}{u-v}, \quad (4.17)$$

$$[h_1^+(u), f_2^+(v)] = -\frac{1}{2} \frac{\{h_1^+(u), f_2^+(u) - f_2^+(v)\}}{u-v}, \quad (4.18)$$

$$[h_2^+(u), f_1^+(v)] = -\frac{1}{2} \frac{\{h_2^+(u), f_1^+(u) - f_1^+(v)\}}{u-v}, \quad (4.19)$$

$$[e_3^+(u), f_3^+(v)] = -\frac{h_3^+(u) - h_3^+(v)}{u-v}. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (4.12). Воспользуемся изоморфизмом теоремы 4.2. Имеем

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_1(u), \tilde{e}_2(v)] &= [t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u), k_2(v)^{-1}(t_{23}(v) - t_{21}(v)t_{11}(v)^{-1}t_{13}(v))] = \\ &= (\det_2)(v)^{-1}[t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u), t_{11}(v-1)(t_{23}(v) - t_{21}(v)t_{11}(v)^{-1}t_{13}(v))] = \\ &= (\det_2)(v)^{-1}t_{11}^{-1}(u)[t_{12}(u), t_{11}(v-1)(t_{23}(v) - t_{21}(v)t_{11}(v)^{-1}t_{13}(v))], \end{aligned}$$

поскольку $\det_2(v) = k_2(v)t_{11}(v-1)$ коммутирует с $t_{ij}(u)$, $i, j = 1, 2$. Далее,

$$[t_{12}(u), t_{23}(v) - t_{21}(v)t_{11}(v)^{-1}t_{13}(v)] = A + B + C + D,$$

где в силу соотношений (4.2)

$$\begin{aligned} A &= [t_{12}(u), t_{23}(v)] = -\frac{1}{u-v}(t_{22}(u)t_{13}(v) - t_{22}(v)t_{13}(u)), \\ B &= -[t_{12}(u), t_{21}(v)]t_{11}^{-1}(v)t_{13}(v) = \\ &= \frac{1}{u-v}(t_{22}(u)t_{11}(v) - t_{22}(v)t_{11}(u))t_{11}^{-1}(v)t_{13}(v), \\ C &= -t_{21}(v)t_{11}^{-1}(v)[t_{11}(v), t_{12}(u)]t_{11}^{-1}(v)t_{13}(v) = \\ &= -\frac{1}{u-v}t_{21}(v)t_{11}^{-1}(v)(t_{12}(u)t_{11}(v) - t_{12}(v)t_{11}(u))t_{11}^{-1}(v)t_{13}(v), \\ D &= -t_{21}(v)t_{11}^{-1}(v)[t_{12}(u), t_{13}(v)] = \\ &= \frac{1}{u-v}t_{21}(v)t_{11}^{-1}(v)(t_{12}(u)t_{13}(v) - t_{12}(v)t_{13}(u)). \end{aligned}$$

Суммируя, находим

$$(\det_2)(v)^{-1}t_{11}^{-1}(u)t_{11}(v-1)(A + B + C + D) = \frac{\tilde{e}_3(u) - \tilde{e}_3(v)}{u-v}.$$

И, наконец, из соотношений

$$\begin{aligned} & [t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u), t_{11}(v-1)] = \\ & = [t_{12}(u-1)t_{11}^{-1}(u-1), t_{11}(v-1)] = [t_{12}(u-1), t_{11}(v-1)]t_{11}^{-1}(u-1) = \\ & = -\frac{1}{u-v}(t_{12}(u-1)t_{11}(v-1) - t_{12}(v-1)t_{11}(u-1))t_{11}^{-1}(u) \end{aligned}$$

получаем

$$(\det_2)(v)^{-1}t_{11}^{-1}(u)[t_{12}(u), t_{11}(v-1)](t_{23}(v)-t_{21}(v)t_{11}(v)^{-1}t_{13}(v)) = \frac{\tilde{e}_1(v) - \tilde{e}_1(u)}{u-v}\tilde{e}_2(v),$$

а значит,

$$[\tilde{e}_1(u), \tilde{e}_2(v)] = -\frac{\tilde{e}_1(u) - \tilde{e}_1(v)}{u-v}\tilde{e}_2(v) + \frac{\tilde{e}_3(u) - \tilde{e}_3(v)}{u-v}.$$

Делая сдвиг в этом уравнении (напомним, что $\tilde{e}_2(v) = e_2^+(v-1/2)$, $\tilde{e}_1(v) = e_1^+(v)$), имеем

$$[e_1^+(u), e_2^+(v)] = -\frac{1}{2}\frac{\{e_1^+(u) - e_1^+(v), e_2^+(v)\}}{u-v} + \frac{\tilde{e}_3(u) - \tilde{e}_3(v)}{u-v}.$$

Умножив это равенство на $(u-v)$ и устремив $v \rightarrow \infty$, найдем $\tilde{e}_3(u) = -[e_1^+(u), e_{2,0}]$, т.е. $\tilde{e}_3(u) = e_3^+(u)$. Остальные соотношения доказываются аналогично. Таким образом, все коммутационные соотношения – это просто запись определения $Y(sl_3)$ в терминах производящих функций. Основным моментом при этом является связь с изоморфизмом теоремы 4.2, который в нашем случае означает равенства $\tilde{e}_3(u) = e_3^+(u)$, $\tilde{f}_3(u) = f_3^+(u)$, первое из которых было доказано, а второе получается аналогично. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Положим*

$$\begin{aligned} e_3'^+(u) &= \frac{1}{2}\{e_1^+(u), e_2^+(u)\} - e_3^+(u), \\ f_3'^+(u) &= \frac{1}{2}\{f_1^+(u), f_2^+(u)\} - f_3^+(u). \end{aligned}$$

Тогда

$$e_3'^+(u) = [e_{1,0}, e_2^+(u)], \quad f_3'^+(u) = -[f_{1,0}, f_2^+(u)],$$

а значит, следующее разложение дает другую в сравнении с теоремой 4.2 реализацию изоморфизма из условия теоремы 4.1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_2^+(u) & 1 & 0 \\ f_3'^+(u) & f_1^+(u - \frac{1}{2}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}_1(u) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_3(u) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & e_2^+(u) & e_3'^+(u) \\ 0 & 1 & e_1^+(u - \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

здесь

$$\tilde{k}_1(u)^{-1}\tilde{k}_2(u) = h_2^+(u), \quad \tilde{k}_2(u)^{-1}\tilde{k}_3(u) = h_1^+(u - 1/2).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. (Базис Картана–Вейля для $Y(sl_3)$). $Y(sl_3)$ может быть задан с помощью образующих – компонент $e_i^+(u)$, $f_i^+(u)$, $h_i^+(u)$ (при $i = 1, 2$), $e_3^+(u)$, $f_3^+(u)$, соотношений (4.6)–(4.19), а также соотношений

$$[e_2^+(u), e_3'^+(v)] = -\frac{1}{u-v}(e_2^+(u) - e_2^+(v))(e_3'^+(u) - e_3'^+(v)), \quad (4.21)$$

$$[f_2^+(u), f_3'^+(v)] = \frac{1}{u-v}(f_2^+(u) - f_2^+(v))(f_3'^+(u) - f_3'^+(v)) \quad (4.22)$$

($e_3'^+(v)$, $f_3'^+(v)$ определены в следствии 1).

Таким образом, мы восполнили отсутствующие в теореме 4.3 равенства с $[e_2^+(u), e_3^+(v)]$ и $[f_2^+(u), f_3^+(v)]$. Они непосредственно получаются из следствия 1. Для доказательства следствия 2 заметим, что соотношения типа Серра вытекают из равенств (4.6)–(4.19), (4.21), (4.22).

ТЕОРЕМА 4.4. Имеют место следующие формулы для коумножения в $Y(sl_3)$:

$$\begin{aligned} \Delta(e_1^+(u)) &= e_1^+(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^+(u+1)^i f_3^+(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_1^+(u)^i e_3^+(u)^j \right) \left(h_1^+(u) \otimes e_1^+(u) + \frac{1}{2} \{h_1^+(u), f_2^+(u)\} \otimes e_3^+(u) \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_2^+(u)) &= e_2^+(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_2^+(u+1)^i f_3'^+(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_2^+(u)^i e_3'^+(u)^j \right) \left(h_2^+(u) \otimes e_2^+(u) + \frac{1}{2} \{h_2^+(u), f_1^+(u)\} \otimes e_3'^+(u) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_3^+(u)) &= e_3^+(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^+(u+1)^i f_3^+(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_1^+(u)^i e_3^+(u)^j \right) \left(h_3^+(u) \otimes e_3^+(u) + \frac{1}{2} \{h_1^+(u), e_2^+(u)\} \otimes e_1^+(u) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f_1^+(u)) &= 1 \otimes f_1^+(u) + \left(f_1^+(u) \otimes h_1^+(u) + \frac{1}{2} f_3^+(u) \otimes \{h_1^+(u), e_2^+(u)\} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^+(u)^i f_3^+(u)^j \otimes e_1^+(u+1)^i e_3^+(u+1)^j \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f_2^+(u)) &= 1 \otimes f_2^+(u) + \left(f_2^+(u) \otimes h_2^+(u) + \frac{1}{2} f_3'^+(u) \otimes \{h_2^+(u), e_1^+(u)\} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_2^+(u)^i f_3'^+(u)^j \otimes e_2^+(u+1)^i e_3'^+(u+1)^j \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f_3^+(u)) &= 1 \otimes f_3^+(u) + \left(f_3^+(u) \otimes h_3^+(u) + \frac{1}{2} f_1^+(u) \otimes \{h_1^+(u), f_2^+(u)\} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^+(u)^i f_3^+(u)^j \otimes e_1^+(u+1)^i e_3^+(u+1)^j \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned}\Delta(e_1^+(u)) &= \Delta(t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u)) = \Delta(t_{11}(u))^{-1}\Delta(t_{12}(u)) = \\ &= (1 \otimes 1 + t_{11}^{-1}(u)t_{21}(u) \otimes t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u) + t_{11}^{-1}(u)t_{31}(u) \otimes t_{11}^{-1}(u)t_{13}(u))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u) \otimes 1 + t_{11}^{-1}(u)t_{22}(u) \otimes t_{11}^{-1}(u)t_{12}(u) + \right. \\ &\quad \left. + t_{11}^{-1}(u)t_{32}(u) \otimes t_{11}^{-1}(u)t_{13}(u) \right).\end{aligned}$$

Преобразуя последнее выражение, находим

$$\begin{aligned}\Delta(e_1^+(u)) &= (1 \otimes 1 + f_1^+(u+1) \otimes e_1^+(u) + f_3^+(u+1) \otimes e_3^+(u))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(e_1^+(u) \otimes 1 + (h_1^+(u) + f_1^+(u+1)e_1^+(u)) \otimes e_1^+(u) + \right. \\ &\quad \left. + \left(f_3^+(u+1)e_1^+(u) + h_1^+(u)f_2^+\left(u - \frac{1}{2}\right) \right) \otimes e_3^+(u) \right) = \\ &= e_1^+(u) \otimes 1 + (1 \otimes 1 + f_1^+(u+1) \otimes e_1^+(u) + f_3^+(u+1) \otimes e_3^+(u))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(h_1^+(u) \otimes e_1^+(u) + \frac{1}{2}\{h_1^+(u), f_2^+(u)\} \otimes e_3^+(u) \right).\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}(1 \otimes 1 + f_1^+(u+1) \otimes e_1^+(u) + f_3^+(u+1) \otimes e_3^+(u))^{-1} &= \\ = \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} (f_1^+(u+1))^i (f_3^+(u+1))^j \otimes (e_1^+(u))^i (e_3^+(u))^j,\end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}\Delta(e_1^+(u)) &= e_1^+(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^+(u+1)^i f_3^+(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_1^+(u)^i e_3^+(u)^j \right) \left(h_1^+(u) \otimes e_1^+(u) + \frac{1}{2}\{h_1^+(u), f_2^+(u)\} \otimes e_3^+(u) \right).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем равенство (4.23). Остальные соотношения доказываются аналогично. $\square$

5. КВАНТОВЫЙ ДУБЛЬ $DY(SL_3)$

Квантовый дубль янгиана определяется в следующей теореме:

ТЕОРЕМА 5.1 [8]. Пусть A – алгебра Хопфа, а A° – дуальная алгебра A^* с первернутым коумножением. Существует ровно одна квазитреугольная алгебра Хопфа $(D(A), R)$ такая, что A, A° суть подалгебры Хопфа $D(A)$, линейное отображение $A \otimes A^\circ \rightarrow D(A)$, $a \otimes b \rightarrow ab$ биективно, R – образ канонического элемента при вложении $A \otimes A^\circ \rightarrow D(a) \otimes D(A)$.

Перестановочные соотношения в дубле даются следующей формулой:

$$a \cdot b = \langle a^{(1)}, b^{(1)} \rangle \langle S^{-1}(a^{(3)}), b^{(3)} \rangle b^{(2)} \cdot a^{(2)}, \quad (5.1)$$

где $a \in A$, $b \in A^\circ$, $\Delta^2(x) = (\Delta \otimes \text{id})\Delta(x) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(x) = x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$, S – антипод в A (см. [5, 7]).

Рассмотрим $Y(sl_n)$. Пусть алгебра C порождена элементами $e_{i,k}$, $f_{i,k}$, $h_{i,k}$, $1 \leq i \leq n-1$, $k \in \mathbb{Z}$, и соотношениями (2.1). И пусть $\overline{C}$ – формальное пополнение C , соответствующее фильтрации

$$\cdots \subset C_{-n} \subset \cdots \subset C_0 \subset \cdots \subset C_n \cdots \subset C, \quad (5.2)$$

определяемой градуировкой $\deg e_{i,k} = \deg f_{i,k} = \deg h_{i,k} = k$; $\deg x \in C_m \leq m$. В работе [3] было сделано предположение, что $DY(sl_n)$, т.е. дубль $Y(sl_n)$, изоморфен $\overline{C}$ как алгебра. Для $DY(sl_3)$ это утверждение может быть выведено из доказанной ниже теоремы 5.2.

Положим

$$e_i^+(u) := \sum_{k \geq 0} e_{i,k} u^{-k-1}, \quad e_i^-(u) := - \sum_{k < 0} e_{i,k} u^{-k-1}, \quad (5.3)$$

$$f_i^+(u) := \sum_{k \geq 0} f_{i,k} u^{-k-1}, \quad f_i^-(u) := - \sum_{k < 0} f_{i,k} u^{-k-1}, \quad (5.4)$$

$$h_i^+(u) := 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,k} u^{-k-1}, \quad h_i^-(u) := 1 - \sum_{k < 0} h_{i,k} u^{-k-1}. \quad (5.5)$$

С помощью формул теоремы 4.4 определим коумножение на введенных выше производящих функциях:

$$\begin{aligned} \Delta(e_1^\pm(u)) &= e_1^\pm(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^\pm(u+1)^i f_3^\pm(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_1^\pm(u)^i e_3^\pm(u)^j \right) \left(h_1^\pm(u) \otimes e_1^\pm(u) + \frac{1}{2} \{h_1^\pm(u), f_2^\pm(u)\} \otimes e_3^\pm(u) \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_2^\pm(u)) &= e_2^\pm(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_2^\pm(u+1)^i f_3'^\pm(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_2^\pm(u)^i e_3'^\pm(u)^j \right) \left(h_2^\pm(u) \otimes e_2^\pm(u) + \frac{1}{2} \{h_2^\pm(u), f_1^\pm(u)\} \otimes e_3'^\pm(u) \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_3^\pm(u)) &= e_3^\pm(u) \otimes 1 + \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^\pm(u+1)^i f_3^\pm(u+1)^j \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes e_1^\pm(u)^i e_3^\pm(u)^j \right) \left(h_3^\pm(u) \otimes e_3^\pm(u) + \frac{1}{2} \{h_1^\pm(u), e_2^\pm(u)\} \otimes e_1^\pm(u) \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f_1^\pm(u)) &= 1 \otimes f_1^\pm(u) + \left(f_1^\pm(u) \otimes h_1^\pm(u) + \frac{1}{2} f_3^\pm(u) \otimes \{h_1^\pm(u), e_2^\pm(u)\} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^\pm(u)^i f_3^\pm(u)^j \otimes e_1^\pm(u+1)^i e_3^\pm(u+1)^j \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\Delta(f_2^\pm(u)) = 1 \otimes f_2^\pm(u) + \left(f_2^\pm(u) \otimes h_2^\pm(u) + \frac{1}{2} f_3'^\pm(u) \otimes \{h_2^\pm(u), e_1^\pm(u)\} \right) \times \\ \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_2^\pm(u)^i f_3'^\pm(u)^j \otimes e_2^\pm(u+1)^i e_3'^\pm(u+1)^j \right), \quad (5.10)$$

$$\Delta(f_3^\pm(u)) = 1 \otimes f_3^\pm(u) + \left(f_3^\pm(u) \otimes h_3^\pm(u) + \frac{1}{2} f_1^\pm(u) \otimes \{h_1^\pm(u), f_2^\pm(u)\} \right) \times \\ \times \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{i+j}{i} f_1^\pm(u)^i f_3^\pm(u)^j \otimes e_1^\pm(u+1)^i e_3^\pm(u+1)^j \right). \quad (5.11)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.2 (Базис Картана–Вейля для $DY(sl_3)$). *Дубль $DY(sl_3)$ есть пополненная по фильтрации (5.2) алгебра, заданная с помощью образующих $e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}$, $i = 1, 2, e_{3,k}, f_{3,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих соотношениям*

$$\begin{aligned} [e_i^\varepsilon(u), e_i^\delta(v)] &= -\frac{(e_i^\varepsilon(u) - e_i^\delta(v))^2}{u-v}, \\ [f_i^\varepsilon(u), f_i^\delta(v)] &= \frac{(f_i^\varepsilon(u) - f_i^\delta(v))^2}{u-v}, \quad i = 1, 2, 3; \\ [e_i^\varepsilon(u), f_j^\delta(v)] &= -\delta_{ij} \frac{h_i^\varepsilon(u) - h_i^\delta(v)}{u-v}, \quad [h_i^\varepsilon(u), h_j^\delta(v)] = 0, \quad i, j = 1, 2; \\ [h_i^\varepsilon(u), e_i^\delta(v)] &= -\frac{\{h_i^\varepsilon(u), e_i^\varepsilon(u) - e_i^\delta(v)\}}{u-v}, \\ [h_i^\varepsilon(u), f_i^\delta(v)] &= \frac{\{h_i^\varepsilon(u), f_i^\varepsilon(u) - f_i^\delta(v)\}}{u-v}, \quad i = 1, 2, \\ [e_1^\varepsilon(u), e_2^\delta(v)] &= -\frac{1}{2} \frac{\{e_1^\varepsilon(u) - e_1^\delta(v), e_2^\delta(v)\}}{u-v} + \frac{e_3^\varepsilon(u) - e_3^\delta(v)}{u-v}, \\ [f_1^\varepsilon(u), f_2^\delta(v)] &= \frac{1}{2} \frac{\{f_1^\varepsilon(u) - f_1^\delta(v), f_2^\delta(v)\}}{u-v} - \frac{f_3^\varepsilon(u) - f_3^\delta(v)}{u-v}, \\ [e_1^\varepsilon(u), e_3^\delta(v)] &= -\frac{1}{u-v} (e_1^\varepsilon(u) - e_1^\delta(v)) (e_3^\varepsilon(u) - e_3^\delta(v)), \\ [f_1^\varepsilon(u), f_3^\delta(v)] &= \frac{1}{u-v} (f_1^\varepsilon(u) - f_1^\delta(v)) (f_3^\varepsilon(u) - f_3^\delta(v)), \\ [e_2^\varepsilon(u), e_3'^\delta(v)] &= -\frac{1}{u-v} (e_2^\varepsilon(u) - e_2^\delta(v)) (e_3'^\varepsilon(u) - e_3'^\delta(v)), \\ [f_2^\varepsilon(u), f_3'^\delta(v)] &= \frac{1}{u-v} (f_2^\varepsilon(u) - f_2^\delta(v)) (f_3'^\varepsilon(u) - f_3'^\delta(v)), \\ [h_1^\varepsilon(u), e_2^\delta(v)] &= \frac{1}{2} \frac{\{h_1^\varepsilon(u), e_2^\varepsilon(u) - e_2^\delta(v)\}}{u-v}, \\ [h_2^\varepsilon(u), e_1^\delta(v)] &= \frac{1}{2} \frac{\{h_2^\varepsilon(u), e_1^\varepsilon(u) - e_1^\delta(v)\}}{u-v}, \\ [h_1^\varepsilon(u), f_2^\delta(v)] &= -\frac{1}{2} \frac{\{h_1^\varepsilon(u), f_2^\varepsilon(u) - f_2^\delta(v)\}}{u-v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h_2^\varepsilon(u), f_1^\delta(v)] &= -\frac{1}{2} \frac{\{h_2^\varepsilon(u), f_1^\varepsilon(u) - f_1^\delta(v)\}}{u-v}, \\ [e_3^\varepsilon(u), f_3^\delta(v)] &= -\frac{h_3^\varepsilon(u) - h_3^\delta(v)}{u-v}. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon, \delta \in \{+, -\}$; $e_1^\pm(u)$, $f_1^\pm(u)$, $e_2^\pm(u)$, $f_2^\pm(u)$, $e_3^\pm(u)$, $f_3^\pm(u)$, $h_1^\pm(u)$, $h_2^\pm(u)$ — производящие функции, заданные соотношениями (5.3)–(5.5), и

$$\begin{aligned} e_3'^\pm(u) &= \frac{1}{2} \{e_1^\pm(u), e_2^\pm(u)\} - e_3^\pm(u), \\ f_3'^\pm(u) &= \frac{1}{2} \{f_1^\pm(u), f_2^\pm(u)\} - f_3^\pm(u), \\ h_3^\pm(u) &= h_1^\pm(u)h_2^\pm(u) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \{\{h_1^\pm(u), e_2^\pm(u)\}, f_2^\pm(u)\}. \end{aligned}$$

При этом коумножение вычисляется по формулам (5.6)–(5.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подалгебра $Y^+ = Y(sl_3) \subset DY(sl_3)$ порождена компонентами $e_i^+(u)$, $f_i^+(u)$, $h_i^+(u)$, а Y^- — формальное пополнение подалгебры, порожденной компонентами $e_i^-(u)$, $f_i^-(u)$, $h_i^-(u)$. Опишем спаривание между Y^+ и Y^- . Обозначим через $E^\pm$, $F^\pm$, $H^\pm$ подалгебры (или их пополнения в случае Y^-), порожденные компонентами $e_i^\pm(u)$, $f_i^\pm(u)$, $h_i^\pm(u)$, $i = 1, 2$. При этом подалгебры E^+ и F^+ не содержат единицу. Мы будем использовать следующее утверждение (см. [3]):

ЛЕММА 5.1. *Существует спаривание $\langle, \rangle: Y^+ \otimes Y^- \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что выполнены следующие условия:*

1) *спаривание $\langle, \rangle$ сохраняет разложения $Y^+ = E^+H^+F^+$, $Y^- = F^-H^-E^-$, т.е.*

$$\langle e^+h^+f^+, f^-h^-e^- \rangle = \langle e^+, f^- \rangle \langle h^+, h^- \rangle \langle f^+, e^- \rangle$$

для всех $e^\pm \in E^\pm$, $h^\pm \in H^\pm$, $f^\pm \in F^\pm$;

2) *на образующих спаривание $\langle, \rangle$ имеет вид*

$$\begin{aligned} \langle e_i^+(u), f_j^-(v) \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{(u-v)}, & \langle f_i^+(u), e_j^-(v) \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{(u-v)}, & i, j &= 1, 2, 3, \\ \langle h_i^+(u), h_j^-(v) \rangle &= \frac{u-v+b_{ij}}{u-v-b_{ij}}, & i, j &= 1, 2, & b_{ii} &= 1, & b_{i(i\pm 1)} &= -1/2; \end{aligned}$$

3) *имеет место равенство $(Y^+)^{\circ} = Y^-$ в том смысле, что верны формулы*

$$\langle x, y_1y_2 \rangle = \langle \Delta(x), y_1 \otimes y_2 \rangle, \quad \langle x_1x_2, y \rangle = \langle x_2 \otimes x_1, \Delta(y) \rangle.$$

Доказательство леммы содержится в [3]. Невырожденность спаривания вытекает из явного вида R -матрицы, приведенного ниже. Таким образом, осталось доказать выполнение перестановочных соотношений, вытекающих из формулы (5.1). Для этого нам понадобятся несколько первых членов формул (5.6)–(5.11).

Докажем равенство

$$[e_1^+(u), e_2^-(v)] = -\frac{1}{2} \frac{\{e_1^+(u) - e_1^-(v), e_2^-(v)\}}{u-v} + \frac{e_3^+(u) - e_3^-(v)}{u-v}.$$

Воспользуемся следующей информацией о коумножении и антиподе, которая может быть получена из (5.6)–(5.11):

$$\begin{aligned}
S^{-1}e_i^+(u) &= 0 \pmod{E^+Y^+}; \\
\Delta^2(e_1^+(u)) &= e_1^+(u) \otimes 1 \otimes 1 + h_1^+(u) \otimes e_1^+(u) \otimes 1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\{h_1^+(u), f_2^+(u)\} \otimes e_3^+(u) \otimes 1 - f_1^+(u+1)h_1^+(u) \otimes (e_1^+(u))^2 \otimes 1 \\
&\quad \pmod{Y^+ \otimes Y^+ \otimes E^+ + (F^+)^2H^+ \otimes Y^+ \otimes Y^+}; \\
\Delta^2(e_2^-(v)) &= e_2^-(v) \otimes 1 \otimes 1 + h_2^-(v) \otimes e_2^-(v) \otimes 1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\{h_2^-(v), f_1^-(v)\} \otimes e_3'^-(v) \otimes 1 - f_2^-(v+1)h_2^-(v) \otimes (e_2^-(v))^2 \otimes 1 \\
&\quad \pmod{Y^- \otimes Y^- \otimes E^- + (F^-)^2H^- \otimes Y^- \otimes Y^-}.
\end{aligned}$$

Используя (5.1), имеем

$$\begin{aligned}
e_1^+(u)e_2^-(v) &= \left\langle e_1^+(u), \frac{1}{2}\{h_2^-(v), f_1^-(v)\} \right\rangle e_3'^-(v) + \\
&\quad + \langle h_1^+(u), h_2^-(v) \rangle e_2^-(v)e_1^+(u) + \left\langle \frac{1}{2}\{h_1^+(v), f_2^+(u)\}e_2^-(v) \right\rangle e_3^+(u).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\left\langle e_1^+(u), \frac{1}{2}\{h_2^-(v), f_1^-(v)\} \right\rangle &= \left\langle e_1^+(u), f_1^-\left(v - \frac{1}{2}\right)h_1^-(v) \right\rangle = \\
&= \left\langle e_1^+(u), f_1^-\left(v - \frac{1}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{u-v+1/2}, \\
\langle h_1^+(u), h_2^-(v) \rangle &= \frac{u-v-1/2}{u-v+1/2}, \\
\left\langle \frac{1}{2}\{h_1^+(v), f_2^+(u)\}, e_2^-(v) \right\rangle &= \langle f_1^+(u+1/2), e_2^-(v) \rangle = \frac{1}{u-v+1/2}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$e_1^+(u)e_2^-(v) = \frac{e_3'^-(v) + e_3^+(u)}{u-v+1/2} + \frac{u-v-1/2}{u-v+1/2}e_2^-(v)e_1^+(u).$$

Вспоминая, что

$$e_3'^-(v) = \frac{1}{2}\{e_1^-(v), e_2^-(v)\} - e_3^-(v),$$

приходим к искомому соотношению. Остальные формулы получаются аналогично. $\square$

6. УНИВЕРСАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА

В работе [9] содержится аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для $Y(g)$. Переформулировка этого результата для $Y(sl_3)$ дает нам теорему 6.1.

Обозначим через Y_+^+ , Y_-^+ , Y_o^+ подалгебры в $Y(sl_3)$, содержащие единицу и порожденные элементами $e_{i,k}$ ($i = 1, 2; k \geq 0$), $f_{i,k}$ ($i = 1, 2; k \geq 0$), $h_{i,k}$ ($i = 1, 2; k \geq 0$), соответственно.

ТЕОРЕМА 6.1. *Упорядоченные мономы по $e_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3; k \geq 0$), $f_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3; k \geq 0$), $h_{i,k}$ ($i = 1, 2; k \geq 0$) образуют базисы векторных пространств Y_+^+ , Y_-^+ , Y_o^+ , соответственно. Умножение является линейным изоморфизмом пространств (т.е. изоморфизмом векторных пространств)*

$$Y_+ \otimes Y_o \otimes Y_- \rightarrow Y(sl_3).$$

Как уже отмечалось, R -матрица в $DY(sl_3) \otimes DY(sl_3)$ представляется каноническим элементом $\xi_i \otimes \xi^i$, где ξ_i и ξ^i – двойственные базисы пространств Y^+ и Y^- . Обозначим через Y_+^- , Y_-^- , Y_o^- подалгебры, порожденные компонентами $e_i^-(u)$, $f_i^-(u)$, $h_i^-(u)$, $i = 1, 2$. В работе [3] получена факторизация R -матрицы в общем виде (ср. с теоремой 6.1):

$$R = R_E R_H R_F,$$

где

$$R_E \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, \quad R_F \in Y_-^+ \otimes Y_+^-, \quad R_H \in Y_o^+ \otimes Y_o^-.$$

Матрица R_H вычислена в [3] для $Y(g)$. Однако R_E и R_F неизвестны в общем случае. С помощью явных формул для коумножения нами получена

ТЕОРЕМА 6.2. *В дубле $DY(sl_3)$ R -матрица выражается посредством формул*

$$\begin{aligned} R_E &= \prod_{k \geq 0}^{\rightarrow} \exp(-e_{1,k} \otimes f_{1,-k-1}) \prod_{k \geq 0}^{\rightarrow} \exp(-e_{3,k} \otimes f_{3,-k-1}) \times \\ &\quad \times \prod_{k \geq 0}^{\rightarrow} \exp(-e_{2,k} \otimes f_{2,-k-1}), \\ R_F &= \prod_{k \geq 0}^{\leftarrow} \exp(-f_{2,k} \otimes e_{2,-k-1}) \prod_{k \geq 0}^{\leftarrow} \exp(-f_{3,k} \otimes e_{3,-k-1}) \times \\ &\quad \times \prod_{k \geq 0}^{\leftarrow} \exp(-f_{1,k} \otimes e_{1,-k-1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \prod_{k \geq 0}^{\rightarrow} \exp(-e_{i,k} \otimes f_{i,-k-1}) &= \exp(-e_{i,0} \otimes f_{i,-1}) \cdot \exp(-e_{i,1} \otimes f_{i,-2}) \cdot \dots, \\ \prod_{k \geq 0}^{\leftarrow} \exp(-e_{i,k} \otimes f_{i,-i-1}) &= \dots \cdot \exp(-f_{i,1} \otimes e_{i,-2}) \cdot \exp(-f_{i,0} \otimes e_{i,-1}). \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *В. Г. Дринфельд*. Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1060–1064.
- [2] *В. Г. Дринфельд*. Новая реализация янгианов и квантованных аффинных алгебр. Препринт ФТИНТ 30–86. Харьков: Физико-технич. институт низких температур, 1986.
- [3] *S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy*. Lett. Math. Phys. 1996. V. 36. P. 373–402.
- [4] *S. M. Khoroshkin*. Central extension of the Yangian Double, q-alg 9602031. To appear in Bull. de la Soc. Math. France.
- [5] *Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 118–206.
- [6] *J. Ding, I. B. Frenkel*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 277–300.
- [7] *Yu. I. Manin*. Quantum groups and noncommutative geometry. Preprint CRM-1561. Montreal, 1988.
- [8] *M. Rosso*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 124. № 2. P. 307–318.
- [9] *V. Chari, A. Pressley*. Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 267–302.

Поступила в редакцию 20.VIII.1996 г.

A. V. Solov'ev

CARTAN–WEYL BASIS FOR $DY(sl_3)$

The double of the Yangian $Y(sl_3)$ defined via Chavelly generators is constructed. The Cartan–Weyl basis ensuring an analog of the Poincare–Birkhoff–Witt theorem is obtained. This basis is used to define the action of the comultiplication on the Chavelley generators. The explicit description of the double $DY(sl_3)$ is given and the universal R -matrix is computed.