Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, $(2 + 1)$ -мерная калибровочная модель с электрически заряженными фермионами, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 396–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:35:36

© 2004 г.

В. Р. Халилов*

(2 + 1)-МЕРНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННЫМИ ФЕРМИОНАМИ

Рассмотрена $(2 + 1)$ -мерная калибровочная теория с ненулевой плотностью фермионов и с затравочным топологическим членом Черна–Саймонса, лоренц-инвариантность которой спонтанно нарушена вследствие присутствия (генерации) в некоторой лоренцевой системе отсчета постоянного однородного магнитного поля. Предложено интерпретировать число $\eta = \pm 1$, которым характеризуют два неэквивалентных представления матриц Дирака в $2 + 1$ измерениях, как квантовое число, явно описывающее спин фермиона. Такая интерпретация позволяет, в частности, определить вакуум модели в постоянном, однородном магнитном поле как состояние, фермионное и спиновое числа которого равны нулю.

Ключевые слова: фермионный заряд, спин, топологический член Черна–Саймонса, спонтанное нарушение симметрии, эффективный лагранжиан.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к эффектам квантовой электродинамики в $2 + 1$ измерениях (КЭД_{2+1}), проявляемый в последние годы, вызван открытием целого ряда эффектов физики конденсированных сред, указывающих на существование квантовых систем, которые хорошо описываются уравнением Дирака в $2 + 1$ измерениях [1]. Показано, что двумерные релятивистские модели заряженных фермионов, связанные с калибровочными электромагнитным полем и полем Черна–Саймонса, могут применяться для изучения таких квантовых макроскопических явлений, как квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [2]–[5].

Спонтанное нарушение лоренц-инвариантности в $(2 + 1)$ -мерных калибровочных теориях с ненулевой плотностью фермионов и с затравочным членом Черна–Саймонса (в таких моделях фотон имеет ненулевую массу топологического происхождения) изучалось в работах [6], [7]. В этих работах рассмотрена теорема Намбу–Голдстоуна, связанная с нарушением лоренц-инвариантности модели. Для ряда моделей показано, как следует определять основное состояние, а также изучен вопрос о возникновении спонтанной намагниченности.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

Рассмотренная в [7] модель содержит два сорта фермионов. Однако при изучении свойств основного состояния модели в присутствии постоянного магнитного поля фактически учитывался вклад только одного сорта. Поэтому в [7], в отличие от (3 + 1)-мерной квантовой электродинамики, вакуумный фермионный ток не равен нулю; при этом вакуумный ток и ток реальных фермионов при отражении одной пространственной координаты (это преобразование аналогично отражению трех пространственных координат в 3 + 1 измерениях) преобразуются по-разному.

Ниже будет показано, что и в (2 + 1)-мерной модели вакуумный фермионный ток будет равен нулю, если считать, что есть только один сорт фермионов, а число $\eta = \pm 1$, которым характеризуют два неэквивалентных представления матриц Дирака в 2 + 1 измерениях, интерпретировать как квантовое число, явно описывающее спин фермиона в решениях уравнения Дирака во внешнем однородном электромагнитном поле.

Мы рассмотрим (2 + 1)-мерную калибровочную модель с затравочным топологическим членом Черна–Саймонса, описываемую лагранжианом

$$L = -\frac{\kappa}{4} e^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho + \bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, причем $A_\mu = A_\mu^{(e)} + A_\mu^{(q)}$, где $A_\mu^{(e)}$ – классическое (внешнее) поле, $A_\mu^{(q)}$ – квантованное электромагнитное поле, параметр m имеет смысл массы фермиона, а $e^{\mu\nu\rho}$ – полностью антисимметричный единичный псевдотензор третьего ранга, у которого отличны от нуля лишь компоненты с тремя различными индексами. При перестановке любых двух индексов компоненты псевдотензора $e^{\mu\nu\rho}$ меняют знак, и мы полагаем, что $e^{012} = 1$.

Заметим, что массовый член в (1) не инвариантен относительно операции обращения времени (и фактически пространственной четности), поэтому член Черна–Саймонса вида [8]

$$L_{CS} = \frac{e^2 \operatorname{sign} m}{16\pi} e^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho$$

может генерироваться в вакууме “динамически”.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ ФЕРМИ-ПОЛЯ В 2 + 1 ИЗМЕРЕНИЯХ

В 2 + 1 измерениях, как известно (см., например, [1]–[3]), алгебра γ^μ -матриц Дирака может быть представлена через двумерные матрицы Паули σ_j . Поэтому обычно считается, что в 2 + 1 измерениях есть два сорта фермионов, соответствующих сигнатуре двумерных матриц Дирака [2],

$$\eta = \frac{i}{2} \operatorname{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) = \pm 1.$$

Два знака η отвечают двум различным неэквивалентным представлениям матриц Дирака

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2$$

и

$$\gamma^0 = -\sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2.$$

Следовательно,

$$\sigma^{\mu\nu} = \pm e^{\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda, \quad \gamma^5 = \pm iI, \quad (2)$$

где верхний (нижний) знак в формуле (2) соответствует первому (второму) представлению; метрический тензор пространства Минковского имеет вид $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ и I – единичная двухрядная матрица.

Нам представляется полезной и, как будет показано ниже, достаточно оправданной идея не вводить два сорта фермионов, а использовать эти два неэквивалентных представления матриц Дирака (а точнее, оба знака η) для описания спина фермиона в $2 + 1$ измерениях, который является псевдоскаляром относительно лоренцевых преобразований. Для этого полагаем

$$\gamma^0 = \eta\sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2.$$

Таким образом, мы считаем, что модель содержит фермионы только одного сорта, но квантовое состояние фермиона характеризуется знаком η .

Видно, что модель с заряженными фермионами, описываемая лагранжианом (1), инвариантна относительно операции зарядового сопряжения. Более того, преобразование $m \rightarrow -m$ эквивалентно преобразованию $\gamma^\mu \rightarrow -\gamma^\mu$ или $\eta \rightarrow -\eta$. Следовательно, без потери общности можно выбрать параметры e и m положительными.

Тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, 3-вектор тока J^μ и тензор спинового момента дираковского поля $S^{\rho(\mu\nu)}$ во внешнем электромагнитном поле можно представить в виде

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial^\nu - eA_{(e)}^\nu) \psi - ((-i\partial^\nu - eA_{(e)}^\nu) \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi], \quad J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \\ S^{\rho(\mu\nu)} &= -\frac{1}{4} \bar{\psi} [\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho] \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Полагая в последней формуле $\rho = 0$ и $\mu, \nu = 1, 2$, видим, что пространственная плотность спина $S^{0(12)} = S$ выражается через матрицу σ_3 ,

$$S = \frac{\eta}{2} \int (\bar{\psi} \psi) d^3x = \frac{1}{2} \int \psi^*(x) \sigma_3 \psi(x) d^3x. \quad (4)$$

Видно, что оператор σ_3 не коммутирует с оператором Гамильтона $\mathcal{H}$ в $2 + 1$ измерениях, так как в $\mathcal{H}$ входят все три матрицы Паули. Действительно, оператор Гамильтона

$$\mathcal{H} = \eta(\sigma_1 P_2 - \sigma_2 P_1 + \sigma_3 m), \quad (5)$$

где e – электрический заряд фермиона, $P_\mu = -i\partial_\mu + eA_\mu^{(e)}$ – оператор обобщенного импульса, $A_\mu^{(e)}$ – вектор-потенциал внешнего постоянного и однородного магнитного поля. Ясно, что единственный матричный оператор, коммутирующий с $\mathcal{H}$, должен быть пропорционален двухрядной единичной матрице. Собственные значения спина заряженного фермиона при движении в постоянном и однородном магнитном поле в $2 + 1$ измерениях можно определить как $\text{sign } m/2$ [8], [9] или $\text{sign } eB/2$ [10].

Определим сохраняющийся оператор спина в 2 + 1 измерениях аналогично случаю 3 + 1 измерений [11]. Для этого нужно использовать только четные части (не смешивающие состояния с разными знаками энергии) соответствующих спиновых операторов. Четную часть оператора $S = \sigma_3/2$ можно выделить, используя знаковый оператор

$$\Lambda = \frac{\mathcal{H}}{|\mathcal{H}|}.$$

В результате простых вычислений собственные значения полученного таким образом сохраняющегося оператора спина можно представить в виде $s = \eta m / (2|E|)$, где E – собственное значение оператора Гамильтона (5).

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Построим решения уравнения Дирака в 2 + 1 измерениях для свободного массивного фермиона. Для нахождения этих решений полезно использовать аналогию с соответствующими решениями в 3 + 1 измерениях. Движение свободного фермиона массы m в 2 + 1 измерениях будем описывать уравнением Дирака, записанном в ковариантном виде,

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)\psi \equiv (\eta\sigma_3\hat{p}_0 - i\sigma_1\hat{p}_1 - i\sigma_2\hat{p}_2 - m)\psi = 0. \quad (6)$$

Здесь $\hat{p}_\mu = (i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y) \equiv (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$ – оператор 3-импульса фермиона.

Состояние свободного фермиона с определенными значениями энергии, импульса и спина описывается плоской волной

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}} u_p e^{-ipx}, \quad (7)$$

где p – собственное значение 3-импульса, $E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m^2} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; амплитуда волны u_p – определенным образом нормированный спинор, компоненты которого удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$(\gamma p - m)u_p = 0. \quad (8)$$

Заметим, что, зафиксировав знак m , состояния свободного фермиона с “отрицательной частотой” $-E$, мы получим, изменив также знак $\mathbf{p}$,

$$\psi_{-p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}} u_{-p} e^{ipx}, \quad (9)$$

а компоненты спинора u_{-p} удовлетворяют уравнению

$$(\gamma p + m)u_{-p} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что соотношение $p^2 = m^2$ (как и в случае 3 + 1 измерений) является условием совместности каждого из уравнений (8) и (10).

Спиноры всегда будем нормировать инвариантными условиями

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad \bar{u}_{-p} u_{-p} = -2m, \quad (11)$$

где $\bar{u} = u^* \gamma^0$ – дираковски сопряженный спинор. Из соотношений (8), (10) и (11) нетрудно получить, что

$$\bar{u}_p \gamma^\mu u_p = \bar{u}_{-p} \gamma^\mu u_{-p} = 2p^\mu, \quad (12)$$

а 3-вектор плотности тока можно записать как

$$J^\mu = \bar{\psi}_{\pm p} \gamma^\mu \psi_{\pm p} = \frac{1}{2E} \bar{u}_{\pm p} \gamma^\mu u_{\pm p} = \frac{p^\mu}{E} = (1, \mathbf{v}), \quad (13)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ – скорость частицы. Видим также, что функции ψ_p нормированы “на одну частицу в двумерном объеме $V = 1$ ”. Следует подчеркнуть, что в $2+1$ измерениях верхняя (нижняя) компонента спинора u_p играет роль большой (малой) компоненты волновой функции и, конечно, не описывает проекцию спина фермиона, так как спин фермиона является псевдоскаляром, а не псевдовектором, как в $3+1$ измерениях. Подчеркнем, что в состоянии с определенными значениями энергии и импульса спин фермиона (число η) имеет одно значение.

Чтобы понять, в чем отличие решений свободного уравнения Дирака в $2+1$ измерениях от соответствующих решений в $3+1$ измерениях, представим u_p в виде

$$u_p = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

а уравнение (8) перепишем как систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\eta E - m)\phi - (p_2 + ip_1)\chi &= 0, \\ (\eta E + m)\chi - (p_2 - ip_1)\phi &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$E^2 - m^2 = \mathbf{p}^2,$$

а соотношение между ϕ и χ можно найти в двух эквивалентных формах,

$$\phi = \frac{p_2 + ip_1}{\eta p_0 - m} \chi, \quad \chi = \frac{p_2 - ip_1}{\eta p_0 + m} \phi. \quad (16)$$

Находя из (15) спинор u_p , решения уравнения Дирака (6) с положительными частотами представим в виде

$$\psi_p(x) = \frac{e^{-iEt + i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} \sqrt{E + \eta m} \\ -i\sqrt{E - \eta m} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $\mathbf{r}$ – двумерный вектор, $\varphi = \arctg(p_2/p_1)$. В системе покоя фермиона, т.е. при $E = m$, вместо (15) получим

$$\begin{aligned} (1 - \eta)m\phi &= 0, \\ (1 + \eta)m\chi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда видно, что ϕ и χ при $E = m$ становятся независимыми и “выживает” только одна из двух компонент положительно-частотного решения:

$$\psi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-imt} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\eta} \\ -i\sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Нормированные решения уравнения Дирака, относящиеся к отрицательным энергиям $-E$, можно получить из положительно-частотных решений зарядовым сопряжением (осуществляемым с помощью матрицы $\gamma^2 = i\sigma_2$) и одновременным изменением знака перед η или прямо, подставив в (9) решение уравнения (10). В результате найдем

$$\psi_{-p}(x) = \frac{e^{+iEt - i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} i\sqrt{E + \eta m} e^{i\varphi} \\ \sqrt{E - \eta m} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

причем при $E = -m$ имеем

$$\psi_{-m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{imt} \begin{pmatrix} i\sqrt{1+\eta} \\ \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Движение фермиона массы m и заряда e во внешнем постоянном и однородном магнитном поле описывается уравнением Дирака в 2 + 1 измерениях в ковариантной форме

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu - m)\Psi = 0. \quad (22)$$

Здесь $\hat{P}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu^{(e)} \equiv (\hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2)$ – оператор обобщенного импульса фермиона, вектор-потенциал $A_\mu^{(e)}$, выбранный в калибровке Ландау ($A_0^{(e)} = A_1^{(e)} = 0$, $A_2^{(e)} = Bx$), описывает только внешнее магнитное поле, которое определено как $B = \partial_1 A_2^{(e)} - \partial_2 A_1^{(e)}$. Решение уравнения Дирака (22) можно найти методом собственных функций, развитым Ритусом в работе [12] для случая КЭД₃₊₁ (см. также [13]), причем целесообразно построить решения, характеризуемые теми же квантовыми числами, что и решения свободного уравнения Дирака.

Предварительно удобно ввести спинор $u_{\bar{p}}$, подчиняющийся свободному уравнению Дирака [13]

$$(\gamma \bar{p} - m)u_{\bar{p}} = 0. \quad (23)$$

Здесь “3-вектор” $\bar{p}_\mu$ имеет компоненты

$$\bar{p}_\mu = (p_0, 0, \text{sign}(eB)\sqrt{2|eB|n}), \quad (24)$$

а $p^2 = \bar{p}^2$. Вектор $\bar{p}$ зависит только от “динамических” квантовых чисел p_0 и n .

Спектр энергий и нормированные решения уравнения (23) имеют вид

$$\bar{p}_0 \equiv E_n = \sqrt{m^2 + 2|eB|n}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} u_{\bar{p}}^1 \\ u_{\bar{p}}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_+^1 \\ u_+^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_n + \eta m} \\ -i \text{sign}(eB)\sqrt{E_n - \eta m} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Это – положительно-частотные решения уравнения Дирака.

Уравнение для спинора $u_{-\bar{p}}$, описывающее решения уравнения Дирака с отрицательными энергиями, можно получить из уравнения (23), заменяя в последнем оператор $\bar{p}$ на $-\bar{p}$:

$$(\gamma\bar{p} + m)u_{-\bar{p}} = 0. \quad (27)$$

Нормированные решения уравнения (27) имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_{-\bar{p}}^1 \\ u_{-\bar{p}}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_-^1 \\ u_-^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E_n}} \begin{pmatrix} i \operatorname{sign}(eB)\sqrt{E_n - \eta m} \\ \sqrt{E_n + \eta m} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Заметим, что отрицательно-частотные решения уравнения Дирака, описывающие античастицу, можно получить из решений (23), как и для свободной частицы, операцией зарядового сопряжения и изменением знака перед η .

Состояния фермиона с $e > 0$ на массовой поверхности в постоянном магнитном поле характеризуются положительно-частотными решениями уравнения Дирака

$$\Psi^+(t, \mathbf{r}) = e^{-iE_n^+ t} \psi_n^+(\mathbf{r}) \equiv e^{-iE_n^+ t + ip_2 y} \begin{pmatrix} \psi_+^1(X) \\ \psi_+^2(X) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

соответствующими собственному значению энергии (уровень Ландау) $E_n^+ = E_n \equiv \sqrt{m^2 + 2n|eB|}$. Компоненты зависящего от $X = \sqrt{2|eB|}(x - p_2/(eB))$ спинора $\psi(X)$, найденные выше, приведем в явном виде:

$$\begin{pmatrix} \psi_+^1(X) \\ \psi_+^2(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+^1 U_n(X) \\ u_+^2 U_{n-1}(X) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Здесь u_+^1, u_+^2 определяются формулой (26), а функции

$$U_n(X) = \frac{|eB|^{1/4}}{(2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}} e^{-X^2/4} H_n\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right),$$

выражены через полиномы Эрмита $H_n(X/\sqrt{2})$.

Так как функция $U_{-1}(X) = 0$, то имеется только одно (низшее) состояние фермиона ($E = m, n = 0$) с $m > 0$ и фиксированным знаком $\operatorname{sign}(eB)$ в магнитном поле, соответствующее значению $\eta = 1$, что полностью аналогично случаю свободного движения фермиона. Заметим, что в $3 + 1$ измерениях в низшем состоянии проекция спина фермиона с $m > 0, e > 0$ на направление магнитного поля также принимает только одно (а не два, как в других состояниях) значение.

Нормированные решения уравнения Дирака, относящиеся к отрицательным энергиям ($E_n^- = -E_n$) можно получить из положительно-частотных решений операцией зарядового сопряжения:

$$\Psi^-(t, \mathbf{r}) = e^{iE_n^- t} \psi_n^-(\mathbf{r}) \equiv e^{iE_n^- t - ip_2 y} \begin{pmatrix} \psi_-^1(X) \\ \psi_-^2(X) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_-^1(X) \\ \psi_-^2(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_-^1(n) U_{n-1}(X) \\ u_-^2(n) U_n(X) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

а $u_-^1(n)$, $u_-^2(n)$ определяются формулами (28). В низшем состоянии $E = -m$, $n = 0$ функция $U_{-1}(X) = 0$ и спин фермиона (с $m > 0$, $e < 0$) в магнитном поле может иметь только значение, соответствующее $\eta = -1$.

Запишем выражения для операторов поля фермионов в схеме вторичного квантования в виде следующих разложений:

$$\hat{\Psi} = \sum_n (\hat{a}_n \Psi_n^+ e^{-iE_n^+ t} + \hat{b}_n^+ \Psi_n^- e^{iE_n^- t}), \quad (33)$$

$$\hat{\bar{\Psi}} = \sum_n (\hat{a}_n^+ \bar{\Psi}_n^+ e^{iE_n^+ t} + \hat{b}_n \bar{\Psi}_n^- e^{-iE_n^- t}). \quad (34)$$

Здесь $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, а $\Psi^\dagger$ – эрмитово-сопряженный спинор. Следует подчеркнуть, что суммирование по n в формулах (33), (34) начинается с нуля как для положительно-, так и для отрицательно-частотных решений. Этим формулы (33), (34) отличаются от формул из работ [7], где суммирование по n для отрицательно-частотных решений начиналось с единицы.

Операторы уничтожения фермионов $\hat{a}_n$, как и операторы уничтожения антифермионов $\hat{b}_n$, стоят в виде коэффициентов при найденных нормированных решениях одночастичного уравнения Дирака. Операторы поля фермионов удовлетворяют стандартным антикоммутиационным соотношениям. Фермионный заряд

$$Q = \int J^0 d^2 x$$

определяется временной компонентой нормально-упорядоченного фермионного тока

$$J^\mu = \frac{1}{2} [\Psi^\dagger(z), \gamma^0 \gamma^\mu \Psi(z)]. \quad (35)$$

Подставляя операторные разложения (33), (34) в формулу для Q , а также учитывая ортонормированность решений уравнения Дирака $\Psi(z)$ и замечание о суммировании по n , получим оператор фермионного заряда в виде

$$\hat{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} [\hat{a}_n^+ \hat{a}_n - \hat{b}_n^+ \hat{b}_n]. \quad (36)$$

Среднее по вакууму от оператора электрического заряда $e\langle 0|\hat{Q}|0\rangle \equiv \langle J_e^0 \rangle$ можно представить как

$$\langle J_e^0 \rangle = e \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{\eta} [\langle N_{n,\eta} \rangle - \langle \bar{N}_{n,\eta} \rangle], \quad (37)$$

где положительные целые числа $\langle N_{n,\eta} \rangle$ и $\langle \bar{N}_{n,\eta} \rangle$ равны соответственно числам реальных частиц и античастиц в состояниях с определенными n , p_2 , η , а $n_{\max}$ – номер максимального заполненного уровня Ландау.

Учитывая, что в лоренцевой системе отсчета, в которой внешнее (классическое) магнитное поле равно B , число квантовых состояний фермионов для заданного уровня Ландау n равно $|eB|/(2\pi)$, представим вакуумное среднее $\langle J_e^0 \rangle$ в виде

$$\langle J_e^0 \rangle = e \frac{|eB|}{2\pi} \left(l_0 + \sum_{n=1}^{n_{\max}} l_n \right). \quad (38)$$

Здесь l_n – так называемый фактор заполнения n -го уровня Ландау реальными фермионами. Видно, что l_0 может принимать значения 0 и 1, а l_n (с $n = 1, 2, \dots$) – 0 и 2.

4. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ

Если, как и в работе [7], предположить, что в модели, описываемой лагранжианом (1), магнитное поле генерируется спонтанно в данной лоренцевой системе отсчета, то из уравнений Максвелла

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \kappa e^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = J_e^\mu \quad (39)$$

для временной компоненты с $\mu = 0$ и формулы (37) следует, что

$$\kappa B = e \frac{|eB|}{2\pi} \left(l_0 + \sum_{n=1}^{n_{\max}} l_n \right),$$

т.е. $B \neq 0$ при условии, что

$$\kappa = e \frac{|e|}{2\pi} \left(l_0 + \sum_{n=1}^{n_{\max}} l_n \right). \quad (40)$$

Состояние вакуума определяется как состояние, когда все l_n равны нулю (ср. с [1], [4]–[7]). Поэтому собственные значения фермионного и электрического заряда (а значит, и коэффициент Черна–Саймонса κ) вакуума в постоянном однородном магнитном поле также должны быть равны нулю.

Как известно (см., например, [14]), в S -матрице квантовой электродинамики уже в однопетлевом приближении появляются члены второго порядка (по константе взаимодействия), отвечающие собственным энергиям заряженного фермиона и фотона. В частности, поправка к лагранжиану электромагнитного поля в этом приближении определяется членом вида

$$S_2 = -iA_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y), \quad (41)$$

где $\Pi^{\mu\nu}(x, y)$ – поляризационный оператор фотона. В КЭД₃₊₁ в отсутствие реальных частиц вклад в S_2 может быть ненулевым только в том случае, если в вакууме (поляризованном, например, внешним электромагнитным полем) возникает индуцированный электрический ток.

Однако массовый член в лагранжиане (1) с $\kappa = 0$ приводит к появлению в поляризационном операторе (ПО) “топологического” члена Черна–Саймонса $i\kappa_s(p)e^{\mu\nu\rho}p_\rho$, где p^μ – 3-импульс фотона. Этот член не исчезает, когда $p_\mu = 0$. Полный коэффициент при члене Черна–Саймонса (с учетом вклада реальных частиц, если они есть) в ПО называют индуцированным коэффициентом Черна–Саймонса; соответствующий член в эффективном лагранжиане называют индуцированным членом Черна–Саймонса [8], [15]–[17].

В моделях с двумя сортами фермионов ненулевой вклад вакуума в индуцированный коэффициент Черна–Саймонса равен

$$\kappa_s(0) = -(\text{sign } m) \frac{e^2}{4\pi}, \quad (42)$$

как в отсутствие поля ($B = 0$), так и при $B \neq 0$. В таких моделях топологический член Черна–Саймонса и масса фотона генерируются радиационными поправками и в отсутствие магнитного поля [15], [18]. Заметим, что если $B \neq 0$, то в правой стороне формулы (42) вместо знаковой функции $\text{sign } m$ можно поставить функцию $\text{sign}(eB)$, так как в магнитном поле античастицы можно отличить от частиц и по знаку заряда.

В рассматриваемой здесь (2 + 1)-мерной калибровочной модели с заряженными фермионами вклад вакуума в индуцированный коэффициент Черна–Саймонса равен нулю (см. также [7], [13]), но вклад реальных частиц отличен от нуля.

Чтобы вычислить этот вклад, найдем вначале временную компоненту тока фермионов, используя функцию Грина уравнения Дирака в однородном магнитном поле

$$S(p) = \frac{1}{\gamma p - m + i\delta_e} \equiv \frac{\gamma p + m}{\bar{p}^2 - m^2 + i\delta_e}, \quad (43)$$

где согласно правилу Фейнмана введен “причинный” фактор $i\delta_e$ ($\delta_e > 0$), смещающий полюсы $p_0 = \pm E_n \equiv \pm \sqrt{m^2 + 2|eB|n}$ с вещественной оси p_0 .

Среднюю по вакууму плотность фермионов можно определить формулой

$$J^0 = -2i \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \text{tr}[\gamma^0 S_F(\bar{p})]. \quad (44)$$

Так как векторы $\bar{p}$ и p^2 не зависят от квантового числа p_2 в (43) и, следовательно, каждый уровень энергии вырожден с бесконечной кратностью, мы должны учесть, что число вырожденных состояний на единицу площади равно $|eB|/(2\pi)$ для каждого уровня с номером n .

Если плотность реальных фермионов не равна нулю, нам нужно в выражении (44) сдвинуть переменную интегрирования $p_0 \rightarrow p_0 + \mu$, где $\mu > 0$ – химический потенциал фермионов. После несложных преобразований приходим к следующей формуле для временной компоненты электрического тока фермионов (см. [4]):

$$J_e^0 = -i \frac{e|eB|}{2\pi^2} \int dp_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\eta p_0 + \mu - E_n + ip_0 \delta_e}. \quad (45)$$

Интегрируя (45) по p_0 , получим

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \frac{e|eB|}{2\pi} \sum_{\eta=\pm 1} \left\{ -\frac{\eta}{2} \theta(m - \mu) + \left(\delta_{n,0} \delta_{\text{sign}(eB), \text{sign } \eta} + \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] \right) \theta(\mu - m) \right\} = \\ &= \frac{e|eB|}{2\pi} \left(l_0 + 2 \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] \right) \equiv \kappa_s(\mu) B. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь θ – функция Хевисайда, $[x]$ обозначает целую часть x (мы предполагаем, что аргумент $(\mu^2 - m^2)/(2|eB|)$ функции $[(\mu^2 - m^2)/(2|eB|)]$ не равен целому числу), $l_0 = 0, 1$ – фактор заполнения уровня Ландау с номером $n = 0$ реальными фермионами при заданном химическом потенциале μ . Очевидно, что индуцированный коэффициент Черна–Саймонса $\kappa_s(\mu)$ можно также представить в виде (40). Вследствие релятивистской ковариантности плотность электрического тока (46) в произвольной лоренцевой системе отсчета (электромагнитное поле в которой описывается тензором $F^{\mu\nu}$) есть $J_e^\mu = \kappa_s(\mu)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}/2$.

Заметим, что ток J_e^μ определяется неисчезающими компонентами поляризационного оператора фотона $\Pi^{\mu\nu}(x, x)$, поэтому согласно (41) в эффективном лагранжиане появится член вида

$$J_e^\mu(x)A_\mu(x) = \kappa_s(\mu)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}(x)A_\mu(x)/2. \quad (47)$$

Так как $\langle J_e^0 \rangle = \Pi_1(0)\langle F_{12} \rangle$, где $\Pi_1(0) \equiv \kappa_s(\mu)$ – компонента поляризационного оператора, которая дает вклад в индуцированный член Черна–Саймонса, а из уравнений движения следовало, что в правильном вакууме $\kappa\langle F_{12} \rangle = \langle J_e^0 \rangle$, то для того чтобы магнитное поле не исчезало ($B \neq 0$), должно выполняться условие

$$\kappa = \Pi_1(0). \quad (48)$$

Появление в эффективном лагранжиане изучаемой модели с ненулевой плотностью фермионов члена Черна–Саймонса означает, что изначально топологически массивный фотон может потерять массу динамически. Действительно, динамические уравнения для фотона в рассматриваемой модели определяются эффективным лагранжианом (мы учитываем только неисчезающие при $p \rightarrow 0$ поправки)

$$S = - \int d^3x \left\{ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\kappa_s(\mu) - \kappa)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}A_\rho \right\}. \quad (49)$$

Первая пара уравнений Максвелла не меняется, так как не меняется связь напряженностей полей с потенциалом A_μ . Вторая же пара уравнений получается при варьировании по A_μ действия (49):

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - (\kappa_s(\mu) - \kappa)\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = 0, \quad (50)$$

откуда следует, что в изучаемой модели фотон становится безмассовым, если $\kappa_s(\mu) = \kappa$.

Наоборот, в КЭД₂₊₁ ($\kappa = 0$), как можно было бы заключить на основании выражения (50), фотон должен приобрести “массу” топологического происхождения при наличии реальных частиц. Однако этот вопрос нуждается в более тщательном изучении. Действительно, если магнитное поле не внешнее, а генерируется током реальных частиц модели, то его величина должна определяться из условия минимума плотности энергии рассматриваемой системы полей; при этом необходимо сравнить плотности энергии на фоне вакуума теории возмущений (с $B = 0$) и плотности энергии на фоне непертурбативного вакуума. Решение этой задачи в работе [7] для случая исчезающе малой массы фермиона показало, что в этом пределе минимум плотности энергии в КЭД₂₊₁ достигается при $B = 0$, т.е. фотон остается безмассовым и в КЭД₂₊₁.

5. ФОТОН КАК ГОЛДСТОУНОВСКИЙ БОЗОН

Покажем теперь, что при спонтанном нарушении лоренц-инвариантности (вследствие генерации постоянного однородного магнитного поля B в некоторой лоренцевой системе отсчета) в модели КЭД₂₊₁ с затравочным членом Черна–Саймонса равенство нулю массы топологически массивного фотона при выполнении условия $\kappa_s(\mu) = \kappa$ обеспечивается теоремой Намбу–Голдстоуна, так как физический фотон фактически и есть безмассовый голдстоуновский псевдо(скалярный) бозон. Сохраняющимися токами в такой модели являются обобщенные угловые моменты

$$M^{(\mu\nu)\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} + S^{(\mu\nu)\rho}, \quad (51)$$

где $T^{\nu\rho}$ – симметричный (метрический) тензор энергии-импульса электромагнитного поля, а

$$S^{(\mu\nu)\rho} = A^\nu \partial^\rho A^\mu - A^\mu \partial^\rho A^\nu \quad (52)$$

– тензор спина.

Легко проверить, что выполняется уравнение непрерывности (закон сохранения обобщенного углового момента)

$$\partial_\rho M^{(\mu\nu)\rho} = 0. \quad (53)$$

Соответствующие “заряды” определяются интегралами

$$M^{\mu\nu} = \int d^2x M^{(\mu\nu)0}(\mathbf{x}, t), \quad (54)$$

причем два “заряда”

$$Q_i \equiv M_i^0 = \int d^2x M^{(0i)0}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, \quad (55)$$

генерируют лоренцевы преобразования между инерциальными системами отсчета (так называемые лоренцевы бусты). Предположим, что операторы “зарядов” $Q_i(t)$ и некоторые локальные операторы электромагнитного поля $F_j(\mathbf{x}, t) = \partial_0 A_j - \partial_j A_0 \equiv F_{0j}$ удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям

$$[Q_i(t), F_j(\mathbf{x}, t)] = ie_{ijk} F^k(\mathbf{x}, t), \quad (56)$$

где e_{ijk} – вещественный полностью антисимметричный по всем индексам тензор, причем формально здесь латинские индексы могут принимать значения 0, 1 и 2. Это означает, что вакуумное среднее

$$\langle 0 | [Q_i(t) F_j(\mathbf{x}, t)] | 0 \rangle = ie_{ijk} \langle 0 | F^k(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \neq 0 \quad (57)$$

по крайней мере при некоторых значениях индексов, т.е. по крайней мере один “заряд” не сможет обратить вакуум в нуль и по крайней мере у одной компоненты электромагнитного поля появится отличное от нуля вакуумное среднее.

Положим $A_\mu(x) = A_\mu^{(e)}(x) + A_\mu^{(q)}(x)$, $A_0^{(e)} = 0$, $A_i^{(e)} = e^{ik} B x_k$, где e^{ik} – вещественный антисимметричный тензор. Здесь $A_\mu^{(e)}(x)$ – 3-вектор-потенциал классического (генерируемого в некоторой лоренцевой системе отсчета) магнитного поля, $A_\mu^{(q)}$ – 3-вектор-потенциал (флуктуирующего) поля излучения, B – магнитное поле. Учитывая закон сохранения тока (53) и равенство

$$\int d^2 x \langle 0 | [\partial_k M^{(0i)k}(x), F^{0j}(0)] | 0 \rangle = 0, \quad (58)$$

приходим к формуле

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \int d^2 x e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | [M^{(0i)0}(x), F^{0j}(0)] | 0 \rangle = i e_{ij} \langle 0 | F_{12}(0) | 0 \rangle \equiv i e_{ij} B. \quad (59)$$

Напомним, что условие (58) исключает наличие полюса в матричном элементе $\langle 0 | \mathbf{M}^{(0i)}(0) | P \rangle$ при $\mathbf{p} = 0$, несмотря на существование в модели частиц с нулевой массой. В рассматриваемом случае матричный элемент двумерной дивергенции тока $\mathbf{M}^{(0i)}(\mathbf{x}, t)$ между состояниями с $\mathbf{p} = 0$ обращается в нуль и условие (58) выполняется. Следует подчеркнуть, что все формулы этого раздела можно обосновать только в $2 + 1$ измерениях, так как согласно теореме Голдстоуна спонтанное нарушение непрерывных симметрий может сопровождаться возникновением безмассовых бозонов только нулевого спина; в рассматриваемом случае возникает магнитное поле, которое описывается псевдоскаляром F_{12} .

Связанные со спонтанным нарушением симметрии безмассовые голдстоуновские состояния имеют те же квантовые числа, что и $M^{(0i)0}$ (и F_{0j}), поскольку эти состояния порождаются действием указанных операторов на вакуум, а безмассовым голдстоуновским бозоном в $2 + 1$ измерениях является (векторный) безмассовый фотон. Ненулевое вакуумное среднее здесь имеет (вследствие нарушения лоренц-инвариантности теории) векторное поле. Тем не менее условия теоремы Голдстоуна не нарушены, так как спин безмассового голдстоуновского бозона определяется трансформационными свойствами $M_\mu^{(0i)}$ (и F_{0k}) относительно лоренцевых бустов; при фиксированном $i = 1, 2$, очевидно, это не лоренцев вектор, а одна компонента псевдотензора третьего ранга, т.е. фактически псевдоскаляр. Заметим, что появление ненулевого вакуумного среднего у полей с ненулевым спином в $3 + 1$ измерениях полностью исключено, так как нарушение лоренц-инвариантности теории в $3 + 1$ измерениях противоречило бы экспериментальным данным.

То, что масса физического (реального) фотона в $2 + 1$ калибровочной теории остается равной нулю, можно доказать и непосредственно. Как и в $3 + 1$ измерениях, фотон должен оставаться безмассовым, если тензор поляризации $\Pi_{\mu\nu}(p^2) = (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \Pi(p^2)$ сохраняется и $\Pi(p^2)$ не имеет полюса при $p^2 = 0$. Эти свойства тензора поляризации являются следствием того, что F_{0k} взаимодействует с сохраняющимся током $M_\mu^{(0i)}$. Поэтому, используя закон сохранения тока (53) и уравнения для электромагнитного

поля, достаточно доказать справедливость следующего обобщенного тождества Уорда–Такахаши, которое для обсуждаемой здесь модели было получено в работе [7]:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \int d^3x e^{ipx} \partial_\rho \langle 0 | T [M^{(0i)\rho}(x), F^{0j}(0)] | 0 \rangle = \\ = \int d^2x \langle 0 | [M^{(0i)0}(x), F^{0j}(0)] | 0 \rangle = ie_{ij} \langle 0 | F_{12}(0) | 0 \rangle \equiv ie_{ij} B. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь T обозначает хронологическое произведение двух операторов, а B – генерируемое магнитное поле.

Заметим, что так как равенство нулю массы физического фотона рассматриваемой калибровочной модели обеспечивается теоремой Намбу–Голдстоуна, соотношение (48) не будет изменяться и при учете высших порядков теории возмущений [7].

Благодарности. Автор благодарит А. В. Борисова, В. Н. Родионова за полезные обсуждения и И. В. Тютина за точные и ценные замечания.

Список литературы

- [1] *A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
- [2] *R. E. Prange, S. M. Girvin (eds.).* The Quantum Hall Effect. New York: Springer, 1990.
- [3] *F. Wilczek.* Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
- [4] *A. M. J. Schakel.* Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1428.
- [5] *A. Neagu, A. M. J. Schakel.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
- [6] *Y. Hosotani.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2022; *D. Wesolowski, Y. Hosotani.* Phys. Lett. B. 1995. V. 354. P. 396; hep-th/9505113.
- [7] *Y. Hosotani.* Phys. Lett. B. 1993. V. 319. P. 332; hep-th/9308045; Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2022; hep-th/9402096.
- [8] *S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975.
- [9] *D. Boyanovsky, R. Blankenbecler, R. Yahalom.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 270. P. 483.
- [10] *В. Р. Халилов.* ТМФ. 2001. Т. 129. С. 55.
- [11] *И. М. Тернов, В. В. Михайлин, В. Р. Халилов.* Синхротронное излучение и его применения. М.: Изд. МГУ, 1985.
- [12] *В. И. Рутус.* Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 5.
- [13] *В. Р. Халилов.* ТМФ. 2000. Т. 125. С. 132.
- [14] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
- [15] *A. N. Redlich.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 18; Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 2366.
- [16] *S. Coleman, B. Hill.* Phys. Lett. B. 1985. V. 159. P. 184.
- [17] *T. Bernstein, A. Lee.* Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 1020.
- [18] *K. Ishikawa.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1615; Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 1432.

Поступила в редакцию 4.VI.2003 г.,
после доработки 8.I.2004 г.