Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Построение модельного уравнения переноса безмассового бозе-газа и его аналитическое решение, *ТМФ*, 1997, том 111, номер 3, 462–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 09:29:15

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов†

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА БЕЗМАССОВОГО БОЗЕ-ГАЗА И ЕГО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Построено модельное кинетическое уравнение переноса безмассового бозе-газа. Рассмотрено его приложение к решению граничной задачи переноса излучения в полупространственной дисперсной среде, находящейся в локальном тепловом равновесии с излучением. Показано, что скачок температуры между температурой дисперсной среды и температурой падающего излучения существенно зависит от характера рассеивающих свойств частиц дисперсной среды.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В последние десятилетия теория переноса получила значительное развитие для бальмановского газа [1, 2], бальмановской плазмы [3, 4] и ферми-газа [3–6]. Необходимо отметить также прогресс в описании переноса излучения в дисперсных (“мутных”) средах [7, 8]. При этом использовались как приближенные, так и точные аналитические методы, в последнем случае главным образом для тех или иных моделей интеграла столкновений.

В отличие от случая бальмановского и ферми-газов общая постановка задач переноса для бозе-газа отсутствует, хотя ряд частных результатов был получен (см., например, [7, 8]). В то же время явления переноса в бозе-газе довольно часто встречаются на практике: перенос тепла фононами в твердом теле, перенос излучения, осуществляемый фотонами в дисперсных средах. Все такие процессы имеют ряд общих черт. В дальнейшем ограничимся случаем безмассовых бозе-систем, в которых в термодинамическом равновесии химический потенциал равен нулю.

Рассмотрим проблему построения уравнения переноса, описывающего эволюцию бозе-газа. Используемые в теории переноса интегралы столкновений учитывают либо упругое рассеяние фотонов (электромагнитные волны), либо поглощение их дисперсной средой. Однако, если дисперсная среда, в которой происходит перенос излучения, находится в локальном равновесии с фотонным газом, то она не только поглощает, но и переизлучает фотоны. В качестве примера можно привести случай переноса излучения

*Московский педагогический университет, Отдел теоретических проблем РАН

†Московский педагогический университет

в газо-пылевых облаках, где именно подобный перенос излучения из центральных областей облака наружу приводит в итоге к охлаждению и сжатию облака, что, в свою очередь, дает начало процессу звездообразования [9].

В качестве примера построения модельного уравнения переноса рассмотрим модель Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) уравнения Больцмана.

Уравнение Больцмана для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ молекул газа по скоростям имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} f = J(f), \quad (1)$$

где $J(f)$ – интеграл столкновений.

При построении модели левая потоковая часть уравнения Больцмана (1) остается неизменной, а интеграл столкновений преобразуется согласно следующей схеме. Предполагается, что молекулы приходят к равновесному распределению за одно столкновение, т.е. функция распределения молекул после столкновения совпадает с равновесной:

$$f_0 = n_0 (m/2kT_0)^{3/2} \exp[-m(\vec{v} - \vec{u})^2/2kT_0],$$

где n_0 , T_0 , $\vec{u}$ – некоторые параметры, определяемые ниже.

При этом уравнение Больцмана преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} f = \nu(v)(f_0 - f), \quad (2)$$

где $\nu(v)$ – эффективная частота столкновений.

Уравнение Больцмана (1) удовлетворяет законам сохранения числа молекул, импульса и энергии. Подобными же свойствами должно обладать и модельное уравнение (2). Это требование приводит к однозначному определению параметров n_0 , T_0 , $\vec{u}$ (подробнее см. [10]). Для случая $\nu(v) = \text{const}$ параметры n_0 , T_0 , $\vec{u}$ совпадают со средней концентрацией, температурой и скоростью молекул.

Рассмотрим случай безмассового бозе-газа. При этом имеется в виду прежде всего фотонный газ. Случай фононного газа отличается только некоторыми деталями, которые будут отмечаться по ходу изложения.

Состояние фотонного газа описывается функцией распределения $f_i(\omega, \vec{r}, \vec{n})$, где ω – частота, $\vec{n}$ – направление распространения фотона ($\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k}$, $\vec{k}$ – волновой вектор, c – скорость света), индекс i ($i = 1, 2$) нумерует направления поляризации. Для фононного газа возможны три поляризации, поэтому в этом случае индекс i принимает значения $i = 1, 2, 3$. Уравнение переноса для функции распределения $f_i(\omega, \vec{r}, \vec{n})$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \vec{n} \vec{\nabla} f = J(f). \quad (3)$$

Здесь функционал $J(f)$ описывает процесс поглощения и переизлучения фононов дисперсной средой, в которой они распространяются. Отметим, что фононы, в отличие от фотонов, взаимодействуют между собой. При этом под $J(f)$ следует понимать интеграл столкновений фононов. В уравнении (3) величина c – это скорость света для фотонного газа, для фононного газа c – скорость звука (в предположении, что скорости распространения продольных и поперечных колебаний в последнем случае совпадают).

Пусть фотонный газ находится в локальном равновесии с дисперсной средой. При этом функция распределения фотонов, переизлучаемых дисперсной средой, совпадает с планковской функцией:

$$f_P = \left[\exp \frac{\hbar\omega}{kT} - 1 \right]^{-1},$$

где T – параметр, определяемый ниже. Уравнение (3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c\vec{n} \vec{\nabla} f_i = \nu(\omega)(f_P - f_i), \quad (4)$$

где $\nu(\omega)$ – эффективная частота столкновений фотонов. Для фотонов эта величина связана с эффективным сечением поглощения на дисперсных частицах:

$$\nu(\omega) = c \int n(\vec{r}) \sigma_r(\omega) dr,$$

здесь $n(r)$ – распределение частиц по радиусам (в предположении, что они имеют сферическую форму), $\sigma_r(\omega)$ – сечение поглощения на частице радиуса r .

Отметим, что в общем случае необходимо различать процессы рассеяния и переизлучения фотонов. В данной работе этих вопросов для простоты мы не касаемся.

Число фотонов и их импульс при переизлучении, вообще говоря, не сохраняются. В то же время энергия фотонного газа при локальном термодинамическом равновесии между фотонным газом и дисперсной системой должна сохраняться. А это значит, что интеграл от правой части уравнения (4) обращается в нуль:

$$\int \sum_{i=1}^2 \omega^3 \nu(\omega) (f_P - f_i) d\vec{n} d\omega = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) и определяет величину параметра T . Рассмотрим случай, когда бозе-система близка к равновесной. Тогда функцию распределения f_i можно представить в виде

$$f_i = f_P^{(0)} + \psi_i, \quad (6)$$

где ψ_i – линейная поправка к планковскому распределению $f_P^{(0)}$.

Далее будем предполагать, что излучение не поляризовано и зависимость от параметра i у функции распределения отсутствует. Поэтому параметр i у функций распределения f_i и ψ_i опустим. Близость к равновесию означает, что величина T_0 и параметр T , имеющий смысл некоторой эффективной температуры, мало меняются в объеме газа, а это означает, что выполняется соотношение

$$\delta = |T - T_0|/T_0 \ll 1, \quad (7)$$

где T_0 – температура бозе-газа в некоторой точке объема.

При выполнении условия (7) можно провести линеаризацию планковской функции $f_P(\delta)$ относительно параметра δ :

$$f_P = f_P^{(0)} + \frac{\hbar\omega}{(kT_0)^2} E\left(\frac{\hbar\omega}{kT_0}\right) (T - T_0), \quad (8)$$

где

$$E(x) = e^x (e^x - 1)^{-2}.$$

Подставляя выражения (6)–(8) в уравнение (4), получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \vec{n} \vec{\nabla} \psi = \nu(\omega) \left[\frac{\hbar \omega}{(kT_0)^2} E\left(\frac{\hbar \omega}{kT_0}\right) - \psi \right]. \quad (9)$$

Уравнение (9) есть линеаризованная форма уравнения переноса (4).

Из соотношения (5) следует, что величина $T - T_0$ определяется следующим образом:

$$T - T_0 = \frac{(kT_0)^2}{\hbar} \left[\int \nu(\omega) \omega^4 E\left(\frac{\hbar \omega}{kT_0}\right) d\omega d\vec{n} \right]^{-1} \int \nu(\omega) \omega^3 \psi d\omega d\vec{n}.$$

Из уравнения (9) видно, что вместо функции ψ удобно ввести новую функцию φ :

$$\psi = \omega E\left(\frac{\hbar \omega}{kT_0}\right) \varphi.$$

Для функции φ уравнение (9) перепишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \vec{n} \vec{\nabla} \varphi = \nu(\omega) \left[l^{-1} \frac{(kT_0)^2}{\hbar} \int \nu(\omega) \omega^4 E\left(\frac{\hbar \omega}{kT_0}\right) \varphi d\vec{n} d\omega - \varphi \right], \quad (10)$$

где

$$l = \int \nu(\omega) \omega^4 E\left(\frac{\hbar \omega}{kT_0}\right) d\vec{n} d\omega.$$

Рассмотрим случай стационарного процесса и предположим, что функцию $\nu(\omega)$ можно аппроксимировать степенной зависимостью $\nu(\omega) = \nu_0 \omega^\alpha$. Отметим, что поглощению электромагнитного излучения на частицах, размер которых мал по сравнению с длиной волны, соответствует $\alpha = 2$. Для крупных частиц $\alpha = 0$. Введем безразмерные переменные

$$\omega^* = \frac{\hbar \omega}{kT_0} \quad \text{и} \quad x^* = \frac{\nu_0}{c} \left(\frac{kT_0}{\hbar} \right)^\alpha.$$

При этом уравнение (10) перепишется в виде (звездочки у переменных здесь и ниже опускаются)

$$\vec{n} \vec{\nabla} \varphi = \omega^\alpha \left[l_1^{-1} \int \omega^{\alpha+4} E(\omega) \varphi d\vec{n} d\omega - \varphi \right], \quad (11)$$

где

$$l_1 = \int \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\vec{n} d\omega = 4\pi \int_0^\infty \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\omega.$$

Отметим, что при проведении последних выкладок подразумевалось, что величина $\nu(\omega)$ не зависит от координаты. В общем случае это не так. Учет этого обстоятельства осуществляется введением оптической длины [8]. В дальнейшем на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим одномерную задачу, тогда $\varphi = \varphi(x, v, \omega)$, где $v = n_x$, т.е. v – косинус угла между направлением движения кванта и осью x . Тогда уравнение (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, v, \omega) + \omega^\alpha \varphi(x, v, \omega) = \\ = \omega^\alpha \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega'^{\alpha+4} E(\omega') d\omega' \int_{-1}^1 \varphi(x, v', \omega') dv', \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\xi_0 = \int_0^\infty \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\omega.$$

При переходе к уравнению (12) было проведено интегрирование по азимутальному углу в пределах от 0 до 2π , т.к. функция φ от этого угла не зависит.

Рассмотрим конкретную задачу типа задачи Милна. Пусть рассеивающая среда расположена в полупространстве $x > 0$ и пусть вдали от границы в этой среде имеется градиент температуры вдоль оси x . Предположим, что в среду из полупространства $x < 0$ поступает равновесное излучение с температурой T_0 , а все излучение, выходящее из среды, поглощается и не переизлучается обратно. Профиль температуры вдали от границы имеет вид

$$T = T_1 + Kx, \quad (13)$$

где K – градиент температуры. Требуется найти связь между величинами T_0 , T_1 и K . В линейном приближении эту связь можно представить следующим образом:

$$T_1 - T_0 = fK, \quad (14)$$

где f – искомый коэффициент, зависящий от свойств среды.

В применении к теории газо-пылевых облаков данная постановка задачи означает следующее. На границу газо-пылевого облака падает равновесное излучение, температура T_0 которого близка к 3 К. При остывании облака энергия поступает наружу и излучается. Следовательно, в облаке имеется градиент температуры. Требуется найти связь между градиентом температуры, который определяется потоком тепла, температурой T_0 и температурой на границе облака. Эта связь дается соотношением (14) с неизвестным коэффициентом f , который требуется определить.

Нетрудно проверить, что уравнение (12) в качестве решений имеет две дискретные моды (см. ниже раздел 1):

$$\varphi_+(x, v, \omega) = 1, \quad \varphi_-(x, v, \omega) = x - \omega^{-\alpha} v.$$

Граничные условия таковы:

$$\varphi(0, v, \omega) = 0, \quad 0 < v < 1, \quad (15)$$

$$\varphi(x, v, \omega) = K_0 + K(x - \omega^{-\alpha} v) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < v < 0, \quad (16)$$

здесь K – градиент температуры (см. (13)), $K_0 = fKT_0^{-1}$ – неизвестный коэффициент, пропорциональный относительному градиенту температуры. Отметим, что для болцмановского газа аналогичная задача – это задача о скачке температуры, задача Смолуховского.

1. СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРОВ

Из уравнения (12) и граничных условий (15) и (16) видно, что искомая функция φ является функцией двух переменных: x и $\mu = v\omega^{-\alpha}$.

Сделаем в уравнении (12) замену переменных $v = \mu\omega'^{\alpha}$, $\omega = \omega'$. Якобиан этого отображения равен ω'^{α} . Следовательно, уравнение (12) в новых переменных переписывается в виде

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega^{2\alpha+4} E(\omega) d\omega \int_{-\omega^{-\alpha}}^{\omega^{-\alpha}} \varphi(x, \mu') d\mu'. \quad (1.1)$$

Граничные условия (15) и (16) к уравнению (1.1) при данном отображении соответственно преобразуются следующим образом:

$$\varphi(0, \mu) = 0, \quad 0 < \mu < \infty, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x, \mu) = K_0 + K(x - \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -\infty < \mu < 0. \quad (1.3)$$

Если в уравнении (1.1) заменить μ' на $\omega^{-\alpha}\mu'$, то его можно преобразовать к виду

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\omega \int_{-1}^1 \varphi(x, \omega^{-\alpha}\mu') d\mu'. \quad (1.4)$$

Разделим переменные в уравнении (1.4) следующим образом:

$$\varphi_{\eta}(x, \mu) = e^{-x/\eta} \Phi(\eta, \mu), \quad \eta \in \mathbb{C}.$$

Получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \eta \int_0^{\infty} \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\omega \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \omega^{-\alpha}\mu') d\mu'. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$n(\eta) = \int_0^{\infty} \omega^{\alpha+4} E(\omega) d\omega \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \omega^{-\alpha}\mu) d\mu \quad (1.6)$$

и перепишем уравнение (1.5) в виде

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \eta n(\eta). \quad (1.7)$$

Из последнего уравнения в пространстве обобщенных функций находим [11] собственные функции непрерывного спектра

$$\Phi(\eta, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \eta n(\eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + g(\eta) \delta(\eta - \mu). \quad (1.8)$$

Здесь символ P — это главное значение интеграла, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $g(\eta)$ находится из условия нормировки (1.6). Подставляя (1.8) в (1.6), получаем

$$n(\eta)\lambda(\eta) = g(\eta)\xi_\alpha(\eta), \quad (1.9)$$

где

$$\xi_\alpha(\eta) = \int_0^{\eta^{-\frac{1}{\alpha}}} \omega^{2\alpha+4} E(\omega) d\omega,$$

а функция

$$\lambda(z) = 1 + \xi_0^{-1} \frac{1}{2} z \int_0^\infty \omega^{2\alpha+4} E(\omega) d\omega \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - \omega^\alpha z}$$

есть дисперсионная функция задачи, которая может быть выражена через дисперсионную функцию Кейза [12]

$$\lambda_C(z) = 1 + \frac{1}{2} z \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z}$$

следующим образом:

$$\lambda(z) = \xi_0^{-1} \int_0^\infty \omega^{\alpha+4} E(\omega) \lambda_C(\omega^\alpha z) d\omega. \quad (1.10)$$

Граничные значения функции $\lambda_C(\omega^\alpha z)$ на разрезе $\Delta_\alpha = (-\omega^{-\alpha}, \omega^{-\alpha})$ определяются формулами Сохоцкого:

$$\lambda_C^\pm(\omega^\alpha \mu) = \begin{cases} \lambda_C(\omega^\alpha \mu) \pm i \frac{\pi}{2} \omega^\alpha \mu, & \mu \in \Delta_\alpha, \\ \lambda_C(\omega^\alpha \mu), & \mu \notin \Delta_\alpha. \end{cases} \quad (1.11)$$

На основании (1.10) и (1.11) граничные значения $\lambda(z)$ связаны равенствами

$$\lambda^\pm(\mu) = \lambda(\mu) \pm i \frac{\pi}{2} \frac{\xi_\alpha(\mu)}{\xi_0}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

С помощью выражения (1.9) преобразуем формулу (1.8) для собственных функций: $\Phi(\eta, \mu) = \tilde{\Phi}(\eta, \mu)n(\eta)$, где

$$\tilde{\Phi}(\eta, \mu) = \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{\xi_\alpha(\eta)} \delta(\eta - \mu)$$

является собственной функцией, отвечающей единичной нормировке $n(\eta) \equiv 1$.

Можно показать, что $\lambda(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль второго порядка, которому соответствуют два собственных дискретных решения исходного уравнения (1.4):

$$\varphi_+(x, \mu) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_-(x, \mu) = x - \mu.$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

ТЕОРЕМА. *Граничная задача (1.2)–(1.4) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения*

$$\varphi(x, \mu) = K_0 + K(x - \mu) + \int_0^\infty e^{-x/\eta} \tilde{\Phi}(\eta, \mu) n(\eta) d\eta. \quad (2.1)$$

Здесь неизвестными являются коэффициент K_0 , отвечающий дискретному спектру, и функция $n(\eta)$, являющаяся коэффициентом непрерывного спектра. Разложение (2.1) понимается в классическом смысле:

$$\varphi(x, \mu) = K_0 + K(x - \mu) + \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x/\eta} \frac{\eta n(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{\xi_\alpha(\mu)} e^{-x/\mu} \chi_+(\mu), \quad (2.2)$$

где $\chi_+(\mu)$ – характеристическая функция полуоси, т.е. $\chi_+(\mu) = 1$, если $\mu \in (0, +\infty)$, $\chi_+(\mu) = 0$, если $\mu \notin (0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя граничное условие (1.2), перейдем от разложения (2.2) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши [13]:

$$K_0 - K_1\mu + \xi_0^{-1} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\eta n(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \frac{\lambda(\mu)}{\xi_\alpha \mu} n\mu = 0, \quad \mu > 0. \quad (2.3)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^\infty \frac{\eta n(\eta)}{\eta - z} d\eta. \quad (2.4)$$

Умножим обе части уравнения (2.3) на

$$2\xi_0^{-1}(\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu)) = 2\pi i \mu \xi_\alpha \mu,$$

и, пользуясь граничными значениями $N^\pm(\mu)$ и $\lambda^\pm(\mu)$, сведем уравнение (2.3) к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + 2\xi_0(K_0 - K\mu)] = \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + 2\xi_0(K_0 - K\mu)], \quad \mu > 0. \quad (2.5)$$

Коэффициентом краевой задачи (2.5) является функция $G(\mu) = \lambda^-(\mu)/\lambda^+(\mu)$. Задачу факторизации коэффициента $G(\mu)$ рассмотрим в виде

$$\frac{X^+\mu}{X^-\mu} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0. \quad (2.6)$$

Для решения этой задачи найдем индекс $\varkappa$ коэффициента $G(\mu)$:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(\mu)]_{(0, +\infty)},$$

где выражение $[\dots]_{(0, +\infty)}$ означает приращение функции, стоящей в скобках при изменении аргумента от 0 до $+\infty$.

Пусть $\theta(\mu) = \arg \lambda^+(\mu)$ – главное значение аргумента $\lambda^+(\mu)$, а μ_0 – нуль функции $\lambda(\mu) = \operatorname{Re} \lambda^+(\mu)$. При этом $\lambda(\mu) > 0$, если $\mu \in [0, \mu_0]$, и $\lambda(\mu) < 0$, если $\mu \in (\mu_0, +\infty)$. Следовательно,

$$\theta(\mu) = \begin{cases} \theta_0(\mu), & \mu \in [0, \mu_0], \\ \theta_0(\mu) + \pi, & \mu \in (\mu_0, +\infty), \end{cases}$$

где

$$\theta_0(\mu) = \operatorname{arctg} \frac{\pi \xi_\alpha(\mu)}{2 \xi_0 \lambda(\mu)}.$$

Так как $\overline{\lambda^+(\mu)} = \lambda^-(\mu)$ (черта означает комплексное сопряжение), то $G(\mu) = \exp(-2i\theta(\mu))$, следовательно,

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi} [\theta(\mu)]_{(0, +\infty)} = -\frac{1}{\pi} [\theta(+\infty) - \theta(0)] = -\frac{1}{\pi} (\pi - 0) = -1.$$

Возьмем в качестве решения задачи (2.6) не исчезающую в нуле функцию $X(z) = \frac{1}{z} \times \exp V(z)$, где

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(\tau) - \pi}{\tau - z} d\tau.$$

Вернемся к задаче (2.5) и преобразуем ее с помощью (2.6) к проблеме определения аналитической функции по нулевому скачку на разрезе $(0, +\infty)$:

$$X^+(\mu) [N^+(\mu) + 2\xi_0(K_0 - K\mu)] = X^-(\mu) [N^-(\mu) + 2\xi_0(K_0 - K\mu)], \quad \mu > 0. \quad (2.7)$$

Учитывая поведение функций, входящих в (2.7), получаем общее решение этой задачи в виде

$$N(z) = -2\xi_0(K_0 - Kz) + \frac{c_0}{X(z)}, \quad (2.8)$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Чтобы принять функцию $N(z)$, определенную равенством (2.8) и имеющую простой полюс в точке $z = \infty$, в качестве вспомогательной функции $N(z)$, введенной равенством (2.4), сначала устраним полюс у решения (2.8), а затем приравняем к нулю ее предел в точке $z = \infty$. При этом получаем, что

$$C_0 = -2\xi_0 K, \quad K_0 = V_1 K, \quad (2.9)$$

$$V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\theta(\mu) - \pi] d\mu. \quad (2.10)$$

Коэффициент непрерывного спектра $n(\eta)$ можно найти с помощью уравнения (2.8):

$$2\pi i \eta n(\eta) = -2\xi_0 K \left(\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right).$$

Итак, все коэффициенты разложения (2.1) найдены и притом однозначно. Единственность разложения (2.1) может быть доказана методом от противного как невозможность нетривиального разложения нуля по собственным функциям характеристического уравнения. Разложение (2.1), очевидно, автоматически удовлетворяет граничному условию (1.3), а условию (1.2) – по построению. Непосредственной проверкой убеждаемся, что разложение (2.1) обращает уравнение (1.4) в тождество. Теорема доказана.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заметим сначала, что при $\alpha = 0$ можно найти точное значение интеграла (2.10). В самом деле, при $\alpha = 0$ из формулы (1.10) видно, что дисперсионная функция $\lambda(z)$ совпадает с дисперсионной функцией Кейза $\lambda_K(z)$. В этом случае

$$V_1^0 = \mu_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \arctg \frac{\pi \tau}{2\lambda_K(\tau)} d\tau = 0.71045, \quad (3.1)$$

где $\mu_0 = 0.83356$ — нуль функции $\lambda_K(\tau)$.

При $\alpha > 0$ найдем приближенное значение интеграла (2.10). Используя метод перевала, заменим функцию $\lambda(z)$ аппроксимирующей функцией $\tilde{\lambda}(z)$. Из выражения (1.10) следует, что точка перевала ω_0 определяется уравнением

$$e^{\omega_0} = \frac{\alpha + 4 + \omega_0}{\alpha + 4 - \omega_0}. \quad (3.2)$$

При $\alpha + 4 > 1$ приближенное решение уравнения (3.2) $\tilde{\omega}_0$ вычисляется по формуле

$$\tilde{\omega}_0 = (\alpha + 4)(1 - 2e^{-\alpha-4}). \quad (3.3)$$

Отметим, что уже при $\alpha = 0$ формула (3.3) дает удовлетворительное приближение. Так, в этом случае $\omega_0 = 3.83002$, а $\tilde{\omega}_0 = 3.85347$. При $\alpha = 2$ имеем $\omega_0 = 5.96941$, а $\tilde{\omega}_0 = 5.97025$, т.е. формула (3.3) дает практически точное значение точки перевала. Согласно методу перевала $\tilde{\lambda}(z) = \lambda_K(\omega_0^\alpha z)$, и мы получаем

$$\tilde{V}_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0^{-\alpha}} [\tilde{\theta}(\tau) - \pi] d\tau = \omega_0^{-\alpha} \mu_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0^{-\alpha}} \arctg \frac{\pi \omega_0^\alpha \tau}{2\lambda_K(\omega_0^\alpha \tau)} d\tau,$$

откуда

$$\tilde{V}_1 = \omega_0^{-\alpha} V_1^{(0)}. \quad (3.4)$$

Заметим, что из формулы (3.4) при $\alpha = 0$ в точности следует формула (3.1), а при $\alpha = 2$ имеем $\tilde{V}_1 = 0.01994$. Уменьшение V_1 с ростом α связано с уменьшением вклада высоких частот (большие значения ω) в процессе переноса в дисперсной среде за счет все более быстрого увеличения частоты столкновений $\nu(\omega)$ с ростом α . В то же время излучение с граничной поверхности не лимитируется этим фактором и вклад в излучение больших частот не зависит от α . Это приводит к тому, что относительный отток энергии от поверхности возрастает с ростом α (по сравнению с объемным оттоком). В результате получаем, что коэффициент V_1 , характеризующий скачок температуры между границей внешней среды и температурой падающего излучения, уменьшается.

В заключение необходимо отметить, что в данной работе впервые для теории переноса рассматривается обобщение классической теории Кейза–Цвайфеля [12] на случай уравнения переноса безмассового бозе-газа. Оказалось, что этот метод приводит к аналитическому решению уравнений переноса с двойным интегралом в правой части уравнения.

Работа выполнена по гранту № 97-01-00333 РФФИ.

Список литературы

- [1] *К. Черчиньяни*. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1977.
- [2] *Дж. Ферцигер, Г. Капер*. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [3] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [4] *С. Ишимару*. Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975.
- [5] *Ф. Платцман, П. Вольф*. Волны и взаимодействия в плазме твердого тела. М.: Мир, 1975.
- [6] *А. В. Латышев, А. Г. Лескис, А. А. Юшканов*. ТМФ. 1992. Т. 90. № 2. С. 179.
- [7] *И. Н. Мичин*. Теория переноса излучения в атмосферах планет. Новосибирск: Наука, 1988.
- [8] *А. В. Латышев*. ЖВМиМФ. 1995. Т. 35. № 7. С. 1108.
- [9] *В. В. Соболев*. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1983.
- [10] *А. В. Латышев, А. А. Юшканов*. Точные решения граничных задач для модельных уравнений Больцмана с переменной частотой столкновений. Монография. Деп. в ВИНТИ от 25.04.1996, № 1360-B96.
- [11] *В. С. Владимиров*. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [12] *К. Кейз, П. Цвайфель*. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [13] *Ф. Д. Гагов*. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 5.XI.1996 г.

A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov

**CONSTRUCTION OF THE MODEL TRANSPORT EQUATION
OF MASSLESS BOSE GAS AND ITS ANALYTIC SOLUTION**

A model kinetic transport equation for the massless Bose gas is constructed. The application of this equation to the problem of the radiation transport in a semispace dispersible medium being in local thermal equilibrium with radiation is considered. It is shown that the temperature jump between the temperature of a dispersible medium and the temperature of falling radiation essentially depends on scattering properties of particles of the dispersible medium.