Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Редукция к уравнению Хилла цепочки Гюгонио–Маслова для траекторий уединенных вихрей уравнений “мелкой воды”, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 47–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 02:10:49

С. Ю. Доброхотов*

РЕДУКЦИЯ К УРАВНЕНИЮ ХИЛЛА ЦЕПОЧКИ ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ УЕДИНЕННЫХ ВИХРЕЙ УРАВНЕНИЙ “МЕЛКОЙ ВОДЫ”

Согласно концепции В.П. Маслова широкий класс двумерных квазилинейных гиперболических систем нелинейных уравнений в частных производных допускает только три типа сингулярностей, находящихся в общем положении и обладающих свойствами “структурной самоподобности и устойчивости”. К ним относятся ударные волны, “бесконечно узкие” солитоны и точечные особенности типа “квадратного корня” из неотрицательной функции (уединенные вихри). Их движение описывается бесконечной цепочкой обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся обобщением хорошо известных условий Гюгонио для ударных волн. Показано, что после некоторой процедуры замыкания такой цепочки для уединенных вихрей “уравнений мелкой воды” получается система из 16 обыкновенных уравнений, эквивалентная уравнению Хилла. Это означает, что в некотором приближении траектория уединенного вихря описывается уравнением Хилла. Найденный результат может быть использован для восстановления (прогнозирования) траектории вихря по ее части, известной из наблюдения.

Условия Гюгонио хорошо известны в теории ударных волн и активно используются, например, при численных расчетах разрывных решений уравнений газо- и гидродинамики. У таких уравнений, как и у гиперболических систем квазилинейных уравнений более общего вида, могут существовать решения с особенностями другого типа, для которых можно пытаться находить условия, аналогичные условиям Гюгонио. Общая концепция их описания была предложена Масловым в [1–3]¹⁾. Согласно этой концепции имеется всего несколько типов особых решений “общего положения”, обладающих свойствами “структурной самоподобности и устойчивости”. К ним относятся ударные волны, “бесконечно узкие” солитоны и уединенные вихри. Именно для таких особых решений “общего положения” могут быть написаны условия, аналогичные условиям Гюгонио для ударных волн, а также бесконечные системы поправок к ним, которые образуют бесконечные цепочки нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными в этих цепочках (мы будем называть их цепочками Гюгонио–Маслова) являются коэффициенты рядов Тейлора гладких функций, характеризующих особые решения. Весьма привлекательна идея последующего использования этих цепочек для описания движения особенностей (см. также [9, 10]). Бесконечность цепочек означает, что первые n уравнений цепочки содержат более n неизвестных функций. Замыкая

¹⁾ О других подходах к особым решениям см. также [4–8].

* Институт проблем механики РАН, Москва, Россия. E-mail: dobr@ipmnet.ru

некоторым способом эти цепочки, можно получить из них системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование последних позволяет дать приближенное описание движения особенности, разумеется, при соответствующих ограничениях на времена, расстояния, скорости и т.д.

В этой статье мы изучаем цепочки Гюгонио–Маслова для изолированных точечных вихревых особенностей системы уравнений мелкой воды с учетом силы Кориолиса:

$$\eta_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}\eta) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta - \omega T\mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\omega/2$ – параметр Кориолиса, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, скорость $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)(x, t)$ и плотность (или геопотенциал) $\eta(x, t)$ – неизвестные функции аргументов $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $t \geq 0$, ∇ – двумерный градиент.

Система (1) является одной из модельных универсальных систем нелинейных уравнений, приближенно описывающей различные эффекты не только в теории волн на воде, но и в атмосфере, нелинейных оптических средах, плазме и т.д. (см., например, [11–16]). В частности, она используется для изучения движения тайфунов; именно задача о вычислении траекторий “глаза тайфуна” в атмосфере и гипотеза Маслова [1] о возможности применения для ее решения указанных цепочек стимулировали исследования, изложенные в этой работе (см. также [17, 18]).

Соответствующие особые решения представляются в виде

$$\eta = \rho(x, t) + R(x, t)F(S(x, t)), \quad \mathbf{u}_j = u_j + U_j(x, t)F(S(x, t)), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где $u_1 = v$, $u_2 = w$, U_j, ρ, R, S – гладкие функции, причем $S \geq 0$ и S обращается в ноль в одной точке траектории $\Gamma = \{x = X(t) \equiv (X_1(t), X_2(t))\}$. Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия общего положения: матрица $\partial^2 S / \partial x^2(X(t), t)$ не вырождена и ее собственные числа различны при всех t . Функция $F(\tau)$ предполагается непрерывной для всех $\tau \geq 0$ и гладкой при $\tau > 0$, и, кроме того, $F(0) = 0$ и $F_\tau \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow +0$. Ясно, что функции $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ и η при каждом t имеют особенности в точке $X(t)$ траектории Γ . “Структурная самоподобность” решения (2) означает, что функция F в (2), задающая структуру особенности, не зависит от времени t ; “структурная устойчивость” означает, что малое изменение функций ρ, R, u_j, U_j и S в формуле (2) в некоторый момент времени t_0 приводит к изменениям при $t > t_0$ лишь этих функций, но не функции F . Введем обозначение

$$f_{k,l} = \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_1^k \partial x_2^l}(X(t), t)$$

для любой функции $f(x, t)$. Для решений вида (2) уравнения из “цепочки Гюгонио–Маслова” связывают функции X_1, X_2 и коэффициенты разложения в ряд Тейлора функций v, w, ρ, S и т.д. в точках траектории Γ .

Основной результат этой статьи, несколько неожиданный, но, видимо, не случайный, состоит в следующем наблюдении: после некоторой простой (и достаточно разумной с точки зрения асимптотических разложений) процедуры замыкания, сходной с использованной в работах [10, 19, 2], но примененной в других ситуациях, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентная уравнению Хилла (точнее, семейству уравнений Хилла).

Полное исследование решения вида (2) системы (1) состоит из следующих этапов.

1. Исследование возможных структурных функций F . Оказывается, что такая функция при условии “общего положения” и необращения в ноль всех коэффициентов R_{m_1, m_2} , U_{1, m_1, m_2} , U_{2, m_1, m_2} определяется единственным образом и равна $\sqrt{\tau}$. Подчеркнем, что у системы (1) могут быть и другие особые решения, например с $F = \tau^\alpha$, где $\alpha > 0$ любое, но при этом они не удовлетворяют условиям структурной устойчивости и самоподобности и общего положения.

2. Вывод цепочки Гюгонио–Маслова для указанных тейлоровских коэффициентов и с указанной функцией F .

3. Замыкание (обрыв) цепочки и получение (замкнутой) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно описывающих траекторию $X(t)$.

4. Точная редукция этой системы к уравнению Хилла и последующее ее исследование на основе этой редукции.

Этапы 1 и 2 реализованы в результате достаточно нетривиальных и технически сложных вычислений в [20] и [18] с учетом силы Кориолиса, там же приведены соответствующие цепочки Гюгонио–Маслова. Здесь мы приведем только окончательный результат этапов 1, 2 и дадим его интерпретацию. Реализация этапа 3 оказывается достаточно простой (здесь мы следуем работам [2, 10], посвященным ударным волнам), и основное внимание мы уделим этапу 4, снабдив его подробными выкладками. Частично результаты этой работы анонсированы в [21, 22].

1. ЦЕПОЧКА ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Следующее утверждение играет ключевую роль в постановке изучаемой в настоящей статье задачи.

ТЕОРЕМА 1.

1. Если у системы (1) существует решение вида (2), удовлетворяющее приведенным выше условиям, то

а) траектория $X(t)$ “заморожена” в поле скоростей $\mathbf{u}$ (u и u):

$$\dot{X}(t) = u(X(t), t) \equiv \mathbf{u}(X(t), t), \quad (3)$$

и $U_1(X(t), t) = U_2(X(t), t) = R(X(t), t) = 0$.

Если дополнительно $|\nabla U_1(X(t), t)| + |\nabla U_2(X(t), t)| \neq 0$, то

б) на траектории $X(t)$ для комплексных скоростей $v(x, t) + iw(x, t)$ (u $\mathbf{u}_1(x, t) + i\mathbf{u}_2(x, t)$) выполнены условия Коши–Римана

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_\Gamma = \left. \frac{\partial w}{\partial x_2} \right|_\Gamma \equiv q(t), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|_\Gamma = - \left. \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|_\Gamma \equiv p(t), \quad (4)$$

$\rho_{11} = 0$ и $\rho_{20} = \rho_{02} \equiv r(t)$;

в) $F = \sqrt{\tau}$;

г) для функций $\tilde{\rho} = RF(S)$ и $\tilde{u} = UF(S)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} &= \varphi(t) \sqrt{(\Pi(t)(x - X(t)), B_0 \Pi(t)(x - X(t))) + O(|x - X(t)|^3)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \Pi^*(t) T B_0 \Pi(t)(x - X(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + O(|x - X(t)|^2), \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $\Pi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t p(t) dt, \quad \varphi(t) = \sigma \exp\left(-3 \int_0^t q(t) dt\right) \equiv \sigma \left(\frac{\rho_{00}(t)}{\rho_{00}(0)}\right)^{3/2}, \quad (6)$$

$\sigma = \pm 1$, $B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 \neq b_2$, θ_0 – вещественные константы, характеризующие начальную структуру вихревого решения;

д) дополнительно к (3) и (4) выполнены соотношения (начальные соотношения из “цепочки Гюгонио–Маслова”)

$$\dot{v}_{00} + \omega w_{00} + \rho_{10} = 0, \quad \dot{w}_{00} - \omega v_{00} + \rho_{01} = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_{00} + 2q\rho_{00} = 0, \quad \dot{q} - p^2 + q^2 + \omega p + 2r = 0, \quad \dot{p} + 2pq - \omega q = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{10} + 3q\rho_{10} - p\rho_{01} + \rho_{00}(w_{11} + 2v_{20}) &= 0, \\ \dot{\rho}_{01} + 3q\rho_{01} + p\rho_{10} + \rho_{00}(v_{11} + 2w_{02}) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} + 4pr + \frac{1}{2}\rho_{10}(3v_{20} + w_{11} + v_{02}) + \frac{1}{2}\rho_{01}(v_{11} + 3w_{02} + w_{20}) &= \\ = -\rho_{00}(3v_{30} + 3w_{03} + w_{21} + v_{12}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{20} + 3qv_{20} - \omega w_{20} - p(v_{11} - w_{20}) &= -3\rho_{30}, \\ \dot{v}_{11} + 3qv_{11} - \omega w_{11} - p(2v_{02} - 2v_{20} - w_{11}) &= -2\rho_{21}, \\ \dot{v}_{02} + 3qv_{02} - \omega w_{02} + p(v_{11} + w_{02}) &= -\rho_{12}, \\ \dot{w}_{20} + 3qw_{20} + \omega v_{20} - p(w_{11} - v_{20}) &= -\rho_{21}, \\ \dot{w}_{11} + 3qw_{11} + \omega v_{11} - p(-2w_{20} + 2w_{02} + v_{11}) &= -2\rho_{12}, \\ \dot{w}_{02} + 3qw_{02} + \omega v_{02} + p(w_{11} - v_{02}) &= -3\rho_{03}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rho_{00}(3v_{30} + w_{21} - v_{12} - 3w_{03}) + \rho_{10}(3v_{20} + w_{11} - v_{02}) - \rho_{01}(v_{11} + 3w_{02} - w_{20}) = 0.$$

2. Условия (3), (4), (7)–(11) и представления (5), (6) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция (2) удовлетворяла исходному уравнению с точностью до $O(|x - X(t)|^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. С точки зрения приложений важно знать первый ненулевой член разложения функции $\tilde{\rho}$ в точках траектории Γ . При выполнении условий теоремы 1 справедлива формула

$$\tilde{\rho} = \varphi(t)(2p - \omega)(\Pi(t)(x - X(t)), B_0\Pi(t)(x - X(t)))^{3/2} + O(|x - X(t)|^4).$$

С учетом определения функции φ отсюда немедленно следует, что $\tilde{\rho}$ имеет минимум, если выражение $\sigma \cdot (2p - \omega)$ положительно, и максимум, если оно отрицательно.

Приведенные в теореме соотношения и представляют собой аналог условий Гюгонио и поправок к ним для уединенных вихрей вида (2) уравнений мелкой воды. Утверждения “а” – “в” п. 1 теоремы принадлежат Маслову; вместе с утверждениями “г”, “д” они приведены также в несколько ином виде и без учета силы Кориолиса в [20], там же дано

их доказательство. Вывод цепочки (3), (4), (7)–(11) с учетом силы Кориолиса приведен в [18].

Отметим, что условия “вмороженности” вихря (3) и условия Коши–Римана (4) являются следствием существования негладкой части решения (1) и их вывод опирается на рассуждения, аналогичные рассуждениям, используемым в лучевом методе или методе ВКБ в применении к разложениям по гладкости (ср. с [2, 9, 23]). Подчеркнем, что при выводе этих условий существенно используется предположение об “асимметрии вихря” (о различии собственных значений матрицы вторых производных функции $S(x)$ на Γ). Вывод же условий (7)–(11), по существу, заключается в последовательном дифференцировании исходной системы с учетом (3), (4) и вычислении результата в точках траектории $x = X(t)$.

Формулы (5), (6) настолько просты, что их анализ не составляет никакого труда. Функция $\tilde{u}$ описывает движение уединенного вихря по траектории поля скоростей $u(x, t)$. Этот факт не является удивительным – он хорошо известен в гидродинамике, и то, что он имеет место для решений вида (2), означает, что такое решение не противоречит законам гидродинамики, тем не менее, конечно, для решений вида (2) он требует доказательства. Любопытным, на наш взгляд, является требование выполнения условий Коши–Римана (4): эти условия не являются инвариантными для (любых) траекторий поля скоростей, и они, таким образом, описывают, как существование вихря влияет на “гладкий фон” $u(x, t)$. Сам вихрь при движении вдоль $X(t)$ вращается (в силу условий Коши–Римана) с угловой скоростью²⁾ $\dot{\theta} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_3 u(X(t), t)$. “Сечение” вихря “в главном” представляет собой эллипс с полуосями, определяемыми числами b_1 и b_2 и начальным углом θ_0 . Заметим также, что “вихревая” (негладкая) часть решения растет при удалении от $X(t)$ достаточно медленно – как $|x - X(t)|^2$, а функция $\tilde{\rho}$ растет еще медленнее – как $|x - X(t)|^3$. Такой медленный рост функций (5) является аргументом в пользу их применения для описания тайфунов – он соответствует наличию “глаза” у тайфуна (см. [13, 14, 17]). Наконец, отметим, что описанная динамика вихря сохраняет свойство асимметрии. По существу, в первом приближении вихрь изменяется с помощью конформного преобразования: он поворачивается, растягивается и сжимается по всем направлениям одинаково, коэффициент растяжения определяется дивергенцией поля скоростей $u(x, t)$ (или $\mathbf{u}(x, t)$) на траектории $X(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УСЛОВИИ КОШИ–РИМАНА И ЗАКОНЕ СОХРАНЕНИЯ. Укажем здесь (также без доказательства) на следующий факт. Уравнения “мелкой воды” имеют законы сохранения, один из которых может быть записан в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\Omega}{\eta} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \right) \left(\frac{\Omega}{\eta} \right) = 0, \quad \Omega = (\mathbf{u}_{1x_2} - \mathbf{u}_{2x_1} + \omega).$$

Известно, что при асимптотических процедурах некоторые специальные свойства, такие как наличие законов сохранения, гамильтоновости и др., проявляются и в уравнениях для функций, определяющих асимптотики (например, законы сохранения играют важную роль в уизеновском осреднении уравнения Кортевега–де Фриза: именно осредненные законы сохранения являются уравнениями для медленно меняющихся параметров кноидальных волн, см., например, [16, 24–26]). В связи с этим интересно понять, что означает наличие указанного закона сохранения для цепочки Гюгонио–Маслова (3), (4), (7)–(11). Оказывается, что проявление этого закона состоит в выполнении условий Коши–Римана (4).

²⁾Под $\operatorname{rot}_3 u$ мы понимаем функцию $u_{2x_1} - u_{1x_2}$.

2. ЗАМЫКАНИЕ ЦЕПОЧКИ

Из вида соотношений (7)–(11) ясно, что вместе с (3), (4) они образуют недоопределенную систему дифференциальных уравнений. Если написать необходимые условия, связывающие следующие коэффициенты тейлоровских разложений функций u , ρ , S , U и R , то эта ситуация сохранится. Это означает, что мы получаем незамкнутую цепочку. Замкнем ее аналогично тому, как это было сделано в работах [10, 19] (см. также [2]), приравняв к нулю правые части в (10), (11):

$$3v_{30} + v_{12} + 3w_{03} + w_{21} = 0, \quad \rho_{30} = \rho_{21} = \rho_{12} = \rho_{03} = 0. \quad (12)$$

После такого обрыва цепочки мы получаем формальное асимптотическое решение по mod $(|x - X(t)|^3)$ исходной системы уравнений.

Мы не имеем, по крайней мере пока, строгого доказательства того факта, что предложенное замыкание цепочки приводит к определению траектории особенности $X(t)$, мало отличающейся на некоторых временах от настоящей траектории вихря вида (2). Однако, как будет видно из дальнейшего, интересующие нас решения замкнутой цепочки должны быть (и мы выбираем их) устойчивыми, поэтому, если допустить, что правые части в (10) и (11) не нулевые, но достаточно малые, то весьма правдоподобным является предположение о том, что они будут вносить малый вклад в решения этой системы. С другой стороны, невязка $O(|x - X(t)|^3)$ в правой части (1) является *необходимым минимумом*, который позволяет полностью определить “старшую” часть негладкой составляющей решения (2). Поэтому проведенный нами обрыв цепочки является разумным: обрыв на предыдущем шаге (т.е. приравнивание к нулю коэффициентов v_{20} , w_{20} , v_{02} и т.д.) не позволяет правильно описать старшую негладкую часть, а учет следующих коэффициентов приводит к существенному усложнению уравнений для тейлоровских коэффициентов.

3. РЕДУКЦИЯ “ОБОРВАННОЙ” ЦЕПОЧКИ К УРАВНЕНИЮ ХИЛЛА

Любопытным и несколько неожиданным является тот факт, что система уравнений (3), (4), (7)–(12) редуцируется к уравнению Хилла

$$\frac{d^2 y}{d\Phi^2} + \operatorname{Re} \left(\Omega_0^2 + \frac{\beta_0 \beta_1}{2} e^{2i\Phi} + \overline{\beta_0 \beta_1} e^{-2i\Phi} + \beta_1 \beta_2 e^{i\Phi} - \bar{\beta}_0 \beta_2 e^{-i\Phi} \right) y = 0. \quad (13)$$

Здесь $\Omega_0 \geq 0$ – вещественный, а β_0 , β_1 , β_2 – комплексные параметры, играющие роль констант интегрирования системы уравнений (3), (4), (7)–(12), $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$.

Напомним [27–29], что уравнение (13) называется сильно устойчивым, если все его решения ограничены при $\Phi \in (-\infty, \infty)$ и это свойство сохраняется при малом 2π -периодическом возмущении коэффициента при y (в частности, при малых возмущениях Ω_0 и β).

Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. (О редукции задачи о точечной вихревой особенности к уравнению Хилла).

1. *Интегрирование системы уравнений (3), (4), (7)–(12) сводится к интегрированию уравнения (13).*

2. Компонента ρ_{00} ограничена снизу и сверху строго положительными константами³⁾, и это свойство сохраняется при малых изменениях параметров (констант интегрирования) β , Ω_0 тогда и только тогда, когда а) $\omega > 0$ и б) уравнение (13) сильно устойчиво. В противном случае при $\omega \neq 0$ после малого “шевеления” параметров ω_0 и β найдется (неограниченная) последовательность времен $t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$ такая, что последовательность $\rho_{00}|_{t=t_m}$ будет либо экспоненциально быстро возрастать, либо экспоненциально быстро убывать, а при $\omega = 0$ компонента ρ_{00} будет убывать быстрее чем $1/t^2$.

3. Если условия “а” и “б” выполнены, то ρ_{00} и $X_1 + iX_2$ выражаются через решение Флоке $g(\Phi) \exp(i\Theta(\Phi))$ уравнения (13), нормированное условиями $g(\Phi + 2\pi) = g(\Phi)$, $d\Theta/d\Phi = 1/g^2(\Phi)$, $\Theta|_{\Phi=0} = 0$, следующим образом:

$$\rho_{00} = \omega \mu g^2(\Phi) / \left(2|c| \left(1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \frac{\omega(t - t_0)}{2} \right) \right),$$

$$X^c \equiv X_1 + iX_2 = X^0 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{\mu|c|\omega}} (e^{-i\omega t} I_+ - I_-) - \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega t} - 1) V^0. \quad (14)$$

Здесь V^0 , X^0 – комплексные, а t_0 , c , μ , $c \neq 0$, $0 < \mu \leq 1$ – вещественные константы (константы интегрирования системы (3), (7)–(12), дополнительные к β , Ω_0),

$$I_{\pm} = e^{\pm \frac{i\omega t_0}{2}} \int_0^{\Phi(t)} g(\Phi) (\mu \cos(\Theta(\Phi) - \Theta_0) \pm \sin(\Theta(\Phi) - \Theta_0)) \times$$

$$\times e^{\mp \frac{i\Phi}{2}} (\beta_0 e^{i\Phi} - 2\beta_1 e^{-i\Phi} + 2\beta_2) d\Phi, \quad (15)$$

$\Phi(t)$ определяется формулами

$$\Theta(\Phi) = \text{Arctg} \left(\mu \text{tg} \left(\frac{\omega}{2} (t - t_0) \right) \right) + \Theta_0, \quad \Theta_0 = \text{Arctg} \left(\mu \text{tg} \left(\frac{\omega}{2} t_0 \right) \right). \quad (16)$$

Под Arctg понимается такое значение, для которого $\Theta(\Phi) - \Theta_0$ лежит в том же промежутке $[\pi n, \pi(n+1)]$, что и $(t - t_0)\omega/2$ в первой формуле (16), и Θ_0 – в том же промежутке $[\pi n, \pi(n+1)]$, что и $\omega t_0/2$ во второй.

По физическому смыслу ρ_{00} должна быть положительной ограниченной функцией, отделенной при всех t от 0 некоторым положительным значением. Поэтому при отсутствии силы Кориолиса физически интересных решений у системы (3), (4), (7)–(12) нет. Таким образом, наличие силы Кориолиса делает возможным существование устойчивых физически разумных решений ρ_{00} . Заметим, что тайфуны в приэкваториальной области, где $\omega = 0$, не наблюдаются [13, 14].

Итак, формулы (14) определяют класс функций, зависящих от десяти комплексных и четырех вещественных параметров, в котором следует искать траекторию движения вихревых особенностей уравнений (1). Заметим также, что функции $g \cos(\Theta - \Phi_0)$ и $g \sin(\Theta - \Theta_0)$ являются решениями уравнения Хилла (13). Следовательно, можно также сказать, что приведенные формулы определяют (нелинейное) преобразование, связывающее оборванную цепочку (3), (4), (7)–(12) с линейным уравнением (13). Легко видеть, что функция ρ_{00} есть условно периодическая функция с двумя периодами и зависит от трех комплексных параметров β_0 , β_1 , β_2 и четырех вещественных $\Omega_0 > 0$, $c \neq 0$, $0 < \mu \leq 1$ и $t_0 \in [0, 2\pi]$. Функции X_1 и X_2 зависят от дополнительных комплексных параметров V^0 и X^0 .

³⁾ Это свойство диктуется физическим смыслом функций η и ρ .

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Формулы (14)–(16) определяют, вообще говоря, достаточно быстро осциллирующую функцию, если интересующий нас промежуток времени включает несколько интервалов $(0, 4\pi/\omega)$. Эти осцилляции тем больше, чем больше потенциал q отличается от константы. Если из каких-либо соображений известно, что траектория движения вихря описывается достаточно гладкой кривой, то естественно предположить, что параметры $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ в (14)–(16) малы, и применить для интегрирования уравнения Хилла методы осреднения (см., например, [29]). Тогда, обозначая $|\beta| = \sqrt{|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2}$, мы получим в первом приближении

$$g = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} + O(|\beta|^2), \quad \Theta = \Omega_0 \Phi + O(|\beta|^2).$$

Подставляя g и Θ в формулы (14)–(16), проводя соответствующие вычисления и объединяя некоторые слагаемые (константы), полученные после вычисления интегралов $I_{\pm}$, с константами X^0 и V^0 , приходим к следующему утверждению:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega > 0$, β, Ω_0 попадают в зону устойчивости уравнения (13) и величина $|\beta|$ достаточно мала. Тогда функция X^c представляется в виде

$$\begin{aligned} X^c = & A_1 + A_2 e^{-i\omega t} + \frac{4ic\sqrt{\Omega_0}}{\omega} e^{-i\omega t/2} \sqrt{(\mu^2 - 1) \sin^2 \frac{\omega(t-t_0)}{2} + 1} \times \\ & \times e^{i\Phi/2} \left(\frac{\beta_0}{\Omega_0^2 - 1/4} - \frac{2\bar{\beta}_1 e^{-2i\Phi}}{\Omega_0^2 - 9/4} - \frac{\beta_2 e^{-i\Phi}}{\Omega_0^2 - 1/4} \right) + \\ & + O\left(\frac{|\beta|^3}{\min(\Omega_0^2 - 1/4, \Omega_0^2 - 9/4)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь A_1, A_2 – “новые” комплексные константы интегрирования и $\Phi = \Phi(t)$ вычисляется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{\Omega_0} \left(\text{Arctg} \left(\mu \text{tg} \frac{\omega(t-t_0)}{2} \right) \right) + \frac{1}{\Omega_0} \text{Arctg} \left(\mu \left(\text{tg} \frac{\omega t_0}{2} \right) \right). \quad (18)$$

Заметим, что в последней формуле для X^c количество констант уменьшилось на единицу, так как параметр c можно включить в $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. Из этой формулы ясно, что при малых $|\beta|$ все слагаемые, входящие в (17), за исключением слагаемого A_1 и слагаемого, содержащего множитель $e^{\frac{i(\Phi-\omega t)}{2}} \beta_0 / (\Omega_0^2 - 1/4)$, будут осциллировать с частотой большей, чем $\omega/2$. Из определения функции $\Phi(t)$ легко получаем, что

$$\Phi = \frac{\omega t}{2\Omega_0} + \tilde{\Phi}(t, \mu, t_0),$$

где $\tilde{\Phi}$ – периодическая функция с периодом $T = \pi/\omega$, поэтому функция X^c вида (17) будет осциллировать достаточно быстро, если частота Ω_0 сильно отличается от $1/2$, и такая функция будет “плохо приближать” гладкую кривую. Таким образом, мы приходим к выводу: для достаточно гладких траекторий частота Ω_0 должна быть близка к $1/2$.

Введем теперь вместо параметров β_0, β_1 и β_2 новые комплексные параметры

$$A_0 = \frac{4ic\sqrt{\Omega_0}\beta_0}{\Omega_0^2 - 1/4}, \quad A_3 = -\frac{8i\bar{\beta}_1 c\sqrt{\Omega_0}}{\omega(\Omega_0^2 - 9/4)}, \quad A_4 = -\frac{4ic\sqrt{\Omega_0}\beta_2}{\omega(\Omega_0^2 - 1/4)}. \quad (19)$$

Тогда задающая траекторию комплексная вектор-функция принимает вид

$$X \equiv X(t, \Omega_0, \mu, t_0, A) = A_1 + A_2 e^{-i\omega t} + e^{i\left(\frac{\Phi - \omega t}{2}\right)} (A_0 + A_3 e^{-2i\Phi} + A_4 e^{-i\Phi}) \sqrt{1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \frac{\omega(t - t_0)}{2}}, \quad (20)$$

где $\Phi = \Phi(t, \mu, t_0, \Omega_0)$ определяется равенством (18). Из предыдущих рассуждений ясно, что эта функция может приближать гладкую траекторию, если Ω_0 близка к $1/2$ и модули комплексных параметров A_2, A_3, A_4 оказываются меньшими, чем модули параметров A_0 и A_1 . Заметим, что это требование не противоречит предположению о малости $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, оно может означать, что $|\beta_0| \sim |\Omega_0^2 - 1/4|$ и что $|\beta_2|$ имеет порядок малости меньший, чем $|\beta_0|$. При этом сам коэффициент A_0 может быть не малым, что означает, что формула (19) для A_0 имеет “факторизационный характер”: не являющийся малым коэффициент получается в результате деления двух малых величин, причем малость этих последних существенно используется в предшествующих вычислениях⁴⁾. Заметим еще, что при малых β первая лагуна (зона неустойчивости) уравнения Хилла (13) лежит в некоторой окрестности значения параметра $\Omega_0 = 1/2$. Таким образом, достаточно гладким траекториям отвечают значения Ω_0 , находящиеся близко (справа или слева) от первой лагуны.

Наконец, с учетом сказанного выше сделаем еще одно приближение, отбросив в (20) осциллирующие слагаемые, включающие коэффициенты A_2, A_3 и A_4 . Считая, кроме того, величину $1 - \mu$ не очень большой, получим

$$X \approx A_1 + e^{i(\Phi - \omega t)/2} A_0.$$

На плоскости (X_1, X_2) это уравнение описывает окружность с центром в точке $(\operatorname{Re} A_1, \operatorname{Re} A_2)$ и радиусом $|A_0|$. Если угловая скорость

$$\dot{\Phi} - \omega = \omega \left(\frac{\mu}{2\Omega_0 \left(1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \frac{\omega(t - t_0)}{2} \right)} - 1 \right)$$

неотрицательна, то движение происходит против часовой стрелки, если неположительна, то по часовой стрелке. Угловая скорость будет неотрицательна, если по крайней мере $\mu > 2\Omega_0$, и неположительна, если $\mu^{-1} < 2\Omega_0$. Наконец, заметим, что т.к. мы предполагаем Ω_0 близким к $1/2$, то движение по окружности происходит с существенно меньшей угловой скоростью чем ω , и за несколько периодов $T = 2\pi/\omega$ “вихревая особенность” проходит лишь часть окружности.

⁴⁾ Автор благодарен Е. Коротяеву, который обратил его внимание на этот факт.

5. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЯ ПО ЕЕ ЧАСТИ

Формулы (14)–(16) или (20) разумно использовать в следующих задачах. Предположим, что траектория $x = X^N(t)$ центра реального уединенного вихря непрерывно измеряется на временах $t \in [t_1, t_2]$ (например, траектория “глаза” тайфуна хорошо контролируется со спутников). Вопрос состоит в восстановлении (прогнозировании) этой траектории на временах $t > t_2$. Разумеется, если такое восстановление может быть проведено, то на небольших временных промежутках $t \in [t_2, t_3]$. Если предположить, что возможные траектории вихря задаются формулами (14)–(16) или (20), то вопрос сводится к определению констант t_0 , Ω_0 , μ и т.д. Их можно находить из условия хорошего приближения измеренной траектории $X^N(t)$ теоретической кривой X , например в смысле малости квадратичного отклонения

$$\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} |X^N - X|^2 dt \rightarrow \min$$

или малости какого-либо другого функционала. Решение такой оптимизационной задачи позволит найти параметры t_0 , Ω_0 , μ и т.д. и затем восстановить “измеренную” траекторию X^N на временах $t > t_2$ с помощью формул (14)–(16) или (20).

6. РЕДУКЦИЯ ОБОРВАННОЙ ЦЕПОЧКИ К УРАВНЕНИЮ ХИЛЛА

Сведем оборванную цепочку (3), (4), (7)–(12) к уравнению Хилла (13) и докажем теорему 2.

6.1. Интегрируя первое и третье из уравнений (8) и исключая затем $\exp(-2 \int_0^t q dt)$, получим

$$\exp\left(-2 \int_0^t q dt\right) = c_1 \rho_{00}, \quad 2p - \omega = c_2 \exp\left(-2 \int_0^t q dt\right), \quad p - \frac{\omega}{2} = \frac{c}{2} \rho_{00}. \quad (21)$$

Здесь c_1 , c_2 , $c = c_1 c_2$ – константы, причем $c_1 > 0$, так как из физических соображений следует, что $\rho_{00} > 0$. Поэтому в силу определения функций p и q (см. (4)) имеем

$$2p - \omega \equiv -(\operatorname{rot}_3 u|_{x=X(t)} + \omega) = c_2 \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} u(X(t), t) dt\right). \quad (22)$$

Важную роль в дальнейшем будет играть функция

$$\Phi = \int_0^t (2p - \omega) dt \equiv c \int_0^t \rho_{00} dt. \quad (23)$$

6.2. Преобразуем уравнения (11), (12). Поступим следующим образом: умножим последние три уравнения из (11) на i и сложим соответственно первое с четвертым, второе с пятым, третье с шестым. В результате получим

$$\begin{aligned} (\dot{v}_{20} + i\dot{w}_{20}) &= (-3q + ip - i\omega)(v_{20} + iw_{20}) + p(v_{11} + iw_{11}), \\ (\dot{v}_{11} + i\dot{w}_{11}) &= (-3q + ip - i\omega)(v_{11} + iw_{11}) - 2p(v_{20} + iw_{20}) + 2p(v_{02} + iw_{02}), \\ (\dot{v}_{02} + i\dot{w}_{02}) &= (-3q + ip - i\omega)(v_{02} + iw_{02}) - p(v_{11} + iw_{11}). \end{aligned}$$

Введем новые функции

$$Z_{20} = v_{20} + iw_{20}, \quad Z_{02} = v_{02} + iw_{02}, \quad Z_{11} = v_{11} + iw_{11}$$

и вектор-функции

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{20} \\ Z_{02} \\ Z_{11} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{20} \\ Y_{02} \\ Y_{11} \end{pmatrix}, \quad Z = Y \exp\left(-\int_0^t (3q - ip + i\omega) dt\right).$$

Тогда для Y получим систему вида

$$\dot{Y} = pMY, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее решение выражается через p формулой

$$Y = \exp\left(M \int_0^t p dt\right) \alpha',$$

где вектор $\alpha = {}^t(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ состоит из комплексных констант интегрирования. Собственные числа λ_j и соответствующие собственные векторы m_j матрицы M следующие:

$$\lambda_0 = 0, \quad m_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = 2i, \quad m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2i, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Поэтому решение Y представляется в виде

$$Y = \tilde{\alpha}_0 m_0 + \exp\left(2i \int_0^t p dt\right) \tilde{\alpha}_1 m_1 + \exp\left(-2i \int_0^t p dt\right) \tilde{\alpha}_2 m_2,$$

где $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ — комплексные константы интегрирования (связанные линейным преобразованием с α'). Возвращаясь к переменным Z , а также учитывая формулы (21), приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. *Любое решение уравнений (11), (12) связано с p и q (или с p и ρ_{00}) равенством*

$$\begin{aligned} Z &= \exp\left(-\int_0^t (3q - ip + i\omega) dt\right) \left(\tilde{\alpha}_0 m_0 + \exp\left(2i \int_0^t p dt\right) \tilde{\alpha}_1 m_1 + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-2i \int_0^t p dt\right) \tilde{\alpha}_2 m_2 \right) \equiv \\ &\equiv (\rho_{00})^{3/2} \exp\left(i \int_0^t (p - \omega) dt\right) \left(\alpha_0 m_0 + \exp\left(2i \int_0^t p dt\right) \alpha_1 m_1 + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-2i \int_0^t p dt\right) \alpha_2 m_2 \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где α_j и $\tilde{\alpha}_j$ ($\alpha_j = c_1^{3/2} \tilde{\alpha}_j$) — комплексные константы интегрирования.

6.3. Теперь обратимся к уравнениям (7) для ρ_{10}, ρ_{01} . Введем обозначение

$$R_1 = \rho_{10} + i\rho_{01}.$$

ЛЕММА 2. *Функции R_1 , ρ_0 и p связаны равенством*

$$R_1 \equiv \rho_{10} + i\rho_{01} = \frac{2i}{c}(\rho_{00})^{3/2} \exp\left(-i \int_0^t p dt\right) \times \\ \times \left[\alpha_3 + \alpha_0 \exp\left(2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) - \bar{\alpha}_1 \exp\left(-2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) \right]. \quad (25)$$

Здесь α_0 , α_1 , c – константы из (24), (21) и α_3 – новая комплексная константа интегрирования, черта означает комплексное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим второе из уравнений (7) на i и сложим его с первым. В результате получим уравнение для R_1 в виде

$$\dot{R}_1 + 3qR_1 - ipR_1 = -\rho_{00}(w_{11} + iv_{11} + 2(v_{20} + iw_{02})). \quad (26)$$

Подставим в правую часть w_{11} , v_{11} , v_{20} и w_{02} с учетом (24). Из простых вычислений следует

$$w_{11} + iv_{11} + 2(v_{20} + iw_{02}) = i\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_{20} - \bar{Z}_{02} + Z_{20} + Z_{02} = \\ = 2(\rho_{00})^{3/2} \left[\alpha_0 \exp\left(i \int_0^t (p - \omega) dt\right) + 2\bar{\alpha}_1 \exp\left(-i \int_0^t (3p - \omega) dt\right) \right].$$

Поэтому интегрирование (26) с учетом (21) дает

$$R_1 = -2 \exp\left(- \int_0^t (3q + ip) dt\right) \times \\ \times \left[\frac{\tilde{\alpha}_3}{c_1^{3/2}} + 2 \int_0^t \exp\left(\int_0^t (3q + ip) dt\right) \frac{\exp(-3 \int_0^t q dt)}{c_1^{3/2}} \rho_{00} \times \right. \\ \times \left. \left(\alpha_0 \exp\left(i \int_0^t (p - \omega) dt\right) + 2\bar{\alpha}_1 \exp\left(-i \int_0^t (3p - \omega) dt\right) \right) dt \right] = \\ = -2(\rho_{00})^{3/2} \exp\left(-i \int_0^t p dt\right) \left[\tilde{\alpha}_3 + 2 \int_0^t \rho_{00} \left(\alpha_0 \exp\left(2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\bar{\alpha}_1 \exp\left(-2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) \right) dt \right] = \\ = -2(\rho_{00})^{3/2} \exp\left(-i \int_0^t p dt\right) \times \\ \times \left[\tilde{\alpha}_3 + 2 \int_0^t \rho_{00} \alpha_0 \exp\left(ic \int_0^t \rho_{00} dt\right) + 2\bar{\alpha}_1 \exp\left(-ic \int_0^t \rho_{00} dt\right) dt \right] = \\ = \frac{2i}{c}(\rho_{00})^{3/2} \exp\left(-i \int_0^t p dt\right) \left[\alpha_3 + \alpha_0 \exp\left(2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) - \right. \\ \left. - 2\bar{\alpha}_1 \exp\left(-2i \int_0^t \left(p - \frac{\omega}{2}\right) dt\right) \right].$$

Здесь $\tilde{\alpha}_3, \alpha_3$ – комплексные константы (связанные между собой). Лемма доказана.

6.4. Теперь мы хотим исследовать уравнение (10) с учетом (12) для функции r

$$\frac{dr}{dt} + 4qr = -\frac{1}{2}\rho_{10}(3v_{20} - w_{11} + v_{02}) + \frac{1}{2}\rho_{01}(3w_{02} + v_{11} + w_{20}) \quad (27)$$

и среднее из уравнений (8). Введем функцию

$$g_1 = 3w_{02} + v_{11} + w_{20} + i(3v_{20} + w_{11} + v_{02}).$$

Тогда правую часть в (27) можно переписать в виде $\text{Im}(R_1 g_1)/2$. Используя переменные Z и равенство (24), преобразуем g_1 к виду

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{3}{2i}(Z_{02} - \bar{Z}_{02}) + \frac{1}{2}(Z_{11} + \bar{Z}_{11}) + \frac{1}{2i}(Z_{20} - \bar{Z}_{20}) + \frac{3i}{2}(Z_{20} + \bar{Z}_{20}) + \\ &+ \frac{1}{2}(Z_{11} - \bar{Z}_{11}) + \frac{i}{2}(Z_{02} + \bar{Z}_{02}) = i(Z_{20} - Z_{02}) + Z_{11} + 2i(\bar{Z}_{20} + Z_{02}) = \\ &= 4i(\rho_0)^{3/2} \left(\bar{\alpha}_0 \exp\left(-i \int_0^t (p - \omega) dt\right) + \alpha_1 \exp\left(i \int_0^t (3p - \omega) dt\right) \right), \end{aligned}$$

из которого следует

$$\frac{1}{2} \text{Im}(R_1 g_1) = \frac{2(\rho_{00})^3}{c} \text{Im} \left[\alpha_1 \alpha_3 e^{i\Phi} + \bar{\alpha}_0 \alpha_3 e^{-i\Phi} + \alpha_0 \alpha_1 e^{2i\Phi} - 2\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 e^{-2i\Phi} \right].$$

Подставляя полученное выражение для $\text{Im}(R\rho)/2$ в (27) и используя, как и раньше, (21) и (23), выразим r через Φ и ρ_{00} :

$$\begin{aligned} r &= -\frac{4(\rho_{00})^2}{c^2} \tilde{Q}(\Phi), \\ \tilde{Q}(\Phi) &= \text{Re} \left(\alpha_1 \alpha_3 e^{i\Phi} - \bar{\alpha}_0 \alpha_3 e^{-i\Phi} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{2} e^{2i\Phi} + \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 e^{-2i\Phi} \right) + c_3, \end{aligned} \quad (28)$$

где c_3 – вещественная константа. Выразим теперь q , p и r в среднем из уравнений (8) через функцию ρ_{00} с помощью соотношений (21) и (28). Это дает

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}_{00}}{\rho_{00}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\rho}_{00}}{\rho_{00}} \right)^2 - \frac{c^2}{4} (\rho_{00})^2 + \frac{\omega^2}{4} - \frac{8(\rho_{00})^2}{c^2} \tilde{Q}(\Phi) = 0. \quad (29)$$

Так как по предположению теоремы 2 ρ_{00} не обращается в нуль, то в последнем уравнении от переменной t можно перейти к переменной Φ с помощью (23):

$$\frac{d}{dt} = c\rho_{00} \frac{d}{d\Phi}.$$

В результате (29) примет вид

$$-\frac{1}{2} c^2 \rho_{00} \frac{d^2 \rho_{00}}{d\Phi^2} + \frac{1}{4} c^2 \left(\frac{d\rho_{00}}{d\Phi} \right)^2 - \frac{c^2}{4} (\rho_{00})^2 + \frac{\omega^2}{4} - \frac{8(\rho_{00})^2}{c^2} \tilde{Q}(\Phi) = 0,$$

а для $\sqrt{\rho_{00}}$ мы получим уравнение

$$\frac{d^2}{d\Phi^2} \sqrt{\rho_{00}} + Q(\Phi) \sqrt{\rho_{00}} = \frac{\omega^2}{4c^2(\rho_{00})^{3/2}}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\Phi) &= \frac{8\tilde{Q}(\Phi)}{c^4} + \frac{1}{4} \equiv \\ &\equiv \frac{8}{c^4} \operatorname{Re} \left(\alpha_1 \alpha_3 e^{i\Phi} - \bar{\alpha}_0 \alpha_3 e^{-i\Phi} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{2} e^{2i\Phi} + \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 e^{-2i\Phi} \right) + \frac{8c_3}{c^4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

При $\omega \neq 0$ это уравнение для неизвестной функции $\sqrt{\rho_{00}}(\Phi)$ называется уравнением Ермакова и сводится (для любого $Q(\Phi)$) к решению линейного уравнения $y_{\Phi\Phi} + Q(\Phi)y = 0$, которое в нашем случае в силу 2π -периодичности по Φ является уравнением Хилла и совпадает с уравнением (13), если вместо параметров констант интегрирования α, c_3 ввести параметры β, Ω_0 по формулам

$$\beta_0 = \frac{2\sqrt{2}\alpha_0}{c^2}, \quad \beta_1 = \frac{2\sqrt{2}\alpha_1}{c^2}, \quad \beta_2 = \frac{2\sqrt{2}\alpha_3}{c^2}, \quad \Omega_0^2 = \frac{8c_3}{c^4} + \frac{1}{4} \quad (31)$$

(при $\omega = 0$ оно просто совпадает с (13)).

Приведем соответствующие вычисления. Пусть $\omega \neq 0$ и $y(\Phi)$ – некоторое решение уравнения (13). Тогда любое вещественное решение уравнения (30) имеет вид (см.⁵⁾ [30, с. 351, формула (13)])

$$\rho_{00} = \frac{\omega^2}{4c^2 C_1^2} y^2 + y^2 \left(C_2 + C_1 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{y^2} \right)^2,$$

здесь C_1, C_2 – константы интегрирования. Преобразуем эту формулу. С учетом выбора переменной Φ имеем

$$c dt = \frac{d\Phi}{\rho_{00}} \equiv \frac{d\Phi}{y^2 \left(\frac{\omega^2}{4c^2 C_1^2} + \left(C_2 + C_1 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{y^2} \right) \right)} \equiv \frac{d \left(C_2 + C_1 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{y^2} \right)}{C_1 \left(\frac{\omega^2}{4c^2 C_1^2} + \left(C_2 + C_1 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{y^2} \right) \right)}.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} (t - t_0) = \frac{2cC_1}{\omega} \left(C_2 + C_1 \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{y^2} \right),$$

где t_0 – константа, связанная с C_1, C_2 и с условием $\Phi|_{t=0} = 0$. Используя это соотношение, мы можем переписать ρ_{00} в виде

$$\rho_{00} = \frac{\omega^2 y^2}{4c^2 C_1^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} (t - t_0)}. \quad (32)$$

Теперь вместо констант C_1, C_2 можно использовать константы C_1 и t_0 , что мы и будем делать в дальнейшем. Мы хотим подставить в (32) решение уравнения Хилла.

⁵⁾ Автор благодарит В. П. Павлова, который обратил его внимание на этот справочник.

ЛЕММА 3.

1. В экспоненциально неустойчивом случае базис решений уравнения Хилла (13) можно представить в виде

$$y_1 = g(\Phi) \cos \Theta e^{\lambda \Phi}, \quad y_2 = g(\Phi) \sin \Theta e^{-\lambda \Phi}, \quad (33)$$

где $g(\Phi) > 0$ – 2π -периодическая гладкая функция Φ , характеристический показатель $\lambda > 0$ и $\Theta(\Phi)$ – гладкая функция, $\Theta = \frac{n\Phi}{2} + \Theta_0(\Phi)$, Θ_0 – 2π -периодическая функция, $n \geq 0$ – целое,

$$\dot{\Theta} = \lambda \sin 2\Theta + 1/g^2(\Phi). \quad (34)$$

Представление (33), вообще говоря, не единственно.

2. В устойчивом случае базис решений уравнения Хилла (13) можно выбрать в виде

$$y_1 = g(\Phi) \cos(\Theta - \Theta_0), \quad y_2 = g(\Phi) \sin(\Theta - \Theta_0), \quad (35)$$

где Θ – гладкая и $g(\Phi) > 0$ – гладкая 2π -периодическая функции, определенные в п. 3 теоремы 2, Θ_0 – произвольная (фиксированная) константа. Функции $g(\Phi)$ и Θ выбираются единственным образом, при этом характеристический показатель (квазиимпульс) равен

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{g^2(\Phi)} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение элементарно следует из теоремы Флоке для уравнения Хилла и хорошо известно (см., например, [29]). Мы приводим его для полноты изложения. Действительно, согласно теории Флоке в неустойчивом случае существует базис $y = y_0 e^{i\Omega\Phi}$, $\bar{y} = \bar{y}_0 e^{-i\Omega\Phi}$. Здесь y_0 – гладкая 2π -периодическая функция, а черта означает комплексное сопряжение. Нормируем этот базис условием

$$\bar{y}\dot{y} - y\dot{\bar{y}} = 2i, \quad (36)$$

из которого, в частности, немедленно следует, что $|y_0| \neq 0$. Следовательно, мы можем определить гладкую 2π -периодическую функцию $g = |y_0|$ и гладкую функцию $\Theta = \text{Arg } y$, фиксируя ветвь $\text{Arg } y$, например, условием $\Theta|_{\Phi=0} = 0$. (Вместе с (36) это условие полностью определяет базис $y, \bar{y}$, функции g и Θ .) Базис (35) и формула для Ω получаются из базиса $y, \bar{y}$ очевидным образом.

Первое утверждение также следует из элементарных рассуждений и, вероятно, также известно, но поскольку нам не удалось найти его в цитированных выше монографиях, приведем его доказательство. Согласно теории Флоке мы можем выбрать базис из решений Флоке

$$y_+ = y_+(\Phi) e^{\lambda \Phi}, \quad y_- = y_-(\Phi) e^{-\lambda \Phi}, \quad (37)$$

где $y_{\pm}$ – 2π -периодические или антипериодические гладкие вещественные функции. Вронскиан (или кососкалярное произведение), отвечающей y_+ и y_- , есть константа; мы фиксируем ее, а также знак λ , считая

$$y_+ \dot{y}_- - y_- \dot{y}_+ = 1, \quad \lambda > 0. \quad (38)$$

Из (38), в частности, немедленно следует, что y_+ и y_- не обращаются одновременно в нуль. Поэтому мы можем определить гладкие функции: 2π -периодическую $g =$

$\sqrt{(y_+^0)^2 + (y_-^0)^2}$ и 2π -периодические или антипериодические $\cos \Theta = y_+/g$, $\sin \Theta = y_-/g$ и написать равенства

$$y_+ = g(\Phi) \cos(\Theta(\Phi)) e^{\lambda\Phi}, \quad y_- = g(\Phi) \sin(\Theta(\Phi)) e^{-\lambda\Phi}.$$

Подставляя теперь эти равенства в левую часть первого из условий (38), получим для Θ уравнение (34). Так как в силу определения $\cos \Theta(\Phi)$ и $\sin \Theta(\Phi)$ — гладкие 2π -периодические или антипериодические функции аргумента Φ , то и Θ — также гладкая функция, причем полное приращение функции Θ за период может быть кратно πn , n — целое число. Отсюда немедленно следует доказательство утверждения 1 леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Число n характеризует номер зоны неустойчивости (см. [27–29]).

Вернемся теперь к функции плотности (геопотенциала) ρ_{00} (32). Используя в качестве решения y функции y_1 (33) в неустойчивой и y_1 (35) в устойчивой ситуации, получим в силу равенства $d\Phi/dt = c\rho_{00}$ и (34):

$$\frac{\omega dt}{2 \cos^2 \left(\frac{\omega}{2}(t - t_0) \right)} = \frac{2cC_1^2}{\omega} d(e^{-2\lambda\Phi} \operatorname{tg}(\Theta - \Theta_0)),$$

где $\Theta_0 = 0$ в неустойчивом и $\lambda = 0$ в устойчивом случаях. Отсюда следует

$$e^{-2\lambda\Phi} \operatorname{tg}(\Theta(\Phi) - \Theta_0) = \left(\operatorname{tg} \frac{\omega(t - t_0)}{2} - C_3 \right) \frac{\omega}{2cC_1^2}, \quad (39)$$

где C_3 — константа, связанная с t_0 и C_1 равенством

$$C_3 = - \left(\operatorname{tg} \frac{\omega t_0}{2} + \frac{2cC_1^2}{\omega} \operatorname{tg} \Theta(0) \right)$$

в неустойчивом случае. В устойчивом случае выберем Θ_0 (не уменьшая общности) из условия

$$\operatorname{tg} \Theta_0 = \frac{\omega}{2cC_1^2} \operatorname{tg} \frac{\omega(t - t_0)}{2},$$

тогда $C_3 = 0$. Подставим (39) в (32). Тогда с учетом выбора $y = y_1$ найдем в неустойчивом случае

$$\rho_{00} = \frac{\omega^2 g^2}{4c^2 C_1^2 e^{-2\lambda\Phi} \cos^2 \frac{\omega(t-t_0)}{2} + \frac{\omega^2}{C_1^2} \left(\sin \frac{\omega(t-t_0)}{2} - C_3 \cos \frac{\omega(t-t_0)}{2} \right)^2}.$$

Отсюда ясно, что в точках t_e таких, где $\operatorname{tg} \frac{\omega(t-t_0)}{2} = C_3$,

$$\rho_{00} = \omega^2 g^2 \frac{e^{2\lambda\Phi(t_e)} (1 + C_3^2)}{4c^2 C_1^2},$$

и т.к. в силу определения функция $\Phi(t)$ монотонно возрастает (если $c > 0$) или убывает (если $c < 0$), а $g > 0$, то в этих точках t_e функция ρ_{00} также будет экспоненциально быстро возрастать или убывать.

В устойчивой ситуации получим

$$\rho_{00} = \frac{\omega^2 g^2(\Phi)}{4c^2 C_1^2 + \left(\frac{\omega^2}{C_1^2} - 4c^2 C_1^2\right) \sin^2 \frac{\omega(t-t_0)}{2}}.$$

Введем вместо константы интегрирования C_1^2 константу $\mu = \frac{\omega}{2|c|C_1^2}$, тогда последняя формула примет вид (14). Уравнение (39) в случае $\lambda = 0$, связывающее Θ с t , теперь примет вид

$$\operatorname{tg}(\Theta - \Theta_0) = \mu \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}(t - t_0).$$

Разрешая его относительно Θ , получим

$$\begin{aligned} \Theta &= \operatorname{Arctg} \mu \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2}(t - t_0) \right) + \Theta_0, \\ \Theta_0 &= \operatorname{Arctg} \left(\mu \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2}t_0 \right) \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Мы считаем здесь, что $\operatorname{Arctg} \mu \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2}(t - t_0) \right) + \Theta_0$ лежит в том же промежутке $[\pi k, \pi(k+1)]$, что и $\frac{\omega}{2}(t - t_0)$. Это уравнение вместе с равенствами $d\Theta/d\Phi = 1/g^2(\Phi)$, $\Theta|_{\Phi=0} = 0$ и указанным выбором $y(\Phi)$ полностью определяет возможную зависимость ρ_{00} от t , комплексных параметров $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и вещественных $\Omega_0 > 0, c, t_0$ и $\mu > 0$. Последний параметр без потери общности можно считать лежащим на интервале

$$0 < \mu \leq 1, \quad (41)$$

т.к. при $\mu > 1$ можно сделать замену $\mu \rightarrow 1/\mu, t_0 \rightarrow t_0 + \pi/\omega, \Theta_0 \rightarrow \Theta_0 + \pi$, которая приводит к (41). Тем самым доказан п. 2 теоремы 2 для $\omega \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Если имеет место несильная устойчивость, то последние рассуждения также справедливы, но устойчивость перечисленных свойств по отношению к “шевелению” β и Ω_0 , вообще говоря, теряется. 2. Можно также исследовать поведение ρ_{00} в случае, когда имеет место линейная неустойчивость, тогда ρ_{00} также будет либо расти, либо принимать нулевые значения. Так как этот случай является неустойчивым по отношению к “шевелению” параметров β, Ω_0 и “сваливается” либо в экспоненциально неустойчивую, либо в сильно устойчивую ситуацию, мы его подробно не обсуждаем.

Рассмотрим случай $\omega = 0$. Тогда ρ_{00} есть просто квадрат решения уравнения Хилла. Действуя так же, как и выше, в результате более простых вычислений получим следующие формулы: в устойчивом случае

$$\rho_{00} = \frac{g^2(\Phi)}{C_1^2 + C^2(t - t_0)^2},$$

в экспоненциально неустойчивом случае

$$\rho_{00} = \frac{g^2(\Phi)}{C^2(e^{-2\lambda\Phi}(t - t_0)^2 + C_1^2(t - t_1)^2)},$$

где C_1, C, t_0, t_1 — константы интегрирования. Отсюда немедленно следует утверждение п. 2 теоремы 2.

6.5. Теперь в сильно устойчивом случае мы хотим выразить через функции $g(\Phi)$ и Θ , определяющие решения уравнения Хилла, скорости v_{00} , w_{00} и траекторию особенности X_1 , X_2 . Подставим выражение для ρ_{00} вида (14) в (25) и заменим $\int_0^t p dt$ на функцию Φ (23). Это дает

$$R = \frac{i(\omega\mu)^{3/2}g^3(\Phi)}{\sqrt{2}|c|^{3/2}c(1-(1-\mu^2)\sin^2\frac{\omega}{2}(t-t_0))^{3/2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}e^{-\frac{i\Phi}{2}}(\alpha_3 + \alpha_0e^{i\Phi} - \bar{\alpha}_1e^{-i\Phi}).$$

С учетом определений g и Φ эта формула позволяет выразить R через решение уравнения Хилла (13).

Введем теперь комплексные скорость $V = v_{00} + iw_{00}$ и траекторию $X^c = X_1 + iX_2$. Тогда уравнения (3) и (7) примут вид

$$\dot{V} + i\omega V = R, \quad \dot{X}^c = V.$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\begin{aligned} V &= e^{-i\omega t} \left(\int_0^t R(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi + V^0 \right) \equiv e^{-i\omega t} (J_+ + V^0), \\ X^c &= X^0 - \frac{i}{\omega} \left(\int_0^t R(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi + V^0 \right) + \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \left(\int_0^t R(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi + V^0 \right) \equiv \\ &\equiv X^0 + \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega t} J_+ - J_-) + \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega t} - 1) V^0. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $X^0 = X_1^0 + iX_2^0$, $V^0 = V_1^0 + iV_2^0$ — комплексные константы,

$$J_{\pm} = \frac{2i}{c} \int_0^t (\rho_{00}(\xi))^{3/2} e^{\pm i\omega\xi/2} e^{-i\Phi(\xi)/2} (\alpha_0 e^{i\Phi(\xi)} - 2\bar{\alpha}_1 e^{-i\Phi(\xi)} + \alpha_3) d\xi. \quad (43)$$

Разумеется, в качестве констант интегрирования вместо V^0 и X^0 можно выбрать другие (комплексные) константы.

Интегралы (43) упростятся, если мы перейдем от переменной ξ к переменной Φ с помощью замены $d\xi = d\Phi/c\rho_{00}$. Получим

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \frac{2i}{c^2} \int_0^{\Phi(t)} (\rho_{00})^{1/2} e^{\pm i\omega\xi/2} e^{-i\Phi/2} (\alpha_0 e^{i\Phi} - 2\bar{\alpha}_1 e^{-i\Phi} + \alpha_3) d\Phi \equiv \\ &\equiv \frac{i}{c^2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2|c|}} \int_0^{\Phi(t)} \frac{g(\Phi) e^{\pm i\omega\xi/2} e^{-i\Phi/2} (\alpha_0 e^{i\Phi} - 2\bar{\alpha}_1 e^{-i\Phi} + \alpha_3) d\Phi}{\sqrt{1 - (1 - \mu^2) \sin^2(\omega(t - t_0)/2)}}. \end{aligned}$$

Наконец, с учетом выбора ветви Arctg (40) имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^{\pm i\omega t/2}}{\sqrt{1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \omega(t - t_0)/2}} &= e^{\pm i\omega t_0/2} \frac{1 \pm i \text{tg}(\omega(t - t_0)/2)}{\sqrt{1 + \mu^2 \text{tg}^2(\omega(t - t_0)/2)}} = \\ &= \frac{1}{\mu} e^{\pm i\omega t_0/2} (\mu \cos(\Theta - \Theta_0) \pm \sin(\Theta - \Theta_0)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$J_{\pm} = \frac{ie^{\pm i\omega t_0/2}}{c^2} \sqrt{\frac{\omega}{2\mu|c|}} \int_0^{\Phi(t)} g(\Phi) (\mu \cos(\Theta - \Theta_0) \pm i \sin(\Theta - \Theta_0)) \times \\ \times e^{-i\Phi/2} (\alpha_0 e^{i\Phi} - 2\alpha_1 e^{-i\Phi} + \alpha_3) d\Phi.$$

Перейдем от параметров α к параметрам β по формулам (31) и выразим $J_{\pm}$ через $I_{\pm}$:

$$J_{\pm} = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\omega}{\mu|c|}} I_{\pm}.$$

Затем подставим $J_{\pm}$ в (42). Получим окончательно

$$V = e^{-i\omega t} \left(\frac{i}{4} \sqrt{\frac{\omega}{\mu|c|}} I_{+} + V \right)$$

и формулу (14) для траектории X^c .

Эти рассуждения завершают доказательство теоремы 2.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 960100937.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
- [2] В. П. Маслов. О распространении ударной волны в изоэнтропическом невязком газе. В кн.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 199–271; Распространение ударных волн в изоэнтропическом газе с малой вязкостью. В кн.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 273–308.
- [3] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. Сибирский матем. журнал. 1983. Т. 34. № 5. С. 172–182.
- [4] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов. ТМФ. 1982. Т. 53. № 2. С. 163–180; 1983. Т. 54. № 1. С. 23–37.
- [5] J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 315–319.
- [6] Ю. В. Егоров. УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
- [7] В. Г. Данилов, В. П. Маслов, В. М. Шелкович. Алгебры особенностей обобщенных решений строго гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка. ТМФ. 1997 (в печати).
- [8] А. К. Погребков. ДАН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 873–876.
- [9] М. А. Гринфельд. Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. № 5. С. 883–898.
- [10] P. Prasad, R. Ravindran. Appl. Math. Lett. 1990. V. 3. № 2. P. 107–109.
- [11] Атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1991.
- [12] Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин. УФН. 1990. Т. 160. № 7. С. 1–47.
- [13] А. П. Хаин, Г. Г. Сутырин. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеиздат, 1983.
- [14] В. А. Гордин. Математические проблемы гидродинамического прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
- [15] Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. Системы гидродинамического типа и их приложения. М.: Наука, 1981.
- [16] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [17] В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов. ДАН. 1994. Т. 338. С. 102–105; Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 11–20.
- [18] В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов. Распространение точечных алгебраических особенностей для нелинейных уравнений гидродинамики и моделирования мезомасштабных вихрей в неоднородной атмосфере на основе гипотезы В. П. Маслова. Препринт № 552. М.: Институт проблем механики РАН, 1995.

- [19] *М. И. Вишик, А. В. Фурсиков.* Математические проблемы статистической механики. М.: Наука, 1980.
- [20] *В. Н. Жигарев.* О необходимых условиях существования и единственности типа решения со слабой распространяющейся особенностью, сосредоточенной в точке, для уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных. Деп. М.: ВИНТИ, 1986. 8148–B86.
- [21] *V. V. Bulatov, V. G. Danilov, S. Yu. Dobrokhoto, Yu. V. Vladimirov.* Hugoniot and Maslov Chains for Solitary Vortex Solutions to Equations of “Shallow” Water, the Hill Equations and Trajectories of a “Typhoon Eye”. In: Proceedings of the II Int. Conf. “Asymptotic Methods in Mechanics” (St. Petersburg, 1996). Kluwer (to appear).
- [22] *С. Ю. Доброхотов.* УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 203–204.
- [23] *В. М. Бабич.* Матем. сб. 1960. Т. 52. № 2. С. 709–738; Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 1–37.
- [24] *С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов.* Конечнорезонансные почти периодические решения в ВКБ-приближениях. В кн.: Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–94.
- [25] *H. Flashka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin.* Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. № 6. P. 739–784.
- [26] *И. М. Кричевер.* Функции. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 37–52.
- [27] *М. Г. Крейн.* ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 3. С. 445–448.
- [28] *И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский.* УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 3–40.
- [29] *В. А. Якубович, В. М. Старжинский.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
- [30] *В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1995.

Поступила в редакцию 3.11.1997 г.

S. Yu. Dobrokhoto
REDUCTION OF HUGONIOT–MASLOV CHAINS
FOR TRAJECTORIES OF SOLITARY VORTICES
OF THE “SHALLOW WATER” EQUATIONS
TO THE HILL EQUATION

According to V. Maslov’s idea, many of 2D quasilinear hyperbolic systems of PDE possess only 3 types of singularities in generic positions with properties of “structure” self-similarity and stability. They are shock waves, “narrow” solitons and “square root” point singularities (solitary vortices). Their propagations are described by infinite chains of ODE that generalize the well known Hugoniot conditions for shock waves. After some reasonable closing of the chain for solitary vortices of the “shallow water” equations we obtain the nonlinear system of 16 ODE, which is exactly equivalent to the (linear) Hill equation with a periodic potential. It means that in some approximation the trajectory of solitary vortex can be described by the Hill equation. This result can be used also for prediction of a future trajectory of the centre of solitary vortices via its observable part.