Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Жижина, Асимптотическая формула для убывания корреляций в стохастической модели плоских ротаторов при высоких температурах, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 67–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:33:22

Е. А. Жижина*

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА
ДЛЯ УБЫВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ
В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКИХ
РОТАТОРОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

Найдена асимптотическая формула для убывания корреляций $\langle f_A(x(0)), g_{A+k(t)}(x(t)) \rangle$, когда $t \rightarrow \infty$, $k(t) \rightarrow \infty$, $k(t) \in Z^d$, в стохастической модели плоских ротаторов $x(t) = \{x_k(t), k \in Z^d\}$, $t \geq 0$, $x_k(t) \in T^1$ при высоких температурах. Основными методами исследования являются спектральный анализ генератора соответствующей марковской полугруппы, а также метод перевала.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этой работе рассматривается стохастическая (глауберова) динамика системы плоских ротаторов на решетке Z^d при высоких температурах T . Основным методом исследования данной модели является спектральный анализ генератора H_β ($\beta = T^{-1}$ — обратная температура) соответствующей марковской полугруппы $\mathcal{T}_t, t \geq 0$. Такой подход к изучению стохастической динамики бесконечночастичных систем был впервые развит в работах Минлоса [1], Кондратьева и Минлоса [2]. Этот метод позволяет выделить несколько первых инвариантных подпространств и изучить спектр генератора H_β на этих подпространствах. Причем построение инвариантных подпространств стохастической динамики базируется на схеме выделения инвариантных подпространств к кластерным операторам, изложенной в книге Малышева и Минлоса [3]. В данной работе будут использованы эти построения, а также методы вычисления асимптотического убывания корреляций для спиновых полей, развитые в работе Минлоса и Жижинной [4].

Как известно, при малых β , $0 < \beta \leq \beta_0(d)$, на пространстве всех конфигураций $\Omega = T^{Z^d} \ni x = \{x_k, k \in Z^d\}$, $x_k \in T$ (T — одномерный тор), существует единственное предельное гиббсовское распределение μ_β , которое можно определить как слабый предел конечных распределений $\mu_{\Lambda, \beta}$, $\Lambda \subset Z^d$ на Ω :

$$\mu_\beta = \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \mu_{\Lambda, \beta}, \quad (1)$$

заданных формулой

$$d\mu_{\Lambda, \beta} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}} e^{-\beta U_\Lambda(x_\Lambda)} d\mu_{\Lambda, 0}.$$

* Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия. E-mail: ejj@ippr.ac.msk.su

Здесь $\Lambda \subset Z^d$ – конечные подмножества решетки, $Z_{\Lambda, \beta}$ – нормирующий множитель, $U_{\Lambda}(x_{\Lambda})$ – гамильтониан модели плоских ротаторов в объеме $\Lambda \subset Z^d$:

$$U_{\Lambda}(x) = \sum_{k, m \in \Lambda: |k-m|=1} \cos(x_k - x_m),$$

$d\mu_{\Lambda, 0} = \prod_{k \in \Lambda} d\mu_0^{(k)} = (d\mu_0)^{|\Lambda|}$, $d\mu_0$ – нормированная мера Хаара на торе T .

Введем дифференциальный оператор H_{β} на пространстве финитных функций $D^0(H_{\beta}) \subset L_2(\Omega, \mu_{\beta})$ по формуле

$$(H_{\beta}f)(x) = - \sum_{k \in Z^d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} - \sum_{k \in Z^d} b_k(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad (2)$$

где

$$b_k(x) = -\beta \sum_{m: |k-m|=1} \sin(x_k - x_m), \quad f(x) \in D^0(H_{\beta}).$$

Как показано в работе [5], H_{β} является существенно самосопряженным оператором в $L_2(\Omega, \mu_{\beta})$, и, следовательно, его замыкание $\overline{H}_{\beta}$ – самосопряженный оператор. В дальнейшем нам будет удобно сохранить обозначение H_{β} для замыкания оператора (2).

В работе [6] построен обратимый марковский процесс на Ω :

$$x(t) = \{x_k(t), k \in Z^d\}, \quad t \geq 0, \quad x_k(t) \in T,$$

со стационарным распределением μ_{β} , который порождает стохастическую полугруппу $\mathcal{T}_t = e^{-tH_{\beta}}$, $t \geq 0$, действующую в пространстве $L_2(\Omega, \mu_{\beta})$ по формуле

$$(\mathcal{T}_t f)(x) = \langle f(x(t)) \rangle_{\mathcal{P}, x}, \quad x \in \Omega,$$

где $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{P}, x}$ – условное среднее относительно распределения вероятностей $\mathcal{P}$ процесса $x(t)$ при условии, что $x \in \Omega$ – начальная конфигурация: $x(0) = x$.

Далее рассмотрим гладкие функции, зависящие от конечного числа переменных,

$$f_A(x) \equiv f_A(x_{a_1}, \dots, x_{a_m}), \quad x \in \Omega, \quad x_{a_j} \in T$$

(здесь $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset Z^d$ – конечное подмножество решетки Z^d), которые обладают непрерывными производными порядка $s_A = [m/2] + 1$, где $m = |A|$, $[m/2]$ – целая часть числа $m/2$: $f_A(x) \in C^{s_A}(T^{|A|})$. В этой работе при дополнительном условии на такие функции, которое будет сформулировано ниже, получена асимптотическая формула для убывания корреляций вида

$$\begin{aligned} I_{f,g}(t, k(t)) &\equiv \langle f_A(x(0)), g_{A+k(t)}(x(t)) \rangle_{\mathcal{P}} = \\ &= \langle f_A(x(0)) g_{A+k(t)}(x(t)) \rangle_{\mathcal{P}} - \langle f_A(x(0)) \rangle_{\mathcal{P}} \langle g_{A+k(t)}(x(t)) \rangle_{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

когда $t \rightarrow \infty$, $k(t) \rightarrow \infty$, $k(t) \in Z^d$. Здесь $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$ – среднее относительно распределения вероятностей $\mathcal{P}$ процесса $x(t)$.

Нам понадобится наложить ряд условий на рост вектора $k(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Фиксируем некоторое $0 < \beta \leq \beta_0(d)$. Мы предположим, что

$$\frac{k_j(t)}{t} \rightarrow u_j \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, d, \quad (3)$$

причем

$$\frac{k_j(t)}{t} - u_j = \alpha_j(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и

$$|u| = \sum_{j=1}^d |u_j| < \frac{1}{|\ln \beta|}, \quad u = (u_1, \dots, u_d), \quad (5)$$

при каждом фиксированном $0 < \beta \leq \beta_0(d)$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r(t) = (t, k(t)) \in R \times Z^d$ и пусть вектор $k(t)$ удовлетворяет условиям (3)–(5). Тогда существует такой вектор $p = p(u, \beta) \in R^{d+1}$, что имеет место следующая асимптотическая формула:

$$I_{f,g}(t, k(t)) = \frac{K_{f,g}^d(u)}{|r(t)|^{d/2}} e^{-(r(t), p)} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Здесь $K_{f,g}^d(u)$ – константа, зависящая от функций $f(x)$, $g(x)$ и вектора $u \in Z^d$, $(r(t), p)$ – скалярное произведение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, если координаты вектора u удовлетворяют условию

$$\beta^{1-\varepsilon} < \sum_{j=1}^d |u_j| < \frac{1}{|\ln \beta|},$$

где $0 < \varepsilon < 1$ – любая сколь угодно малая константа, вектор $p = p(u, \beta) \in R^{d+1}$ допускает следующее представление:

$$p = p_0(u, \beta) + p_1(u, \beta),$$

здесь

$$p_0 = \left(1 - \beta \sum_{j=1}^d \cosh \mu_j, \mu\right), \quad \mu \in R^d, \quad p_0 \in R^{d+1},$$

$$\mu_j = \operatorname{sign}(u_j) \ln \frac{2|u_j|}{\beta}, \quad j = 1, \dots, d, \quad |(p_1(u, \beta))_j| \leq C(\beta/u)^2, \quad j = 1, \dots, d+1,$$

C – некоторая абсолютная константа.

2. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И ФАКТЫ

В этом разделе мы опишем одночастичные инвариантные подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ оператора H_β , построенные в работе [2], и найдем спектр H_β на этих подпространствах. При этом для доказательства теоремы 1 нам понадобятся более точные, чем в [2], оценки спектра оператора H_β , ограниченного на подпространствах $\mathcal{H}_\pm$.

Обозначим через $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu_\beta)$, $\Omega = \{x_k \in T, k \in Z^d\}$, пространство квадратично интегрируемых функций на множестве Ω по мере μ_β , а через $\mathcal{M}$ – множество всех целочисленных функций (мультииндексов) с конечным носителем $\mathcal{M} = \{n = (n(k)), k \in Z^d\}$, где $n(k) \in Z$ и $n(k) = 0$ при $|k| > N(n)$. Тогда множество функций

$$L_{\mathcal{M}} = \left\{ e_n(x) = \prod_{k \in \text{supp } n} e^{in(k)x_k}, n \in \mathcal{M} \right\}$$

образует (неортогональный) базис в $\mathcal{H}$. Обозначим далее через

$$r(n) = \sum_{k \in \text{supp } n} n(k) \quad (7)$$

заряд функции $n \in \mathcal{M}$. Заметим, что построенная выше стохастическая динамика сохраняет заряд, следовательно, все пространство $\mathcal{H}$ распадается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathcal{H} = \oplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_r,$$

причем каждое $\mathcal{H}_r$ образовано векторами вида $e_n(x)$, где $r(n) = r$. Таким образом, подпространства $\mathcal{H}_{\pm}$, которые строятся как возмущение соответствующих подпространств

$$\mathcal{H}_{\pm}^0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k e^{\pm i x_k} \right\},$$

лежат в подпространствах $\mathcal{H}_{\pm 1}$ соответственно: $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}_{-1}$. Обозначим через U_j , $j \in \mathbb{Z}^d$, унитарную группу сдвигов, действующую в пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$(U_j f)(x) = f(x^{(j)}),$$

где $(x^{(j)})_k = x_{k-j}$ — сдвиг конфигурации $x \in \Omega$ на вектор $j \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $(Jf)(x) = f(-x)$ — унитарная инволюция в $\mathcal{H}$. В работе [2] доказано, что при малых β существуют два взаимно ортогональных подпространства $\mathcal{H}_{\pm} \subset \mathcal{H}$, инвариантных относительно операторов H_{β} и U_j , $j \in \mathbb{Z}^d$. При этом оператор J устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими подпространствами: $J\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_{\mp}$.

Спектры операторов $H_+ = H_{\beta}|_{\mathcal{H}_+}$ и $H_- = H_{\beta}|_{\mathcal{H}_-}$ совпадают. Эти операторы имеют абсолютно непрерывный спектр, представляющий собой множество значений функции

$$m(\lambda) = 1 - \beta \sum_{j=1}^d \cos \lambda_j + m_1(\lambda),$$

где $|m_1(\lambda)| \leq C_1 \beta^2$, $\lambda \in W$ (комплексная окрестность тора T^d):

$$W = \{ |\text{Im } \lambda_j| < \log 3/2, \quad j = 1, \dots, d \}.$$

Для спектра оператора H_{β} в ортогональном дополнении

$$\mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \{ \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \},$$

где $\mathcal{H}_0$ — пространство констант, справедливо неравенство

$$\sigma(H_{\beta}|_{\mathcal{H}^{\perp}}) > 2 - C_2 \beta, \quad (8)$$

где C_2 — абсолютная константа.

Обозначим через

$$W_\beta = \{|\operatorname{Im} \lambda_j| < -\ln \beta - \ln D, \quad j = 1, \dots, d\} \quad (9)$$

комплексную окрестность тора T^d , где $D = D(d)$ – некоторая константа, зависящая только от размерности d : $D > \frac{13}{2}d$. Такой выбор этой константы будет пояснен ниже. Оказывается, что функция $m(\lambda)$ сохраняет свое представление в области W_β , а именно, справедлива теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $m(\lambda)$ имеет следующее представление:*

$$m(\lambda) = 1 - \beta \sum_{j=1}^d \cos \lambda_j + m_1(\lambda) = m_0(\lambda) + m_1(\lambda), \quad (10)$$

где функция $m_1(\lambda)$ аналитически продолжается внутрь полосы W_β и является равномерно ограниченной вместе со всеми своими производными:

$$|m_1(\lambda)| \leq B\beta^2, \quad |D^\alpha m_1(\lambda)| \leq B_\alpha \beta^2,$$

внутри полосы

$$\left\{|\operatorname{Im} \lambda_j| < -\ln \beta - \ln \frac{D}{\gamma}, \quad j = 1, \dots, d\right\} \quad (11)$$

для любого $0 < \gamma < 1$. Здесь $B = B(\gamma, D, d)$; $B_\alpha = B_\alpha(\gamma, D, d)$ – константы, зависящие от γ, D, d ; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – мультииндекс,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial \lambda_1^{\alpha_1} \dots \partial \lambda_d^{\alpha_d}}.$$

Доказательство этой теоремы основывается на общей схеме построения первых инвариантных подпространств для операторов в бесконечночастичных системах [3]. Поэтому вначале мы введем все необходимые конструкции, адаптированные к данной модели, и сформулируем леммы, на которых будет базироваться доказательство.

Для каждой функции $n \in \mathcal{M}$ определим величину

$$|n| = \sum_{k \in \operatorname{supp} n} |n(k)|,$$

и пусть

$$\mathcal{M}_1^\pm = \{n \in \mathcal{M} : |n| = 1, r(n) = \pm 1\}, \quad \mathcal{M}_{>1}^\pm = \{n \in \mathcal{M} : |n| > 1, r(n) = \pm 1\}.$$

Обозначим через $L_1^\pm$ линейную оболочку, натянутую на векторы $\{e_n, n \in \mathcal{M}_1^\pm\}$, а через $L_{>1}^\pm$ – линейную оболочку векторов $\{e_n, n \in \mathcal{M}_{>1}^\pm\}$, тогда

$$\mathcal{H}_{\pm 1} = L_1^\pm + L_{>1}^\pm, \quad (12)$$

и будем строить инвариантные подпространства $\mathcal{H}_\pm$ в виде

$$\mathcal{H}_\pm = L_1^\pm + S^\pm L_1^\pm, \quad (13)$$

где $S^\pm: L_1^\pm \rightarrow L_{>1}^\pm$ – операторы, существование и единственность которых в некотором классе операторов будет доказана ниже.

Далее мы проведем все доказательство для подпространства $\mathcal{H}_+$ (случай $\mathcal{H}_-$ рассматривается аналогично). Разложение (12) позволяет переписать оператор $H_\beta|_{\mathcal{H}_1}$ в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{10} & H_{11} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $H_{00}: L_1^+ \rightarrow L_1^+$, $H_{01}: L_{>1}^+ \rightarrow L_1^+$ и т.д. В частности, как легко следует из формулы (2) для оператора H_β , имеем

$$(H_{00})_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ -\beta/2, & |k - n| = 1, \\ 0, & |k - n| \geq 2. \end{cases} \quad (15)$$

Требование инвариантности подпространства $\mathcal{H}_+$ относительно оператора H_β переписывается в виде следующего уравнения на оператор $S = S^+$:

$$S = H_{11}^{-1} S H_{00} + H_{11}^{-1} S H_{01} S - H_{11}^{-1} H_{10}. \quad (16)$$

Рассмотрим подпространство A_D ограниченных операторов $Q: L_1^+ \rightarrow L_1^+$, удовлетворяющих условию

$$|||Q|||_D = \sup_k \sum_n |Q_{k,n}| \frac{1}{(D\beta)^{|k-n|}} < \infty,$$

где D – некоторая константа. Легко проверить, что справедливо следующее неравенство:

$$|||Q_1 Q_2|||_D \leq |||Q_1|||_D |||Q_2|||_D. \quad (17)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |||Q_1 Q_2|||_D &= \sup_k \sum_n |(Q_1 Q_2)_{k,n}| \frac{1}{(D\beta)^{|k-n|}} \leq \\ &\leq \sup_k \sum_{n,m} |(Q_1)_{k,m}| |(Q_2)_{m,n}| \frac{1}{(D\beta)^{|k-m|} (D\beta)^{|m-n|}} \leq \\ &\leq \sup_k \sum_m \frac{|(Q_1)_{k,m}|}{(D\beta)^{|k-m|}} \sup_m \sum_n \frac{|(Q_2)_{m,n}|}{(D\beta)^{|m-n|}} = |||Q_1|||_D |||Q_2|||_D. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. При $D > \frac{13}{2}d$ существует решение S уравнения (16), при этом оператор $H_{01}S \in A_D$ и

$$|||H_{01}S|||_D \leq C\beta^2.$$

Другими словами, матричные элементы оператора $H_{01}S$ допускают следующую оценку:

$$|(H_{01}S)_{k,n}| \leq \beta^2 d_{k,n} (D\beta)^{|k-n|}, \quad (18)$$

где

$$\sup_k \sum_n |d_{k,n}| < C, \quad C = C(D, d) = \frac{3Dd}{2D - 13d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в фактор-пространстве ограниченных операторов $\mathcal{L} = \{W : L_1^+ \rightarrow L_{>1}^+\}$ норму $||| \cdot |||_H$, индуцированную нормой $||| \cdot |||_D$, по формуле

$$|||W|||_H \equiv |||H_{01}W|||_D,$$

и пусть $\mathcal{L}_H = \{W \in \mathcal{L} : |||W|||_H < \infty\}$. Перепишем уравнение (16) в виде

$$S = FS = -H_{11}^{-1}H_{10} + H_{11}^{-1}SH_{00} + H_{11}^{-1}SH_{01}S, \quad (19)$$

и пусть

$$\mathcal{B} = \{W \in \mathcal{L}_H : |||W|||_H < C(d, D) \cdot \beta^2\}$$

– некоторый шар в $\mathcal{L}_H$. Здесь $C(d, D) = \frac{3Dd}{2D-13d}$. Мы покажем, что отображение F при соответствующем выборе константы $D = D(d)$ переводит шар $\mathcal{B}$ в себя: $F\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, и является сжимающим внутри $\mathcal{B}$. Отсюда будет следовать, что уравнение (19) имеет единственное решение S , лежащее внутри $\mathcal{B}$.

Для этого нам нужно оценить нормы всех операторов, входящих в выражение (19). Пользуясь формулой (2) для оператора H_β , запишем разложение для оператора H_{11}^{-1} в виде ряда

$$H_{11}^{-1} = (h(1 - h^{-1}\gamma))^{-1} = h^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} V^p,$$

где $h = \text{diag}\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}_{>1}^+}$ – диагональная матрица со значениями $h_n \geq 3$, $n \in \mathcal{M}_{>1}^+$, $h_n \in \mathbf{N}$, $V = h^{-1}\gamma$, причем все матричные элементы оператора V равномерно ограничены:

$$|V_{n,n'}| \leq \beta, \quad n, n' \in \mathcal{M}_{>1}^+.$$

Имеет место следующая оценка, доказательство которой проводится аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Пусть $R : L_1^+ \rightarrow L_{>1}^+$, $R \in \mathcal{L}_H$. Тогда справедлива оценка

$$|(H_{01}V^pR)_{k,n}| \leq \left(\frac{4d}{D}\right)^p (D\beta)^{|k-n|} d_{k,n}, \quad (20)$$

где

$$\sup_k \sum_n |d_{k,n}| \leq |||H_{01}R|||_D.$$

Из оценки (20) и формулы (15) для оператора H_{00} сразу следует неравенство

$$\begin{aligned} |(H_{01}H_{11}^{-1}SH_{00})_{k,n}| &\leq \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} |(H_{01}V^pSH_{00})_{k,n}| \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} |(H_{01}V^pS)_{k,n}| + \frac{\beta}{6} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=1}^d |(H_{01}V^pS)_{k \pm e_j, n}| < \\ &< \frac{1}{3} (D\beta)^{|k-n|} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4d}{D}\right)^p d_{k,n} + \frac{\beta d}{3} (D\beta)^{|k-n|-1} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4d}{D}\right)^p d_{k,n} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{d}{D}\right) (D\beta)^{|k-n|} d_{k,n} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4d}{D}\right)^p, \end{aligned}$$

следовательно,

$$|||(H_{01}H_{11}^{-1}SH_{00})|||_D < \alpha_1(d, D)|||H_{01}S|||_D,$$

где

$$\alpha_1(d, D) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{d}{D}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4d}{D}\right)^p, \quad (21)$$

и при $D > \frac{13}{2}d$ имеем $0 < \alpha_1(d, D) < 1$.

Далее, пользуясь неравенствами (17) и (20), получаем следующую оценку:

$$|||H_{01}H_{11}^{-1}SH_{01}S|||_D \leq |||H_{01}H_{11}^{-1}S|||_D |||H_{01}S|||_D \leq \alpha_2(d, D)|||H_{01}S|||_D^2,$$

где

$$\alpha_2(d, D) = \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4d}{D}\right)^p < 1 \quad (22)$$

при $D > 6d$. Аналогично находим

$$|||H_{01}H_{11}^{-1}H_{10}|||_D \leq \alpha_2(d, D)|||H_{01}H_{10}|||_D \leq \alpha_2(d, D)\frac{3}{2}d\beta^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$|||FS|||_H < \alpha_1|||S|||_H + \alpha_2|||S|||_H^2 + \alpha_2\frac{3}{2}d\beta^2.$$

Из этого неравенства, а также из выражений (21), (22) для констант α_1 и α_2 следует, что при малых β отображение F таково, что $F\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$. Кроме того, из представления (19) для отображения F заключаем, что

$$FS_1 - FS_2 = H_{11}^{-1}(S_1 - S_2)H_{00} + H_{11}^{-1}(S_1 - S_2)H_{01}S_1 + H_{11}^{-1}S_2H_{01}(S_1 - S_2),$$

а из приведенных выше оценок получаем, что для $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство

$$|||FS_1 - FS_2|||_H < \alpha_1|||S_1 - S_2|||_H + 2\alpha_2C(d, D)\beta^2|||S_1 - S_2|||_H.$$

Так как при всех достаточно малых β

$$\alpha_1 + 2\alpha_2C(d, D)\beta^2 < 1,$$

то отображение F является сжимающим относительно нормы $|||\cdot|||_H$ на шаре $\mathcal{B}$ и, следовательно,

$$|||S|||_H = |||H_{01}S|||_D \leq C(d, D)\beta^2.$$

Лемма 1 доказана.

Таким образом, мы доказали существование инвариантного подпространства $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_1$, которое имеет вид (13), где оператор S^+ удовлетворяет условиям леммы 1. Аналогичным образом доказывается существование инвариантного подпространства $\mathcal{H}_- = L_1^- + S^-L_1^-$.

Следовательно, в пространстве $\mathcal{H}_+$ существует базис, состоящий из векторов вида

$$v_k = e_k + S^+e_k, \quad k \in Z^d, \quad (23)$$

где $e_k = e^{ix_k}$, $x_k \in T$. Так как оператор H_+ коммутирует с группой пространственных сдвигов U_j , $j \in Z^d$, то оператор H_+ является оператором свертки и действует по формуле

$$H_+ v_k = \sum_n m(k-n) v_n,$$

где

$$m(k-n) = (H_{00})_{k-n} + (H_{01}S)_{k-n},$$

а операторы H_{00} , H_{01} введены соотношениями (14), (15). Кроме того, из леммы 1 следует, что

$$|(H_{01}S)_r| \leq \beta^2 (D\beta)^{|r|} d_r, \quad r = k-n \in Z^d,$$

где $\sum_r |d_r| < C = C(d, D)$. Таким образом, можно записать функцию $m(r)$ в виде

$$m(r) = m_0(r) + m_1(r), \quad r \in Z^d, \quad (24)$$

где функция $m_0(r) = (H_{00})_r = (H_{00})_{k,n}$, $r = k-n$, определена формулой (15), а $m_1(r) = (H_{01}S)_r$.

Далее воспользуемся следующей леммой из работы [2].

ЛЕММА 2. Пусть $\{w_k, k \in Z^d\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_+$, построенный из базиса (23) с помощью матрицы Грамма

$$G = \{g_{k-n}\}_{k,n \in Z^d}, \quad g_{k-n} = (v_k, v_n)_{\mathcal{H}},$$

и пусть функция $\tilde{m}(k-n)$ определяет действие оператора H_+ в этом базисе:

$$H_+ w_k = \sum_n \tilde{m}(k-n) w_n.$$

Тогда $\tilde{m}(r) = m(r)$, $r = k-n \in Z^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим преобразование Фурье V_+ , переводящее пространство $\mathcal{H}_+$ в $L_2(T^d, d\lambda_0)$:

$$V_+ : w_k \rightarrow e^{i(k,\lambda)}, \quad k \in Z^d, \quad \lambda \in T^d,$$

где T^d – d -мерный тор, $d\lambda_0$ – нормированная мера, при этом

$$(V_+ U_j) f(\lambda) = e^{i(j,\lambda)} f(\lambda), \quad j \in Z^d, \quad f(\lambda) \in L_2(T^d, d\lambda_0),$$

а оператор H_+ переходит в оператор $\tilde{H}_+$ умножения на функцию $m(\lambda)$:

$$(\tilde{H}_+ f)(\lambda) = m(\lambda) f(\lambda).$$

В силу леммы 2

$$m(\lambda) = \sum_{r \in Z^d} m(r) e^{i(r,\lambda)},$$

а функция $m(r)$ определена равенством (24). Из (15) и (24) следует, что

$$m(\lambda) = 1 - \beta \sum_{j=1}^d \cos \lambda_j + m_1(\lambda),$$

где $m_1(\lambda) = \sum_{r \in Z^d} (H_{01}S)_r e^{i(r, \lambda)}$. Воспользовавшись далее леммой 1, имеем, что при

$$|\operatorname{Im} \lambda_j| < -\ln \beta - \ln \frac{D}{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad j = 1, \dots, d,$$

выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |m_1(\lambda)| &\leq \sum_{r \in Z^d} |(H_{01}S)_r| \left(\frac{\gamma}{D\beta} \right)^{|r|} \leq \beta^2 \sum_{|r|=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{D\beta} \right)^{|r|} (D\beta)^{|r|} \sum_{u: |u|=|r|} |d_u| \leq \\ &\leq \beta^2 C(d, D) \sum_{|r|=0}^{\infty} \gamma^{|r|} = C(d, D) \beta^2 \frac{1}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь $|r| = \sum_{j=1}^d |r_j|$. Ограниченность производных $D^\alpha m_1(\lambda)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, доказывается аналогично. Теорема 2 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕВАЛЬНОГО КОНТУРА

Разложим функции $f_A(x), g_A(x) \in C^{s_A}(T^m)$, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $m = |A|$, в ряд Фурье:

$$f_A(x) = \sum_{k_1, \dots, k_m \in Z} f_{k_1, \dots, k_m} \exp\{i(k_1 x_{a_1} + \dots + k_m x_{a_m})\}, \quad (25)$$

$$g_A(x) = \sum_{k_1, \dots, k_m \in Z} g_{k_1, \dots, k_m} \exp\{i(k_1 x_{a_1} + \dots + k_m x_{a_m})\}. \quad (26)$$

Воспользовавшись определением заряда $r(n)$ (см. (7)), можно переписать разложения (25) и (26) следующим образом:

$$f_A(x) = \sum_{r \in Z} f_A(r, x), \quad g_A(x) = \sum_{r \in Z} g_A(r, x),$$

где $f_A(r, x) \in \mathcal{H}_r$, $r \in Z$,

$$f_A(r, x) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = r} f_{k_1, \dots, k_m} \exp\{i(k_1 x_{a_1} + \dots + k_m x_{a_m})\}.$$

Аналогичное представление имеет место для $g_A(r, x) \in \mathcal{H}_r$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Функции $f_A(x)$ и $g_A(x)$ таковы, что либо $f_A(1, x) \times g_A(1, x) \neq 0$, либо $f_A(-1, x) \cdot g_A(-1, x) \neq 0$.*

Так как $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{H}_{\pm 1}$, то можно записать для функций $f_A(x)$ и $g_A(x)$ следующие разложения:

$$f_A = a_0 + h_f^+ + h_f^- + h_f^\perp, \quad g_A = b_0 + h_g^+ + h_g^- + h_g^\perp. \quad (27)$$

Здесь $a_0 = \langle f_A(x) \rangle_{\mu_\beta} \in \mathcal{H}_0$, $b_0 = \langle g_A(x) \rangle_{\mu_\beta} \in \mathcal{H}_0$, $\langle \cdot \rangle_{\mu_\beta}$ — среднее относительно меры μ_β , $h_{f,g}^\pm$ — проекции функций $f_A(\pm 1, x)$, $g_A(\pm 1, x)$ на инвариантные подпространства $\mathcal{H}_\pm$, соответственно, $h_{f,g}^\perp \in \mathcal{H}_\pm$, $h_{f,g}^\perp \in \mathcal{H}^\perp = \mathcal{H} \ominus \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-\}$.

Воспользовавшись разложениями (27), имеем

$$\begin{aligned} I_{f,g}(t, k(t)) &= (f_A(x(0)), \mathcal{T}_t U_{k(t)} g_A(x(0)))_{\mathcal{H}} - \langle f_A(x(0)) \rangle_{\mu_\beta} \langle g_A(x(0)) \rangle_{\mu_\beta} = \\ &= (h_f^+, e^{-tH_+} U_{k(t)} h_g^+)_{\mathcal{H}_+} + (h_f^-, e^{-tH_-} U_{k(t)} h_g^-)_{\mathcal{H}_-} + \\ &\quad + (h_f^\perp, e^{-tH^\perp} U_{k(t)} h_g^\perp)_{\mathcal{H}^\perp}. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу условия (8) на спектр оператора $H^\perp = H_\beta|_{\mathcal{H}^\perp}$ получаем, что последнее слагаемое в разложении (28) имеет порядок

$$(h_f^\perp, e^{-tH^\perp} U_{k(t)} h_g^\perp)_{\mathcal{H}^\perp} = O(e^{-t(2-C_2\beta)}). \quad (29)$$

Переходя к преобразованию Фурье, запишем два первых слагаемых в (28) в виде интегралов:

$$\begin{aligned} I_{f,g}(t, k(t)) &= \int_{T^d} \tilde{h}_f^+(\lambda) \overline{\tilde{h}_g^+(\lambda)} e^{-tm(\lambda) - i(k(t), \lambda)} d\lambda + \\ &\quad + \int_{T^d} \tilde{h}_f^-(\lambda) \overline{\tilde{h}_g^-(\lambda)} e^{-tm(\lambda) - i(k(t), \lambda)} d\lambda + O(e^{-t(2-C_2\beta)}). \end{aligned} \quad (30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функции $\tilde{h}_{f,g}^\pm(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение в полосу W_β (9).*

Доказательство этого предложения основывается на оценках из леммы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как было сказано выше, унитарная инволюция J устанавливает взаимно однозначное соответствие между подпространствами $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$, и, в частности, $h_{f,g}^- = Jh_{f,g}^+$. Следовательно, $\tilde{h}_{f,g}^-(\lambda) = \overline{\tilde{h}_{f,g}^+(\lambda)}$.

ЛЕММА 3. *Пусть $k(t) \in Z^d$ — вектор, удовлетворяющий условиям (3)–(5), и пусть $r(t) = (t, k(t)) \in R \times Z^d$. Тогда существует такой вектор $p = p(u) \in R^{d+1}$, что справедлива следующая асимптотическая формула (при $t \rightarrow \infty$):*

$$\int_{T^d} (\tilde{h}_f^+(\lambda) \overline{\tilde{h}_g^+(\lambda)}) e^{-tm(\lambda) - i(k(t), \lambda)} d\lambda = \frac{C_d}{|r(t)|^{d/2}} e^{-(r(t), p)} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Здесь C_d — некоторая константа, которая зависит от d , u , а также функций $\tilde{h}_{f,g}^\pm(\lambda)$ и $m(\lambda)$. В случае, если

$$\beta^{1-\varepsilon} < \sum_{j=1}^d |u_j| < \frac{1}{|\ln \beta|},$$

где $0 < \varepsilon < 1$ — любая константа, вектор $p \in R^{d+1}$ допускает следующее представление:

$$p = p_0(u, \beta) + p_1(u, \beta),$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &\in R^{d+1}, \quad p_0(u, \beta) = (m_0(-i\mu), \mu), \quad \mu \in R^d, \\ \mu_j &= \text{sign}(u_j) \ln \frac{2|u_j|}{\beta}, \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

а координаты вектора $p_1(u, \beta) \in R^{d+1}$ удовлетворяют следующей оценке с некоторой абсолютной константой C :

$$|(p_1(u, \beta))_j| < C(\beta/u)^2, \quad j = 1, \dots, d+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция

$$\tilde{h}_1^+(\lambda) = \tilde{h}_f^+(\lambda) \overline{\tilde{h}_g^+(\lambda)}$$

допускает аналитическое продолжение в комплексную область W_β , для нахождения асимптотической формулы (31) следует воспользоваться методом перевала [7]. При этом в дальнейшем мы будем полагать, что λ – комплексная переменная: $\lambda \in C^d$. Введем обозначение

$$S_t(\lambda, k(t)) = -tm(\lambda) - i(k(t), \lambda).$$

С помощью представления (10) для функции $m(\lambda)$ и условий (3)–(5) на вектор $k(t)$ можно записать функцию $S_t(\lambda, k(t))$ в виде

$$S_t(\lambda, k(t)) = -t(m_0(\lambda) + m_1(\lambda) + i(u, \lambda)) - i(\alpha(t), \lambda),$$

где

$$m_0(\lambda) = 1 - \beta \sum_{j=1}^d \cos \lambda_j, \quad \sum_{j=1}^d |u_j| < \frac{1}{|\ln \beta|}, \quad \alpha_j(t) = o(\sqrt{t}), \quad j = 1, \dots, d.$$

В силу пространственной однородности рассматриваемой модели можно считать, что вектор u лежит в области, где $u_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$.

Введем далее функцию

$$S_0(\lambda, u) = -m_0(\lambda) - i(u, \lambda) \quad (32)$$

и построим перевальную поверхность для интеграла

$$\int_{T^d} \tilde{h}_1^+(\lambda) e^{tS_0(\lambda, u)} d\lambda. \quad (33)$$

Напомним, что метод перевала состоит из двух частей. Сначала необходимо найти критические точки функции $S_0(\lambda, u)$, а затем доказать, что существует перевальная поверхность Γ , проходящая хотя бы через одну из этих точек, причем исходная область интегрирования (в данном случае $\lambda \in T^d$) может быть непрерывно деформирована в поверхность Γ так, что соответствующие интегралы будут равны

$$\int_{T^d} \tilde{h}_1^+(\lambda) e^{tS_0(\lambda, u)} d\lambda = \int_{\Gamma} \tilde{h}_1^+(\lambda) e^{tS_0(\lambda, u)} d\lambda. \quad (34)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Перевальная поверхность Γ для интеграла (33) лежит внутри области W_β .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим одномерный случай $d = 1$. Из представления (32) для функции $S_0(\lambda, u)$ легко видеть, что при всех достаточно малых β , $0 < \beta < \beta_0(d)$, критические точки $\lambda_0^{(k)}(u, \beta)$, $k = 1, 2$, функции $S_0(\lambda, u)$ лежат внутри области W_β . Причем в случае, если $\beta^{1-\varepsilon} < \sum_{j=1}^d |u_j| < \frac{1}{|\ln \beta|}$, где $0 < \varepsilon < 1$, критические точки $\lambda_0^{(k)}(u, \beta)$ допускают следующее представление:

$$\lambda_0^{(1)}(u, \beta) = -i \left(\ln \frac{2u}{\beta} + \delta^{(1)}(u, \beta) \right), \quad \lambda_0^{(2)}(u, \beta) = \pi + i \left(\ln \frac{2u}{\beta} + \delta^{(2)}(u, \beta) \right),$$

где $|\delta^{(k)}(u, \beta)| < C(\beta/u)^2$, $k = 1, 2$.

Далее, для построения перевального контура Γ воспользуемся тем его свойством, что в окрестности точки перевала он идет по направлению линии уровня функции $\text{Im } S_0(\lambda, u)$, а в самой критической точке, лежащей на этом контуре, должен достигаться максимум функции $\text{Re } S_0(\lambda, u)$ на контуре. Другими словами, искомый контур должен являться линией наибоыстрейшего спуска функции $\text{Re } S_0(\lambda, u)$. Анализ функций $\text{Re } S_0$ и $\text{Im } S_0$ в окрестностях точек $\lambda_0^{(k)}(u, \beta)$, $k = 1, 2$, показывает, что искомый контур Γ должен проходить через точку $\lambda_0^{(1)}$ и иметь в этой точке горизонтальную касательную. Например, в качестве перевального контура можно взять контур Γ , проходящий через точку $\lambda_0(u, \beta) = \lambda_0^{(1)}$ параллельно исходному контуру T . При этом в силу аналитичности подынтегральной функции справедливо равенство (34). Случай больших размерностей $d > 1$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Из предложения и теоремы Руше следует, что при всех достаточно больших t у функции $S_t(\lambda, k(t))$ существует точка перевала $\lambda_{\text{cr}}(t) \in W_\beta$:

$$\lambda_{\text{cr}}(t) = \lambda_0(u, \beta) + \zeta(u, \beta) + \omega(u, t),$$

где $\lambda_0(u, \beta)$ — точка перевала для интеграла (33), а функции $\zeta(u, \beta)$ и $\omega(u, t)$ удовлетворяют оценкам

$$|\zeta_j(u, \beta)| < C\beta^2, \quad \omega(u, t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad j = 1, \dots, d.$$

При этом перевальная поверхность Γ_S для интеграла (31) лежит в малой окрестности $\mathcal{U}(\Gamma)$ поверхности Γ , построенной выше в предложении 2.

Обозначим через $\mu_{\text{cr}} \in W_\beta$ вектор

$$\mu_{\text{cr}} = \lambda_0(u, \beta) + \zeta(u, \beta).$$

Воспользовавшись далее равенством (34), мы находим асимптотическое выражение для интеграла (31) при $t \rightarrow \infty$ по общей формуле

$$\int_{\Gamma_S} \tilde{h}_1^+(\lambda) \exp\{S_t(\lambda, k(t))\} d\lambda = \frac{K_d}{t^{d/2}} \exp\{S_t(\mu_{\text{cr}}, k(t))\} (1 + o(1)), \quad (35)$$

где

$$K_d = \frac{(2\pi)^{d/2} \tilde{h}_1^+(\mu_{\text{cr}})}{(|\det\{m''(\lambda)|_{\mu_{\text{cr}}}\}|)^{1/2}}.$$

Далее, пользуясь аналитичностью функций $\tilde{h}_1^+(\lambda)$ и $m(\lambda)$ внутри области W_β , а также тем, что

$$\det\{m''(\lambda)|_{\mu_{\text{cr}}}\} \neq 0,$$

приходим к асимптотической формуле (31). Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу условий (3)–(5) на вектор $k(t)$ мы можем перейти к переменным $t' = t/|\ln \beta|$, $v = u/|\ln \beta|$. Тогда экспоненциальный член в формуле (35) будет иметь порядок не больше чем

$$O\left((C(v)\beta^{(1+\beta)})^{t'}(\beta|\ln \beta|)^{t'\sum_{j=1}^d |v_j|}\right),$$

где $C(v)$ – константа, зависящая только от вектора $v \in R^d$, а $\sum_{j=1}^d |v_j| < 1$. Тот же асимптотический вид будет иметь и второе слагаемое в разложении (30). С другой стороны, последнее слагаемое этого разложения имеет порядок $O(\beta^{(2-C_2\beta)t'})$. Следовательно, при всех достаточно малых β , $0 < \beta < \beta_0(d)$, выражение (35) определяет главный член асимптотического выражения для $I_{f,g}(t, k(t))$.

Из этого замечания, а также из (28), (30) и (31) следует формула (6). Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. А. Минлосу за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00064.

Список литературы

- [1] R. A. Minlos. Markov Processes and Related Fields. 1996. V. 2. № 2. P. 263.
- [2] Yu. G. Kondratiev, R. A. Minlos. J. Stat. Phys. (in press).
- [3] В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Линейные операторы в бесконечночастичных системах. М.: Наука, 1994.
- [4] R. A. Minlos, E. A. Zhizhina. J. Stat. Phys. 1996. V. 84. № 1/2. P. 85.
- [5] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Rockner. J. Funct. Anal. 1995. V. 133. P. 10.
- [6] R. Holley, D. Stroock. J. Funct. Anal. 1981. V. 42. P. 29.
- [7] М. В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 8.VIII.1996 г.

Е. А. Zhizhina

ASYMPTOTIC FORMULA FOR CORRELATION DECAY IN THE STOCHASTIC MODEL OF PLANAR ROTATORS AT HIGH TEMPERATURES

We found the asymptotic formula for correlations decay $\langle f_A(x(0)), g_{A+k(t)}(x(t)) \rangle$, when $t \rightarrow \infty$, $k(t) \rightarrow \infty$, $k(t) \in Z^d$, in the stochastic model of planar rotators on a lattice $x(t) = \{x_k(t), k \in Z^d\}$, $t \geq 0$, $x_k(t) \in T^1$ at high temperatures. The basic methods we use are the spectral analysis of the Markov semigroup generator and the saddle-point method.