Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, В. А. Лазарев, Возмущение двухсолитонного решения уравнения Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 92–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:57:55

Л. А. Калякин*, В. А. Лазарев*

ВОЗМУЩЕНИЕ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

В задаче о возмущении уравнения Кортевега–де Фриза выписаны уравнения модуляции параметров двухсолитонного решения, которые описывают медленную деформацию амплитуд и сдвигов фаз. Показано, что сдвиг фазы медленного солитона зависит от деформации амплитуды быстрого солитона.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется задача о возмущении уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$\partial_t u + L[u] \equiv u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F[u], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

с двухсолитонными начальными данными в главном члене асимптотики

$$u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = U(x; B_0, S_0) + \varepsilon v(x). \quad (1.2)$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр; оператор возмущения $F[u]$ – гладкая функция от конечного числа производных по x ; $F[0] = 0$. Функция начального возмущения $v(x)$ предполагается гладкой и быстроубывающей на бесконечности.

Невозмущенное решение (при $\varepsilon = 0$) имеет вид двухсолитонного потенциала $U(x; B, S)$. В качестве параметров удобно взять амплитуды $B = \{\beta_1, \beta_2\}$ и сдвиги фаз $S = \{s_1, s_2\}$ отдельных солитонов, на которые распадается это решение в своей асимптотике на бесконечности (см. [1]):

$$U(x; B, S) = \sum_{n=1}^2 2\beta_n^2 \operatorname{ch}^{-2}(\beta_n x - s_n) + O(\exp(-\delta(|x| + t))), \quad \delta = \operatorname{const} > 0. \quad (1.3)$$

Здесь $s_n = 4\beta_n^3 t + s_{n0}$, $\beta_n = \beta_{n0}$ (при $\varepsilon = 0$); $s_{n0}, \beta_{n0} = \operatorname{const}$; $\beta_{10} > \beta_{20} > 0$.

Как известно, проблемы построения формального асимптотического решения (ФАР) при $\varepsilon \rightarrow 0$ связаны с большим промежутком времени $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Возмущение односолитонного решения было предметом исследования многочисленных работ [2–7], см. также [8]. Схема построения ФАР, обобщающая метод Крылова–Боголюбова, была указана в [9] для общего случая с N -солитонным потенциалом. Принципиальное отличие от односолитонного случая заключается в дополнительных сдвигах фаз, которые обнаруживаются в медленных солитонах. Эти сдвиги фаз порядка $O(1)$ возникают

* Институт математики с ВЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: klen@imat.rb.ru, ken@imat.rb.ru

из-за взаимодействия с “хвостами” (членами порядка $O(\varepsilon)$) всех более быстрых солитонов. Такое влияние малой поправки $O(\varepsilon)$ на члены порядка $O(1)$ объясняется длительным временем взаимодействия, имеющим порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

Для простоты мы ограничиваемся здесь двухсолитонным случаем. Основной целью работы является определение для второго солитона дополнительного сдвига фазы порядка $O(1)$, который возникает из-за взаимодействия с хвостом первого солитона. Для вычислений необходим аккуратный анализ асимптотики в секторе хвоста. Для этого используются формулы для первой поправки, приведенные в [10, 11]. Однако они нуждаются в уточнении. Такое уточнение сводится к появлению множителя $\exp(\varepsilon t \partial_u F[0])$ и оказывается существенным в случае общего возмущения при $\partial_u F[0] \neq 0$.

Помимо первой поправки для определения полного сдвига фазы порядка $O(1)$ требуется анализ второй поправки ФАР. Другого способа конструирования главного члена ФАР для нелинейных задач нет даже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому под ФАР здесь понимается выражение $u_{\text{as}}(x, t; \varepsilon)$, которое при подстановке в исходные уравнения обеспечивает малую невязку ($\varepsilon^{1+\delta}$), $\delta > 0$, равномерно для большого промежутка времени $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Такое выражение конструируется в виде отрезка степенного ряда

$$u_{\text{as}}(x, t; \varepsilon) = U(x; B, S) + \varepsilon V(x, t; \varepsilon) + \varepsilon^2 W(x, t; \varepsilon). \quad (1.4)$$

Неизвестными являются функции V, W и вектор-функции солитонных параметров B, S , для которых с использованием подхода Крылова–Боголюбова строятся свои асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} B(\tau; \varepsilon) &= B^0(\tau) + \varepsilon B^1(\tau) + o(\varepsilon), & \tau &= \varepsilon t, \\ S(\tau; \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} S^0(\tau) + S^1(\tau) + o(1), & \varepsilon &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Как видно из (1.4), (1.5), для идентификации главного члена ФАР требуется определить вектор-функции $B^0, S^0, S^1(\tau)$. Помимо этого, требуются первые поправки к амплитудам $B^1(\tau)$, которые участвуют в определении сдвигов фаз $S^1(\tau)$. Основой для нахождения этих медленно меняющихся функций является

СЕКУЛЯРНОЕ УСЛОВИЕ. *Поправка в ФАР мала: $\varepsilon V + \varepsilon^2 W = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$.*

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует такое значение $\tau_0 > 0$, что при всех $t \in [0, \tau_0 \varepsilon^{-1}]$ можно построить ФАР $u_{\text{as}}(x, t; \varepsilon)$ в виде (1.4), которое обладает следующими свойствами:*

1. *При подстановке ФАР в уравнения (1.1), (1.2) получается невязка, которая ведет себя как $O(\varepsilon^{1+\delta})$, $\delta > 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t .*
2. *Главный член ФАР представляется двухсолитонным потенциалом*

$$u_{\text{as}}(x, t; \varepsilon) = U(x; B, S) + O(\varepsilon^{2/9}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \tau_0 \varepsilon^{-1}]. \quad (2.1)$$

3. Параметры $B = \{\beta_1, \beta_2\}(\tau, \varepsilon)$, $S = \{s_1, s_2\}(\tau, \varepsilon)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\partial_\tau \beta_j = \alpha_j^0(B, S) + \varepsilon \alpha_j^1(B, S), \quad (2.2)$$

$$-\beta_j^2 \partial_\tau (s_j / \beta_j) + 4\beta_j^4 / \varepsilon = r_j^0(B, S). \quad (2.3)$$

Правые части α_j , r_j в этих уравнениях определяются в силу секулярного условия соотношениями (3.5), (3.7) (см. ниже раздел 3).

4. Решение уравнений (2.2), (2.3) с начальными условиями $B, S|_{\tau=0} = B_0, S_0$ имеет асимптотическое разложение (1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. С учетом формул (3.5), (3.7) уравнения (2.2), (2.3) выглядят довольно устрашающе. При построении асимптотического разложения (1.5) задача несколько упрощается. В частности, нелинейности могут встретиться лишь в скалярных уравнениях для главных членов амплитуд $\beta_j^0(\tau)$. Конечный промежуток $[0, \tau_0]$, на котором разрешимы эти уравнения, определяет значение τ_0 . Вычисления сдвигов фаз в членах порядка единицы требуют значительных усилий. Зависимость сдвига фазы второго солитона $s_2^1(\tau)$ от деформации амплитуды первого солитона $\beta_1^0(\tau)$ видна из структуры уравнения (2.3) с учетом (3.5), (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Сдвиги фаз в членах s_j^1 порядка единицы зависят от начального возмущения $\varepsilon v(x)$ порядка $O(\varepsilon)$. Такая неустойчивость связана с ляпуновской неустойчивостью солитонов, для которых имеется лишь устойчивость по форме. Подобная ситуация характерна для многих нелинейных задач (см. [12]).

3. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ФАР

Как в любом методе двухмасштабных разложений, построение ФАР сводится к выполнению двух процедур. В первой решаются задачи в быстрых переменных (x, t) . Такими задачами здесь являются либо уравнение КдФ для U , либо линеаризованные уравнения (ЛКдФ) для последующих поправок V, W с соответствующими начальными данными:

$$[\partial_t + L(U) - \varepsilon F_0]V = f, \quad [\partial_t + L(U) - \varepsilon F_0]W = g. \quad (3.1)$$

Правые части определяются через предыдущие приближения с использованием нелинейного оператора $F[u]$ и его первой вариации:

$$\begin{aligned} f(x; B, S) &= F[U(x; B, S)] + 2\partial_x \sum_{n=1}^2 [\alpha_n^0 \Phi_n^+(x; B, S) + r_n^0 \Phi_n^-(x; B, S)], \\ g(x, t; \varepsilon) &= \delta F[U]V - F_0 V - 3\partial_x (V)^2 - \hat{\partial}_\tau V + \\ &+ 2\partial_x \sum_{n=1}^2 [\alpha_n^1 \Phi_n^+(x; B, S) + r_n^1 \Phi_n^-(x; B, S)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Усеченная производная $\hat{\partial}_\tau$ представляет собой разность производных по τ при возмущенных и невозмущенных солитонных параметрах [10]. Ее значение на потенциале

$U(x; B, S)$ определяет ту часть слагаемых, которые входят с множителями α_n, r_n ; функции $\partial_x \Phi_n^\pm$ представляют собой производные этого потенциала по параметрам B, S (см. ниже). В общем случае $\hat{\partial}_\tau$ вычисляется по формуле

$$\hat{\partial}_\tau = (\partial_\tau B) \partial_B + \left[\partial_\tau S - \frac{4}{\varepsilon} B^3 \right] \partial_S, \quad B^3 = \{\beta_j^3\}.$$

Линеаризованный оператор

$$[\partial_t + L(U) - \varepsilon F_0]V \equiv \partial_t V + 6\partial_x(UV) + \partial_x^3 V - \varepsilon F_0 V$$

содержит слагаемое с малым множителем $\varepsilon F_0 V = \varepsilon \partial_u F[0]V$. Это слагаемое соответствует линейной по u (при $u \rightarrow 0$) части возмущения $\varepsilon F[u]$ и удерживается в левой части соответствующего уравнения (3.1) несмотря на малость. Такая добавка обеспечивает получение правильной асимптотики первой поправки в секторах солитонных хвостов из интегрального представления функции $V(x, t; \varepsilon)$. Влияние этого слагаемого на решение V проявляется в простой форме, поскольку оно исключается из уравнения путем выделения из функции V множителя $\exp(\varepsilon F_0 t)$. Именно этот множитель определяет асимптотическое поведение первой поправки в секторах солитонных хвостов из формул, приведенных в [10, 11].

Имеется другой способ получения такой асимптотики. Поскольку в секторах солитонных хвостов первый ненулевой член ФАР зависит только от медленных переменных $\varepsilon x, \varepsilon t$, то он может быть получен из уравнения (см. [5]) $\partial_\tau V - F_0 V = 0$, $\tau = \varepsilon t$, в которое вырождается (3.1). Зависимость от εx появляется из условий срачивания решений на границах солитонных секторов. Мы здесь не пользуемся этим способом; асимптотика первой поправки во всех секторах извлекается из интегрального представления решения уравнения (3.1).

Возможность явного обращения линеаризованного оператора $\partial_t + L(U)$ играет решающую роль при построении ФАР¹⁾. На каждом шаге задача решается с точностью $O(\varepsilon)$, и все невязки выносятся на следующие шаги. Такой подход представляется достаточно гибким, поскольку в нем заранее не фиксируется анзац для поправок, каждую из которых достаточно найти с точностью $O(\varepsilon)$. В частности, на исходном шаге при подстановке функций $U(x; B, S)$ в уравнение КдФ получается невязка в виде комбинации четырех линейно независимых функций с множителями $\varepsilon \partial_\tau \beta_j, \varepsilon [s_j \partial_\tau \beta_j - \beta_j \partial_\tau s_j] + 4\beta_j^4$, которые для краткости обозначим $\varepsilon \alpha_j, \varepsilon r_j, j = 1, 2$.

Требование асимптотического выполнения уравнения КдФ с точностью $O(\varepsilon)$ сводится к условиям $\alpha_j, r_j = O(1)$. В остальном вектор-функции $\{\alpha_j\} = A, \{r_j\} = R$ остаются неопределенными; на следующих шагах они включаются в правые части линеаризованных уравнений. Неопределенность в параметрах A, R ликвидируется при исключении секулярных (не убывающих) членов в поправках $\varepsilon V, \varepsilon^2 W$. При этом A, R можно отыскивать в виде рядов по степеням ε с коэффициентами, зависящими от B, S :

$$\alpha_j = \alpha_j^0(B, S) + \varepsilon \alpha_j^1(B, S) + \dots, \quad r_j = r_j^0(B, S) + \varepsilon r_j^1(B, S) + \dots \quad (3.3)$$

После нахождения A, R выписываются уравнения для солитонных параметров в форме (2.2), (2.3). Таким образом, задача в быстрых переменных (3.1) отделяется от задачи

¹⁾ Это свойство является следствием интегрируемости уравнения КдФ.

в медленных переменных (2.2), (2.3). Связующим звеном являются вспомогательные параметры $A = \{\alpha_j\}$, $R = \{r_j\}$. Коэффициенты их асимптотического разложения (3.3) входят в правые части уравнений (3.1), как это указано в (3.2).

Для решения линеаризованной задачи применяется метод Фурье с использованием базиса, составленного из квадратов функций Йоста. Выражения для базисных функций можно получить в терминах исходного потенциала (см. [13]):

$$\begin{aligned}\Phi_j^- &= \frac{1}{2\beta_j} \int_{-\infty}^x \partial_{s_j} U(x; B, S) dx, \\ \Phi_j^+ &= 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \partial_{\beta_j} U(x; B, S) dx - s_j \Phi_j^-(x; B, S), \\ \Phi^+ &= [\phi^+(x, k; t, B, S)]^2, \quad \Phi^- = (\Phi^+)^*,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\phi^\pm &= \left[1 - \sum_{n=1}^2 \frac{1}{k + i\beta_n} \frac{1}{a'(i\beta_n)} \phi_n^- \exp(-\beta_n x + s_n) \right] \exp(\pm ik[x + 4k^2 t]), \\ \phi_n^- &= \frac{1}{2} [\Phi_n^-(x; B, S)]^{1/2} = \exp(\beta_n x - s_n) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty, \\ a(k) &= -\frac{(k - i\beta_1)(k - i\beta_2)}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)}.\end{aligned}$$

Эти функции имеют следующую асимптотику при $|x| + t \rightarrow \infty$ в солитонных секторах $|\eta_j| < \infty$, где $\eta_j = \beta_j x - s_j$ (см. [11]):

$$\begin{aligned}\Phi_j^- (x; B, S) &= -\operatorname{ch}^{-2} \eta_j + O(e^{-\delta(|x|+t)}), \quad \delta = \operatorname{const} > 0, \\ \Phi_j^+ (x; B, S) &= -\operatorname{th} \eta_j - \eta_j \operatorname{ch}^{-2} \eta_j + O(e^{-\delta(|x|+t)}), \\ \Phi^\pm (x, k; t, B, S)|_{k=0} &= \operatorname{th}^2 \eta_1 + \operatorname{th}^2 \eta_2 - 1 + O(e^{-\delta(|x|+t)}), \\ \Phi^\pm (x, k; t, B, S) &= \chi_j^\pm(\eta_j, k; B) \exp(\pm 2ik[x + 4k^2 t]) + O(e^{-\delta(|x|+t)}), \\ \chi_j^+ (\eta_j, k; B) &= [c_j + d_j \exp(-\eta_j)/2 \operatorname{ch} \eta_j]^2, \quad \chi_j^- = (\chi_j^+)^*, \\ c_1 &= 1, \quad d_1 = \frac{-2i\beta_1}{k + i\beta_1}, \quad c_2 = \frac{k - i\beta_1}{k + i\beta_1}, \quad d_2 = -\frac{2i\beta_2(k - i\beta_1)}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)}.\end{aligned}$$

В силу этих формул правая часть f имеет схожую с (1.3) асимптотику в j -солитонном секторе:

$$\begin{aligned}f(x; B, S) &= f_j(\eta_j, \beta_j) + O(\exp(-\delta(|x| + t))); \\ f_j(\eta_j; \beta_j) &= F \left[\frac{2\beta_j^2}{\operatorname{ch}^2 \eta_j} \right] - 4\beta_j \alpha_j^0 \frac{1 - \eta_j \operatorname{th} \eta_j}{\operatorname{ch}^2 \eta_j} - 4\beta_j r_j^0 \frac{\operatorname{th} \eta_j}{\operatorname{ch}^2 \eta_j}.\end{aligned}$$

Линеаризованная задача решается методом Фурье, и решение выписывается в явном виде. Например, на первом шаге имеем

$$\begin{aligned} V(x, t; B, S, \varepsilon) = \exp(F_0 \tau) & \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \partial_x \Phi^+(x, k, t; B, S) \widehat{V}(k, t; \varepsilon) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \partial_x \Phi_n^+(x; B, S) V_n^-(\tau; \varepsilon) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \partial_x \Phi_n^-(x; B, S) \times \\ & \left. \times \left[V_n^+(\tau; \varepsilon) + \sum_{p=1}^2 V_p^-(\tau; \varepsilon) \operatorname{sgn}(p - n) \right] \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Специфика базиса (см. [4, 10]) обеспечивает тривиальную структуру уравнений для коэффициентов этого спектрального разложения:

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{V} &= \widehat{f}(k, t; \varepsilon); \\ \varepsilon \partial_\tau V_j^- &= f_j^-(\tau; \varepsilon), \quad \varepsilon \partial_\tau V_j^+ = 8\beta_j^3 V_j^- + f_j^+(\tau; \varepsilon); \\ \widehat{V}(k, t; \varepsilon)|_{t=0} &= \widehat{v}(k), \quad k \in \mathbb{R}; \quad V_j^\pm(\tau; \varepsilon)|_{\tau=0} = v_j^\pm, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений представляют собой проекции функции f на соответствующие базисные функции

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k, t; \varepsilon) &= \exp(-F_0 \tau) \langle f(x; B, S) \Phi^-(k, x, t; B, S) \rangle, \quad k \in \mathbb{R}, \\ f_j^\pm(\tau; \varepsilon) &= \exp(-F_0 \tau) \langle f(x; B, S) \Phi_j^\pm(x; B, S) \rangle, \quad \tau = \varepsilon t, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь и далее используется обозначение для интеграла

$$\langle u \rangle = \int_{\mathbb{R}} u \, dx.$$

Аналогично решается задача для второй поправки W .

Легко видеть, что в общем случае решение линеаризованного уравнения содержит растущие (секулярные) члены, которые можно представить в виде $O(\varepsilon^{-1})$ и $O(\varepsilon^{-2})$, если решение записывать в переменных x, τ . Исключение таких членов приводит к дополнительным ограничениям на правые части. Эти ограничения выглядят как требования ортогональности к дискретным компонентам базиса. Следует учитывать, что интегральная часть в представлении (3.4) также содержит секулярный член (см. [11]).

Таким образом, секулярное условие приводит к определению параметров $\alpha_j^0, \alpha_j^1, r_j^0$ и, как следствие, к определению правых частей в уравнениях (2.2), (2.3). С учетом асимптотики базисных функций эти параметры выражаются через интегралы от гиперболических функций:

$$\begin{aligned} 4\alpha_j^0 &= \langle F[U_j] \operatorname{ch}^{-2} \eta \rangle - C_j \exp(-\tau/\varepsilon); \quad U_j = 2\beta_j^2 \operatorname{ch}^{-2} \eta; \\ \int_0^\tau 4r_j^0 \exp(-F_0 \theta) \, d\theta &= - \int_0^\tau \left(\left\langle F \left[\frac{2\beta_j^2(\theta)}{\operatorname{ch}^2 \eta} \right] [\operatorname{th} \eta + \eta \operatorname{ch}^{-2} \eta] \right\rangle - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^2 \left\langle F \left[\frac{2\beta_n^2(\theta)}{\operatorname{ch}^2 \eta_n} \right] \operatorname{th}^2 \eta_n \right\rangle [\operatorname{sgn}(j - n) + \operatorname{sgn}(\theta_{nj}(\tau) - \theta)] \right) \exp(-F_0 \theta) \, d\theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Точка разрыва $\theta = \theta_{nj}(\tau)$ определяется из уравнения

$$\int_0^\tau \beta_j^2(\xi) d\xi = \int_0^\theta \beta_n^2(\xi) d\xi.$$

Константы C_j вычисляются через спектральные коэффициенты начального возмущения и через двойной интеграл на невозмущенном потенциале (при $\beta_j = \beta_{j0}$, $s_j = 4\beta_{j0}^3 t + s_{j0}$):

$$C_j = v_j^- + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(F[U] \Phi_j^- + F[U_j] \operatorname{ch}^{-2} \eta \right) \Big|_{\varepsilon=0} dx dt.$$

В конечном итоге эти константы влияют на первые поправки к амплитудам β_j^1 и через них на сдвиги фаз в членах порядка единицы.

ЛЕММА 3.1. *Если параметры α_i^0 , r_i^0 определены из (3.5), то первая поправка ограничена и для нее имеет место асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$, различная в разных секторах полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$:*

1) *в j -солитонном секторе, где $|\eta_j| < \infty$, $\eta_{j-1} \rightarrow -\infty$, $\eta_{j+1} \rightarrow +\infty$:*

$$V(x, t; B, S, \varepsilon) = J_j(\eta_j; B, \tau) + O(\varepsilon^{1/3}) + O(\exp(-\delta(|x| + t)));$$

2) *в j -секторе хвоста, где $\eta_j \rightarrow -\infty$, $\eta_{j+1} \rightarrow +\infty$:*

$$V(x, t; B, S, \varepsilon) = T_j(\xi; B) + O(\varepsilon^{1/3}) + O(\exp(-\delta(|x| + t))), \quad \xi = \varepsilon x;$$

3) *в секторе обрыва солитонных хвостов, где $\eta_2 \rightarrow -\infty$:*

$$J(x, t; B, S, \varepsilon) = J_0(\eta_3; B) + O(\varepsilon^{1/3}) + O(t^{-1/3}), \quad \eta_3 = x/t^{1/3}.$$

Эта асимптотика гладкая и равномерная по x , t в широком слое $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon^{\alpha-1} \leq t \leq \tau_0 \varepsilon^{-1}$, $\forall \alpha \in (0, 2/3)$, дифференцируемая по параметрам B , S (с учетом $\eta_j = \beta_j x - s_j$).

Коэффициенты асимптотического разложения определяются через исходные данные из цепочки формул:

$$\begin{aligned} J_0(\eta; B) &= I_0(\eta) \sum_{n=1}^2 \hat{f}_n(0, 0) / 8\beta_n^2(0), \\ J_1(\eta; B, \tau) &= I_1(\eta; B, \tau), \\ J_2(\eta; B, \tau) &= I_2(\eta; B, \tau) + \chi_2^+(\eta, 0; B) \hat{f}_1(0, \theta_{12}) / 4\beta_1^2(\theta_{12}) + \\ &\quad + \partial_x (1/8i\beta_1^2(\theta_{12})) \partial_k \chi_2^+(\eta, k; B) \hat{f}_1(k, \theta_{12})|_{k=0}, \\ T_j(\xi; B) &= \sum_{n=1}^j \hat{f}_n(0, \theta_n(\xi)) / 4\beta_n^2(\theta_n(\xi)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$I_j(\eta; B, \tau) = \frac{\beta_j(\tau)}{16\pi} \partial_\eta \int \frac{dk}{(k+0)^2} \frac{\chi_j^+(\eta, k; B)}{\beta_j^2(\tau) + k^2} \hat{f}_j(k, \tau) \exp(2ik\eta/\beta_j(\tau)).$$

Функции $\theta_n(\xi)$ определяются уравнениями

$$\xi = \int_0^{\theta_n} 4\beta_n^2(\rho) d\rho;$$

$I_0(\eta)$ является первообразной функции Эйри:

$$I_0(\eta) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} \sin(\eta z + z^3).$$

Доказательство леммы схоже с приведенным в [10] для односолитонного случая. Детали доказательства содержатся в [11].

Во второй поправке, так же как и на первом шаге, секулярные члены порядка $O(\varepsilon^{-2})$ могут появиться лишь из-за неубывания коэффициента $g_j^-(\tau, \varepsilon)$. Требование их исключения приводит к следующему выражению для α_j^1 :

$$4\alpha_j^1 = \left\langle \left(\delta F[U_j]V_j - F_0 V_j - 3\partial_x (V_j)^2 - \hat{\partial}_\tau V_j \right) \text{ch}^{-2} \eta \right\rangle, \quad \eta = \beta_j x - s_j. \quad (3.7)$$

Вкладом поправки V здесь являются лишь функции $V_j = \exp(F_0 \tau) J_j(\eta, B, \tau)$, определенные на основе (3.6). Они представляют собой неубывающие члены асимптотического разложения первой поправки в солитонных секторах (см. [11]).

При таком выборе α_j^1 вторая поправка W не имеет других секулярных членов порядка $O(\varepsilon^{-2})$. Это обеспечивается структурой правой части g (из (3.2)), которая имеет убывающую асимптотику в секторах солитонных хвостов. В [10] приведена оценка для W , соответствующая такой правой части. Отметим, что без выделения из g линейного члена возмущения $-\partial_u F[0]V$ появляются дополнительные секулярные слагаемые порядка $O(\varepsilon^{-2})$ и построение ФАР оказывается невозможным. Таким образом справедлива

ЛЕММА 3.2. *Если параметры α_j^1 определены из уравнения (3.7), то для второй поправки справедлива оценка*

$$|\varepsilon^2 W(x, t; \varepsilon)| = O(\varepsilon^{2/9}).$$

Полученные таким образом в (3.5), (3.7) правые части уравнений (3.2), (3.3) позволяют определить солитонные параметры $\beta_j^0, \beta_j^1, s_j^0$. Локальная разрешимость соответствующей задачи Коши $B, S|_{\tau=0} = B_0, S_0$ на некотором конечном промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$ равномерно по ε не вызывает сомнения. Поскольку в этой задаче малый параметр фактически входит регулярным образом, то можно построить асимптотическое разложение решений $B(\tau, \varepsilon), S(\tau, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в форме (1.5). Все это обеспечивает определение главного члена ФАР (2.1).

В уравнении для первой поправки к амплитуде $\beta_2^1(\tau)$ обнаруживается зависимость от деформации амплитуды первого солитона, что видно из структуры функции J_j в (3.6). Подобная зависимость от переднего солитона имеется и в уравнении для сдвига фазы s_j^1 . Она проявляется как через поправки к амплитудам, так и через структуру правой части r_j^0 .

Чтобы закончить доказательство теоремы, приведем оценку для невязки в уравнении. Оценка оставшейся части второй поправки $\varepsilon^2 W = O(\varepsilon^{2/9})$ обеспечивает выполнение секулярного условия с точностью $O(\varepsilon^{2/9})$. Невязка, которая возникает в уравнении (1.1) при подстановке такого ФАР, имеет порядок $O(\varepsilon^{1+2/9})$. Отличия от односолитонного потенциала здесь не играют роли. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Предъявленная конструкция для поправочного члена ФАР $\varepsilon V + \varepsilon^2 W$ не единственна. Поправка определяется с точностью до решений однородного линейаризованного уравнения с произвольными коэффициентами, от которых требуется лишь обращение в нуль при $\tau = 0$. Однако весь остающийся произвол не влияет на сдвиги фаз в главном члене порядка $O(1)$ [14].

В случае конкретных возмущений коэффициенты уравнений (2.2), (2.3) вычисляются в явном виде через исходные данные.

4. ПРИМЕРЫ

Принципиальное значение имеют формулы, описывающие деформацию сдвигов фаз

$$s_j(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \beta_j^0 \int_0^\tau 4(\beta_j^0(\xi))^2 d\xi + \beta_j^0 \int_0^\tau 8\beta_j^0 \beta_j^1(\xi) d\xi + \hat{s}_j(\tau) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Через $\hat{s}_j$ здесь обозначены слагаемые порядка единицы, которые не зависят от поправок к амплитудам β_j^1 .

В зависимости от структуры возмущений деформация солитонных параметров в главных членах асимптотического разложения описывается следующими формулами:

1)

$$\begin{aligned} \beta_j^0(\tau) &= \beta_{j0} \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma\tau\right), \quad j = 1, 2, \quad \hat{s}_1(\tau) = \frac{1}{2} + \left(s_{10} - \frac{1}{2}\right) \frac{\beta_1^0(\tau)}{\beta_{10}}, \\ \hat{s}_2(\tau) &= \frac{1}{2} + \left(s_{20} - \frac{1}{2}\right) \frac{\beta_2^0(\tau)}{\beta_{20}} - \frac{8\gamma\beta_2^0(\tau)}{3} \int_0^\tau \sqrt{\frac{(\beta_1^0(\rho))^3}{(\beta_1^0)^5(\theta_{12}(\rho))}} d\rho \end{aligned}$$

при $F[u] = -\gamma u$, $\gamma = \text{const}$;

2)

$$\begin{aligned} \beta_j^0(\tau) &= \sqrt{15}\beta_{j0}(15 + 16\alpha\beta_{10}^2\tau)^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \\ \hat{s}_1(\tau) &= -1 + (s_{10} + 1) \frac{\beta_1^0(\tau)}{\beta_{10}}, \\ \hat{s}_2(\tau) &= -1 + (s_{20} + 1) \frac{\beta_2^0(\tau)}{\beta_{20}} - 2\left(1 - \frac{\beta_2^0(\tau)}{\beta_{20}}\right) \frac{\beta_{10}}{\beta_{20}} \end{aligned}$$

при $F[u] = \alpha u_{xx}$, $\alpha = \text{const} > 0$.

Для восстановления полного сдвига фазы (4.1) в неубывающих членах асимптотики по ε необходимы выражения для первых поправок к амплитудам β_j^1 . В общем случае уравнения для β_j^1 следуют из (2.2) с учетом (3.7):

$$4\frac{d}{d\tau}(\beta_j^0\beta_j^1) - 4R_j(\tau)\beta_j^0\beta_j^1 = D_j(\tau), \quad \beta_j^1(\tau)|_{\tau=0} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_j &= \beta_j \left\langle \left(\delta F[U_j^0] \text{ch}^{-2} y \right) \text{ch}^{-2} y \right\rangle, \\ D_j(\tau) &= \beta_j \left\langle \left(\delta F[U_j^0] V_j - F_0 V_j - 3\partial_x (V_j)^2 - \hat{\partial}_\tau V_j \right) \text{ch}^{-2} y \right\rangle; \\ U_j^0 &= 2(\beta_j^0)^2 \text{ch}^{-2} y, \quad y = \beta_j x - s_j. \end{aligned}$$

В частных случаях коэффициенты $R_j(\tau)$ легко вычисляются. При $F = -\gamma u$ имеем $R_j = -4\gamma/3$; при $F = \alpha u_{xx}$ получается $R_j = (16/15)\alpha\beta_j^{02}(\tau)$.

Правые части в уравнениях (4.2) зависят от первой поправки V . При этом вместо точного представления функции V можно использовать ее асимптотики в солитонных секторах. Эти асимптотики оказываются различными для разных возмущений и в разных секторах:

при $F[u] = -\gamma u$

$$\begin{aligned} V_1 &\approx \frac{-\gamma}{6\beta_1^0} \left(1 - \operatorname{th} \eta_1 - 2 \left[1 + \eta_1 - \operatorname{th} \eta_1 \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{24} + \eta_1 + \eta_1^2 \right) \right] \operatorname{ch}^{-2} \eta_1 \right), \\ V_2 &\approx \frac{-\gamma}{6\beta_2^0} \left(1 - \operatorname{th} \eta_2 - 2 \left[1 + \eta_2 - \operatorname{th} \eta_2 \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{24} + \eta_2 + \eta_2^2 \right) \right] \operatorname{ch}^{-2} \eta_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\gamma \exp(-\gamma(\tau - \theta_{12}(\tau)))}{3\beta_1^0(\theta_{12}(\tau))} (\operatorname{th}^2 \eta_2 + [2 \operatorname{th} \eta_2 - 1] \operatorname{ch}^{-2} \eta_2); \end{aligned}$$

при $F[u] = \alpha u_{xx}$, $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} V_1 &\approx \frac{4\beta_1^0}{15} \left(1 - \operatorname{th} \eta_1 - \left[2 - \eta_1 - \operatorname{th} \eta_1 \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{24} + 2\eta_1 - \frac{\eta_1^2}{2} \right) \right] \operatorname{ch}^{-2} \eta_1 \right), \\ V_2 &\approx \frac{4\beta_2^0}{15} \left(1 - \operatorname{th} \eta_2 - \left[2 - \eta_2 - \operatorname{th} \eta_2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{24} + 2\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2} \right) \right] \operatorname{ch}^{-2} \eta_2 \right) + \\ &\quad + \frac{8\alpha\beta_1^0(\theta_{12}(\tau))}{15} (\operatorname{th}^2 \eta_2 + [2 \operatorname{th} \eta_2 - 1] \operatorname{ch}^{-2} \eta_2). \end{aligned}$$

Эти асимптотические формулы имеют место для не слишком малых времен $\tau > O(\varepsilon^\delta)$, $\forall \delta > 0$. Оценки остатков приведены в [11].

Используя эти асимптотики для вычисления правых частей уравнений (4.2), можно выписать первые поправки для амплитуд в конкретных примерах. Формулы для них во втором солитонном секторе выглядят достаточно сложными. Так, при $F[u] = -\gamma u$ имеем

$$\begin{aligned} \beta_1^1(\tau) &\approx \frac{\gamma}{72} \left(\frac{1}{(\beta_1^0)^2} - \frac{\beta_1^0}{\beta_{10}^3} \right) + \frac{C_1\beta_1^0}{4\beta_{10}}, \\ \beta_2^1(\tau) &\approx \beta_2^0(\tau) \left\{ \frac{\gamma}{72} \left(\frac{1}{(\beta_2^0)^3} - \frac{1}{\beta_{20}^3} \right) - \frac{2\gamma}{\beta_{10}\beta_{20}^2} [(\beta_1^0)^{-5/3}(\theta_{12}(\tau)) - \beta_{10}^{-5/3}] + \right. \\ &\quad + \frac{\gamma K_1 p^3}{(\beta_{10}^2 - \beta_{20}^2)^2} \left[\left(\frac{\beta_1^0(\theta_{12}(\tau))}{\beta_1^0(\tau)} \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{32\gamma p^2}{35} \left(\frac{\sqrt{\beta_1^0(\tau)}}{\beta_1^0(\theta_{12}(\tau))} - \frac{1}{\sqrt{\beta_{10}}} \right) + \\ &\quad \left. + K_2 \gamma^2 \int_0^\tau \frac{(\beta_1^0)^{3/2}(\rho)}{(\beta_1^0)^{5/2}(\theta_{12}(\rho))} \frac{d\rho}{(\beta_2^0)^2(\rho)} + \frac{16\gamma^2 p^2}{45} \int_0^\tau \frac{\beta_1^0(\rho) d\rho}{(\beta_1^0)^4(\theta_{12}(\rho))} + \frac{C_2\beta_2^0}{4\beta_{20}} \right\}, \end{aligned}$$

где $K_1 \approx 0.154$, $K_2 \approx -0.25$, $p = \beta_{10}/\beta_{20}$.

В случае $F[u] = \alpha u_{xx}$, $\alpha > 0$ получаются выражения

$$\begin{aligned}\beta_1^1(\tau) &\approx \frac{8\alpha}{45} \left[1 - \frac{(\beta_1^0)^3(\tau)}{\beta_{10}^3} \right] + C_1 \frac{(\beta_1^0)^3}{4(\beta_{10})^3}, \\ \beta_2^1(\tau) &\approx \alpha \left(\frac{8}{45} - \frac{p}{9} \right) \left(1 - \frac{\beta_{20}^3}{(\beta_2^0)^3(\tau)} \right) + \frac{\alpha}{\beta_2^0(\tau)} \left(\frac{32p^2}{525} - K_1 \right) \left(\frac{\beta_{20}^2}{(\beta_2^0)^2(\tau)} - 1 \right) + \\ &\quad + \frac{p\alpha}{\beta_2^0(\tau)} \left(\frac{8}{5} - \frac{p^2}{3} + K_2 \right) \left(\frac{\beta_{20}}{\beta_2^0(\tau)} - 1 \right) + C_2 \frac{(\beta_2^0)^3}{4(\beta_{20})^3},\end{aligned}$$

где $K_1 \approx 0.088$, $K_2 \approx -0.176$, $p = \beta_{10}/\beta_{20}$.

Поправки к амплитудам, выписанные здесь с точностью до экспоненциально малых членов $O(\exp(-\tau/\varepsilon))$, обеспечивают окончательное определение сдвигов фаз в неубывающих членах асимптотики (4.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00501).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] В. И. Карпман, Е. М. Маслов. ЖЭТФ. 1977. Т. 73. № 2. С. 537.
- [3] Е. М. Маслов. ТМФ. 1980. Т. 42. С. 362.
- [4] А. Ньюэлл. Обратное преобразование рассеяния. В кн.: Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 193.
- [5] А. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [6] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. УМН. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 63.
- [7] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. Сибирский матем. журнал. 1983. Т. 24. С. 172.
- [8] И. М. Кричевер. Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. С. 37.
- [9] А. М. Ильин, Л. А. Калякин. Доклады РАН. 1994. Т. 336. С. 595.
- [10] Л. А. Калякин. ТМФ. 1992. Т. 92. С. 62.
- [11] Л. А. Калякин. Матем. заметки. 1995. Т. 58. С. 204.
- [12] В. П. Маслов. УМН. 1986. Т. 41. Вып. 6. С. 19.
- [13] Е. А. Христов. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1548.
- [14] Л. А. Калякин. Асимптотическая корректность задачи о возмущении солитона Кортевега-де Фриза. В кн.: Асимптотики и симметрии в нелинейных динамических системах. Ред. Л. А. Калякин. Уфа: ИМсВЦ РАН, 1995. С. 38.

Поступила в редакцию 17.IV.1996 г.,
после доработки 17.II.1997 г.

L. A. Kalyakin, V. A. Lazarev

PERTURBATION OF THE TWO-SOLITON SOLUTION OF THE KDV EQUATION

The Cauchy problem for the perturbed Korteweg-de Vries equation with the two-solitons initial data is considered. Differential equations for the slow deformation of the parameters, namely amplitudes and phase shifts, are derived. It is shown that the phase shift of the slow soliton depends on the deformation of the fast soliton. For some perturbations the slow deformations of the parameters are obtained in the explicit form.