Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Крюков, Некоммутирующие интегралы движения квантового уравнения синус-Гордон, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:48:49

С. В. Крюков*

НЕКОММУТИРУЮЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

Рассмотрено фермионное представление для интегралов движения уравнения синус-Гордон. Вычислена алгебра, которую образуют некоммутирующие интегралы движения. Обсуждается связь интегралов движения с представлениями $su(2)$ -алгебры и алгеброй Вирасоро. Построены сохраняющиеся токи.

ВВЕДЕНИЕ

Задача поиска симметрии квантовых интегрируемых теорий, позволяющая классифицировать состояния теории по представлениям этой симметрии, пока остается нерешенной. Поэтому заслуживают внимания попытки поиска интегралов движения, которые не находятся в инволюции. В недавней работе [1] нами были обнаружены примеры некоммутирующих интегралов движения для уравнения синус-Гордон, а также найдена некоторая деформация алгебры Вирасоро, построенная из полей b и c (фермионные духи) [2]. При этом параметр деформации имеет смысл спектрального параметра. Используя эту деформацию алгебры Вирасоро, можно построить производящую функцию для интегралов движения. С помощью разложения по спектральному параметру выражения для производящей функции обнаружено, что в разложении присутствуют некоммутирующие интегралы движения.

В настоящей работе продолжено исследование некоммутирующих интегралов движения. Выражение для этих интегралов может быть выписано в терминах полей b и c . В этом представлении легко вычислить коммутатор двух интегралов движения и рассмотреть всевозможные следствия. Алгебра интегралов движения позволяет построить из двух своих генераторов понижающие операторы представления алгебры $su(2)$, что дает возможность классифицировать полученные интегралы движения по конечномерному представлению алгебры $su(2)$ как минимум двумя способами. Другое направление исследования полученных соотношений для коммутатора связано с существованием замкнутой подалгебры, которая совпадает с алгеброй Вирасоро (точнее с положительно-частотной ее частью).

Напомним основные положения работы [3], из которой можно видеть некоторую исключительность значения $c = -2$ (центральный заряд алгебры Вирасоро). Квантовая теория уравнения синус-Гордон имеет более богатую структуру, чем классическая

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: kryukov@itp.ac.ru

теория. Например, при определенном значении константы связи число сохраняющихся интегралов движения сильно увеличивается. При $\beta^2 \hbar = 2$ или $\hbar' = 1/2$ (обозначения см. в [3]) интегралом движения является функционал от $L^+(z) = :u^2(z):$. Большинство из этих интегралов не коммутируют друг с другом. В теории Колемана [4] квантового уравнения синус-Гордон это соответствует значению $\beta_c^2 = 4\pi$, а сама система эквивалентна свободному массивному дираковскому фермиону. Для дальнейших рассуждений введем следующее поле:

$$\mathcal{L}(z) = \hbar' \left(L^+(z) + \frac{1-c}{24} \right) = \frac{1}{2} :u^2(z): + i \left(\frac{1}{2} - \hbar \right) Du(z).$$

Фурье-компоненты $\mathcal{L}(z)$ образуют алгебру Виасоро с центральным зарядом c . Коммутативная подалгебра алгебры Виасоро является алгеброй коммутирующих интегралов движения квантовых уравнений синус-Гордон, Кортевега–де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. В [3] были вычислены несколько первых квантовых интегралов движения, выраженных через генераторы алгебры Виасоро $\mathcal{L}(z)$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint \frac{dz}{z} \langle \mathcal{L}(z) \rangle, \\ I_3 &= \oint \frac{dz}{z} \langle \mathcal{L}^2(z) \rangle, \\ I_5 &= \oint \frac{dz}{z} \langle \mathcal{L}^3(z) \rangle + \frac{\hbar'}{12} (c+2) \langle (D\mathcal{L})^2 \rangle, \\ I_7 &= \oint \frac{dz}{z} \langle \mathcal{L}^4(z) \rangle + \frac{\hbar'}{3} (c+2) \langle \mathcal{L}(D\mathcal{L})^2 \rangle + \\ &\quad + \frac{\hbar'^2}{180} (c+2) \left(c - \frac{1}{2} \right) \langle (D^2\mathcal{L})^2 \rangle - \frac{\hbar'^2}{24} (c+2) \langle (D\mathcal{L})^2 \rangle. \end{aligned}$$

Из приведенных выражений видно, что при $\hbar' = 1$ (при $c = -2$) имеет место значительное упрощение формул для интегралов движения. Таким образом, уже здесь мы наблюдаем некоторую выделенность теории синус-Гордон с константой связи, соответствующей $c = -2$. Центральным зарядом $c = -2$ соответствует низшему числу ($m = 1$) так называемой унитарной серии представлений алгебры Виасоро ($c = 1 - 6/m(m+1)$, $m = 2, 3, \dots$). В теории Колемана это значение центрального заряда соответствует $\beta_c^2 = 8\pi$. Это максимальное значение константы связи β_c^2 , для которого существует основное состояние.

Теория, которую мы рассматриваем в данной работе, является в некотором смысле дуальной к теории с $\beta_c^2 = 8\pi$ и имеет $\beta_c^2 = 2\pi$. Это связано с существованием двух скрининговых операторов алгебры Виасоро. Рассмотрим подробнее. Скрининговые операторы алгебры Виасоро имеют вид

$$S_{\alpha+} = \int :e^{\alpha\varphi(z)}: dz, \quad S_{\alpha-} = \int :e^{-\frac{2}{\alpha}\varphi(z)}: dz.$$

Оба этих оператора по отдельности выделяют из фоковского пространства (в случае общего положения параметра α) представления алгебры Виасоро с одинаковым $c(\alpha) = 1 - 3 \left(\alpha - \frac{2}{\alpha} \right)^2$.

Поэтому значения константы связи α и $-\frac{2}{\alpha}$ являются двойственными (по отношению к алгебре Вирасоро). В этом смысле двойственны и константы связи $\beta_c^2 = 8\pi$ и $\beta_c^2 = 2\pi$. Для теории синус-Гордон они принципиально различны. Значение $\beta_c^2 = 8\pi$ для теории синус-Гордон не приводит к существованию некоммутирующих интегралов движения, но также является выделенным, поскольку формула для интегралов движения сильно упрощается.

1. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

Уравнение синус-Гордон, как известно, имеет вид

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Существуют скобка Пуассона и гамильтониан, которые позволяют записать уравнение (1.1) в гамильтоновой форме. Рассмотрим это подробнее. Введем координаты светового конуса

$$\sigma^+ = t + x, \quad \sigma^- = t - x.$$

Зададим скобку Пуассона в этих координатах:

$$\{\varphi(\sigma^+, \sigma^-); \varphi(\sigma^{+'}, \sigma^-)\} = \pi \varepsilon(\sigma^+ - \sigma^{+'}), \quad (1.2)$$

где $\varepsilon(\sigma)$ — знаковая функция, нормированная следующим образом:

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ 0, & \sigma = 0, \\ -1, & \sigma < 0. \end{cases}$$

Гамильтониан и оператор импульса в этих координатах имеют вид [5]

$$H = -\frac{m^2}{2\pi\beta^2} \int \cos \beta \varphi(\sigma^+, \sigma^-) d\sigma^+, \quad P = \int (\partial_{\sigma^+} \varphi(\sigma^+, \sigma^-))^2 d\sigma^+. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) с помощью скобки (1.2) и гамильтониана (1.3) может быть записано в гамильтоновой форме. Как известно [5], относительно этой скобки и этого гамильтониана уравнение синус-Гордон является интегрируемой системой.

Выполнив квантование скобки (1.2), т.е. заменив скобку Пуассона коммутатором по стандартным правилам $\{ \} \rightarrow i[\]$, получим

$$[\varphi(\sigma^+, \sigma^-); \varphi(\sigma^{+'}, \sigma^-)] = -i\pi \varepsilon(\sigma^+ - \sigma^{+'}). \quad (1.4)$$

Легко проверить, что с коммутатором (1.4) согласовано следующее операторное произведение полей (при $\sigma^+ \rightarrow \sigma^{+'}$):

$$T(\varphi(\sigma^+, \sigma^-) \varphi(\sigma^{+'}, \sigma^-)) \sim -\log(\sigma^+ - \sigma^{+'}), \quad (1.5)$$

где введено обозначение

$$T(a(\zeta)b(\eta)) = \begin{cases} a(\zeta)b(\eta), & |\zeta| > |\eta|, \\ b(\eta)a(\zeta), & |\zeta| < |\eta|. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем опускать знак хронологического упорядочения T . Действительно, разложив $\varphi(\sigma^+, \sigma^-)$ в ряд Фурье по σ^+ , из (1.4) мы получим коммутатор на фурье-моды, который также может быть вычислен с помощью операторного произведения полей (1.5). Введем вместо σ^+ комплексную координату z . Для вычисления квантовых интегралов движения требуется найти выражение, которое коммутирует с квантовым аналогом (1.3). Поскольку нас интересуют только интегралы движения, мы будем опускать в обозначениях φ вторую координату (σ^-), от которой интегралы движения не зависят. Введем операторы

$$s_1 = \int : \exp i\beta\varphi(z) : dz, \quad s_0 = \int : \exp \{-i\beta\varphi(z)\} : dz.$$

Обозначение $:$ в определении s_1, s_0 — это обычное нормальное упорядочение экспоненты бозонного поля $\varphi(z)$ (поскольку мы квантуем скобку Гейзенберга), определяемое стандартными правилами. Аналогично символ $:$, стоящий при произведении полей b и c , обозначает нормальное упорядочение фермионных мод и определяется стандартными правилами. Таким образом, необходимо искать пересечение ядер операторов s_1, s_0 в пространстве однократных интегралов от дифференциальных полиномов поля $\varphi(z)$, которые и будут локальными квантовыми интегралами движения [6]. Далее рассматривается только значение константы связи $\beta = 1$, $\beta_c^2 = 2\pi$ (заметим, что точка свободных фермионов отвечает $\beta = \sqrt{2}$, $\beta_c^2 = 4\pi$), при которой наша система будет тесно связана с системой фермионных духов [2] (b - c -системой). Мы будем использовать следующие правила бозонизации [2]:

$$b(z) = : \exp i\varphi(z) :, \quad c(z) = : \exp \{-i\varphi(z)\} :.$$

Случай произвольного β по всей видимости является более сложным, поскольку решение для совместного ядра s_1, s_0 не представимо в виде дифференциальных полиномов поля $\varphi(z)$.

2. ДЕФОРМАЦИЯ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО И ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Напомним основные положения работы [1]. Рассмотрим систему фермионных духов или b - c -систему. Операторное произведение для b - и c -полей имеет вид

$$c(z)b(w) \sim \frac{1}{(z-w)}.$$

Выражение для генератора алгебры Вирасоро $T(z) = -:b\partial_z c(z):$ может быть деформировано введением некоторого параметра таким образом, чтобы деформированное выражение по-прежнему принадлежало ядру скринингового оператора

$$s_1 = \int b(z) dz.$$

Выражение для генератора деформированной алгебры Виасоро имеет вид

$$T_q^{n;m}(z) = :b(z)c(q^n z): - :b(z)c(q^m z):.$$

Оно отличается от соответствующего выражения в работе [1] переходом к нормально упорядоченным выражениям для произведения полей b и c . В связи с этим появляется “ c -числовой” член в операторном разложении ниже. Операторное разложение для $T_q^{n;m}(z)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} T_q^{n;m}(z)T_q^{n';m'}(w) = & \frac{T_q^{m'+n;m+m'}(w)}{(z-q^{m'}w)} + \frac{T_q^{n'+m;n'+n}(w)}{(z-q^{n'}w)} + \\ & + \frac{T_q^{n+n';n+m'}(q^{-n}w)}{(q^n z - w)} + \frac{T_q^{m+m';n'+m}(q^{-m}w)}{(q^m z - w)} + \\ & + \frac{zw(q^m - q^n)(q^{n'} - q^{m'})}{(q^n z - w)(q^m z - w)(z - q^{n'}w)(z - q^{m'}w)}. \end{aligned}$$

После действия второго скринингового оператора

$$s_0 = \int c(z) dz$$

получим

$$s_0 T_q^{n;m}(z) = b(q^n z) - b(q^m z). \quad (2.1)$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие q -производной. Определим q -производную следующим образом:

$$D_z f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{(q - q^{-1})z}.$$

Для мероморфной (голоморфной вне $z = 0, \infty$) функции $f(z)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_0 dz D_z f(z) = 0.$$

Таким образом, мы вычислили обычный вычет в точке $z = 0$. Применим эту операцию к обеим частям равенства (2.1), предварительно поделив их на z . В результате получим производящую функцию интегралов движения в следующем виде:

$$\Lambda^{n;m}(q) = \oint_0 \frac{T_q^{n;m}(z)}{z} dz.$$

Таким образом, $\Lambda^{n;m}(q)$ принадлежит пересечению ядер операторов s_0 и s_1 и тем самым коммутирует с гамильтонианом уравнения синус-Гордон. Константа q является спектральным параметром теории. Разлагая $\Lambda^{n;m}(q)$ по q , получим локальные интегралы движения. В этом разложении присутствуют некоммутирующие интегралы движения.

3. ФЕРМИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Анализируя разложение $\Lambda^{n;m}(q)$ по параметру q при $q = 1$, мы можем сделать заключение о виде интегралов движения в терминах полей b и c . Эти выражения могут быть использованы для расчета коммутатора двух локальных интегралов движения.

Легко проверить, что ядру оператора s_1 принадлежит следующий локальный элемент:

$$T_n(z) = :b(z)\partial_z^n c(z):,$$

где n — целое положительное число ($n \geq 1$).

Элементы ядра оператора s_0 могут быть построены из элементов $T_n(z)$ таким образом:

$$Q_{\bar{n}}^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 z^{\bar{n}} T_n(z) dz, \quad (3.1)$$

где $\bar{n} = 0, \dots, n-1$; $n = 1, 2, \dots$. Выражение (3.1) является фермионным представлением для интегралов движения. Бозонная реализация нескольких первых интегралов движения из последовательности (3.1) была приведена в [1].

4. АЛГЕБРА ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

В разделе 3 мы получили фермионное представление для интегралов движения (3.1), используя которое можно найти выражение для коммутатора двух интегралов движения:

$$[Q_{\bar{n}}^n; Q_{\bar{m}}^m] = \sum_{k=0}^{\min\{n;\bar{m}\}} Q_{\bar{n}+\bar{m}-k}^{n+m-k} C(k, n, \bar{m}) - \sum_{k=0}^{\min\{m;\bar{n}\}} Q_{\bar{n}+\bar{m}-k}^{n+m-k} C(k, m, \bar{n}), \quad (4.1)$$

где

$$C(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_2! n_3!}{n_1! (n_2 - n_1)! (n_3 - n_1)!}$$

и $\min\{a; b\}$ — минимальное из чисел a и b . После подстановки значений $\bar{n} = \bar{m} = 0$ в формулу (4.1) получаем

$$[Q_0^n; Q_0^m] = 0.$$

Таким образом, среди множества интегралов движения $\{Q_{\bar{n}}^n\}$ имеется инволютивное подмножество $\{Q_0^n\}$.

Следует сделать замечания по поводу интегралов движения, которые могут быть найдены с помощью квантового метода обратной задачи. Для рассматриваемой модели метод обратной задачи дает только интегралы движения вида Q_0^{2k+1} , где k принимает значения $0, 1, \dots$, причем все они находятся в инволюции. Таким образом, мы обнаружили новые интегралы движения, среди которых имеются также и некоммутирующие. Интегралы движения в методе обратной задачи строятся как разложение по спектральному параметру следа матрицы монодромии $T(\lambda)$, причем доказывается, что

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0.$$

Поэтому в разложении $T(\lambda)$ имеются только коммутирующие интегралы движения. Некоммутирующие интегралы движения получить таким образом нельзя.

5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ $su(2)$

Следует сделать замечание по поводу структуры выражения для интеграла движения $Q_{\overline{m}}^m$. При фиксированном значении m имеется m -кратное вырождение ($\overline{m}$ пробегает значения $0, \dots, m-1$). Это напоминает конечномерные представления $|J, M\rangle$ алгебры $su(2)$, т.е. при заданном значении J (J – спин) имеется $(2J+1)$ -кратное вырождение. Проекция момента m пробегает значения от $-J$ до J . Можно ввести понижающий оператор, действующий следующим образом:

$$E|J, M\rangle = M|J, M-1\rangle.$$

Все элементы $(2J+1)$ -мерного представления $|J, M\rangle$ могут быть получены из старшего вектора $|J, J\rangle$ с помощью понижающего оператора. В нашем случае в выражении для интеграла движения $Q_{\overline{m}}^m$ роль проекции играет $\overline{m}$, роль спина – m . Можно установить более строгое соответствие:

$$J = \frac{(m-1)}{2}, \quad M = -\frac{(m-1)}{2} + \overline{m}.$$

Легко получить из формулы (4.1), что

$$[Q_0^1; Q_{\overline{m}}^m] = \overline{m}Q_{\overline{m}-1}^m.$$

Таким образом, оператор Q_0^1 ($Q_0^1 = P$ – оператор импульса в координатах светового конуса) может быть отождествлен с понижающим оператором. Действие понижающего оператора на элементах представления задано в нашем случае коммутатором. И так, $E_1 = Q_0^1$, а $Q_{\overline{m}}^m$ связаны с векторами представления следующим образом:

$$Q_{m+J}^{2J+1} = |J, M\rangle \frac{\Gamma(J+1+M)}{\Gamma(M+1)},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, и мы используем соотношение

$$\Gamma(z)z = \Gamma(z+1).$$

Существует другой способ классифицировать интегралы движения по представлениям алгебры $su(2)$. Как следует из соотношений (4.1),

$$[Q_0^2; Q_{\overline{m}}^m] = Q_{\overline{m}-1}^{1+m}\overline{m} + Q_{\overline{m}-2}^m\overline{m}(\overline{m}-1).$$

Вспомним также, что $[Q_0^1; Q_{\overline{m}}^m] = \overline{m}Q_{\overline{m}-1}^m$. Введем понижающий оператор

$$E_0 = Q_0^2 - (Q_0^1)^2.$$

Тогда легко проверить, что справедливо соотношение

$$E_0 Q_{\overline{m}}^m = \overline{m} Q_{\overline{m}-1}^{1+m}.$$

Значение спина и проекции здесь определяются по следующим формулам:

$$J = \frac{1}{2} \left[\frac{m + \overline{m} - 1}{2} \right], \quad M = -J + \overline{m}, \quad (5.1)$$

где $[a]$ – целая часть числа a . Для того чтобы сопоставить $Q_{\overline{m}}^m$ и $|J, M\rangle$, будем рассматривать отдельно четные и нечетные m . Для $m = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) легко получить $J = \frac{m + \overline{m} - 1}{4}$, а для $m = 2k$ имеем $J = \frac{m + \overline{m} - 2}{4}$. Будем обозначать через $Q_{\overline{m}}^{(+m)}$ интегралы движения с четным m , $Q_{\overline{m}}^{(-m)}$ – с нечетным m . Тогда получим

$$\begin{aligned} Q_{J+m}^{(+3J+2-m)} &= |J, M\rangle \frac{\Gamma(J+1+M)}{\Gamma(M+1)}, \\ Q_{J+m}^{(-3J+1-m)} &= |J, M\rangle \frac{\Gamma(J+1+M)}{\Gamma(M+1)}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где выражения для J в (5.2) выбираются согласно четности m . Проекция M определяется по формуле (5.1) для соответствующего спина J . Таким образом, интегралы движения могут быть классифицированы по представлению алгебры $su(2)$. Причем существуют два различных способа такой классификации.

6. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И АЛГЕБРА ВИРАСОРО

В этом разделе мы продолжаем изучение коммутатора двух интегралов движения (4.1). Легко показать, что коммутатор двух интегралов движения Q_1^n имеет вид

$$[Q_1^n; Q_1^m] = (n - m) Q_1^{n+m-1}.$$

Здесь следует напомнить, что $n, m > 1$. Введем обозначение $L_n^d = Q_1^{n+1}$. Тогда очевидно, что

$$[L_n^d; L_m^d] = (n - m) L_{n+m}^d, \quad (6.1)$$

т.е. мы получили алгебру Вирасоро как замкнутую подалгебру соотношений (4.1). В действительности мы имеем дело только с некоторой частью алгебры Вирасоро, т.к. $n, m > 0$ в выражении (6.1). Этим же объясняется отсутствие “ c -числового” члена.

Интересно сравнить данное представление с обычным конформным представлением L_{-n}^c :

$$L_{-n}^c \sim \oint_0 dz z^{-n+1} : b \partial_z c(z) :, \quad (6.2a)$$

$$L_{-n}^d \sim \oint_0 dz z : b \partial_z^{n+1} c(z) :, \quad n > 0. \quad (6.2b)$$

В выражении для L_n^c фермионы b и c должны быть голоморфными функциями от z , а в выражении для L_n^d это не обязательно. Чтобы дополнить выражение (6.1) до полной

алгебры Вирасоро, нужно определить действие L_n^d с $n \leq 0$. Как следует из вида L_n^d в (6.2б), необходимо, по-видимому, рассматривать нелокальные интегралы движения.

Выражения (6.2) могут быть формализованы следующим образом. Известно, что алгебра Вирасоро является центральным расширением алгебры векторных полей на окружности, генераторы l_n^c которой могут быть представлены как некоторые дифференциальные операторы от переменной z . Их можно получить из (6.2а) при действии на локальное поле $c(z)$.

Выражение (6.2б) также может быть связано с некоторым дифференциальным оператором l_n^d (при действии на локальное поле $c(z)$), и мы наблюдаем некоторую двойственность ($z \leftrightarrow \frac{d}{dz}$, что является следствием соотношения $[z, \frac{d}{dz}] = 1$):

$$l_n^c = z^{1+n} \frac{d}{dz}, \quad l_n^d = z \frac{d^{1+n}}{dz^{1+n}}.$$

Легко проверить, что l_n^c и l_n^d удовлетворяют выражению (6.1).

7. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ

Как уже упоминалось во введении, в теории, соответствующей точке “свободных фермионов” ($\beta = \sqrt{2}$, $\beta_c^2 = 4\pi$), число интегралов движения резко возрастает и оказывается, что сохраняется целый ток. Функционал $L^+(z) = :u^2(z):$ является сохраняющейся величиной и его фурье-компоненты образуют алгебру Вирасоро с $c = 1$. При рассматриваемом значении константы связи ($\beta_c^2 = 2\pi$, $\beta = 1$) число интегралов движения также возрастает и оказывается, что можно построить сохраняющийся ток. При слиянии двух токов мы будем обнаруживать новые токи, общее количество которых бесконечно. Рассмотрим это подробнее. Легко проверить, что с гамильтонианом модели коммутирует следующее локальное выражение:

$$M(z) = : \partial b \partial c(z) :. \quad (7.1)$$

Оно может также быть переписано в представлении поля $\varphi(z)$ в виде

$$M(z) = : 2(\partial_z \varphi(z))^3 : + \partial_z^3 \varphi(z).$$

Эволюция любой наблюдаемой $A(z, \bar{z})$ по времени $\bar{z}$ определяется, как известно [5], следующим образом:

$$\partial_{\bar{z}} A(z, \bar{z}) = [H, A(z, \bar{z})],$$

где H – квантовый гамильтониан модели, поэтому

$$\partial_{\bar{z}} M(z, \bar{z}) = [H, M(z, \bar{z})] = 0.$$

Таким образом, $M(z, \bar{z})$ является голоморфным квантовым оператором. Появление таких квантовых операторов имеет очень важные следствия. Например, в моделях с таким оператором [7] можно вычислить корреляционные функции, используя сингулярные векторы представлений этих токов, и тем самым получить непертурбативную информацию о теории.

Можно показать, что ток (7.1) является частным случаем более общего сохраняющегося тока

$$M^{i,j}(z) = :\partial^i b(z) \partial^j c(z):, \quad (7.2)$$

где $i, j \in N$.

Вычисление коммутатора двух токов (7.2) является достаточно сложным. Введем определение фурье-компонент тока $M_n^{i,j}$ по следующему правилу:

$$M_n^{i,j} = \oint_0 dz M^{i,j}(z) z^{n+i+j}.$$

Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [M_n^{1,1}, M_m^{1,1}] &= 2(n+2)(M_{n+m}^{1,2} - M_{n+m}^{2,1}) + M_{n+m}^{1,3} - M_{n+m}^{3,1} + \\ &+ c(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где c — некоторая числовая константа центрального расширения. Выражение (7.3) не является явно антисимметричным при перестановке $M_n^{1,1}$ и $M_m^{1,1}$. Это происходит из-за того, что $M_{n+m}^{i,j}$ зависим, т.е. между ними существуют соотношения. Используя эти соотношения, правую часть коммутатора (7.3) можно привести к явно антисимметричному виду. Рассмотрим это подробнее. Используя очевидное соотношение

$$\oint_0 \partial_z M^{i,j}(z) z^{n+i+j+1} = - \oint_0 dz M^{i,j}(n+i+j+1) z^{n+i+j},$$

легко получить

$$M_n^{i+1,j} + M_n^{i,j+1} = -M_n^{i,j}(n+i+j+1). \quad (7.4)$$

Аналогично находится соотношение

$$M_n^{i+2,j} + 2M_n^{i+1,j+1} + M_n^{i,j+2} = (n+i+j+2)(n+i+j+1)M_n^{i,j}. \quad (7.5)$$

Используя соотношения (7.4), (7.5), можно представить коммутатор (7.3) в антисимметричном виде:

$$\begin{aligned} [M_n^{1,1}, M_m^{1,1}] &= (n-m)(n+m+3)M_{n+m}^{1,1} + 2(n-m)M_{n+m}^{1,2} + \\ &+ c(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\delta_{n+m,0}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Из соотношения (7.6) следует, что при коммутировании фурье-компонент токов $M^{1,1}(z)$ возникают компоненты нового тока $M^{1,2}(z)$. Можно вычислить коммутатор фурье-компонент двух токов $M^{i,j}(z)$, $M^{i',j'}(z)$, но привести его к явно антисимметричному виду, используя аналоги соотношений (7.4), (7.5), затруднительно. Следует заметить, что один индекс в определении $M^{i,j}(z)$ может быть исключен с помощью аналогов соотношений (7.4), (7.5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено фермионное представление для некоммутирующих интегралов движения. С помощью фермионного представления вычислен коммутатор двух интегралов

движения. Пользуясь выражением для коммутатора, можно найти инволютивное семейство интегралов движения. Используя выражение для коммутатора, мы получили представление алгебры $su(2)$, элементами которого являются интегралы движения, а понижающие генераторы строятся также из интегралов движения. Понижающий генератор действует на элементах представления как коммутатор. Таким образом, получена классификация найденных интегралов движения в терминах конечномерных представлений алгебры $su(2)$. Обнаружено два различных способа такой классификации. Найдена подалгебра соотношений (4.1), совпадающая с подалгеброй алгебры Вирасоро. Представляется важным исследовать другие подалгебры, а также дополнить соотношения (6.1) до полной алгебры Вирасоро.

Интересно было бы также сопоставление некоммутирующих интегралов движения, найденных в разделе 6, и интегралов движения, обнаруженных в [8].

Кратко напомним основные результаты этой работы. Авторами было показано, что в восьмивершинной модели логарифм угловой трансфер-матрицы является L_0 -генератором алгебры Вирасоро. Это соотношение между угловой трансфер-матрицей и алгеброй Вирасоро – проявление бесконечномерной симметрии, которая присутствует в некритической теории. Некритическая реализация симметрии Вирасоро, следовательно, характеризует явление интегрируемости. В [8] был построен пример таких интегралов движения, которые образуют представление этой некритической алгебры Вирасоро (в скейлинговом пределе восьмивершинной модели) для частного значения тирринговской константы связи. Половина этих интегралов движения является интегралами от локальных плотностей, другая половина нелокальна. Подобный вид и у интегралов движения, найденных в разделе 6. Генераторы алгебры Вирасоро в [8] требуют введения новых членов последовательности интегралов движения. В нашем случае появление интеграла движения $L_n = Q_1^{n+1}$ влечет за собой существование интеграла движения $Q_0^{n+1} = [P, L_n]$, $n > 1$, т.е. таким образом появляются новые интегралы движения, которые на классическом уровне отсутствуют (напомним, что на классическом уровне присутствуют только интегралы движения с нечетным n).

В данной работе обнаружены квантовые сохраняющиеся токи – голоморфные операторы в теории синус-Гордон при фиксированном значении константы связи. Это значение константы связи отвечает (в отличие от $\beta_c^2 = 4\pi$) нетривиальному четырехфермионному взаимодействию в массивной модели Тирринга [4]. Для токов построено представление “свободных полей” (7.2). Это представление можно переписать через бозонные поля, однако использование фермионных полей упрощает вычисление коммутаторов. Вакуум и пространство представления модели также определяются токами (7.2). Следует заметить, что некоммутирующие интегралы движения и связанные с ними сохраняющиеся токи существуют и в других лоренц-инвариантных моделях, таких, например, как модель Жибера–Шабата [9]. Было показано, что существуют 5 различных лоренц-инвариантных квантовых моделей, допускающих интегрируемость, т.е. существование высших нетривиальных квантовых интегралов движения. В таких теориях также были обнаружены сохраняющиеся токи и некоммутирующие интегралы движения. Поэтому данная симметрия является неотъемлемой частью квантовых интегрируемых теорий. Легко получить, что эти сохраняющиеся токи приводят к нетривиальным соотношениям на одновременные корреляционные функции.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант

96-02-17331), International Science Foundation (Grant M6N000), Международной Соросовской программой образования в области точных наук (грант а208-ф), ИНТАС-95-IN-RU-690, CRDF Cooperative grants program (Grant).

Автор благодарен Андре Ле'Клеру за привлечение интереса к работе [8], а также С. Булгадаеву за обсуждение и полезные советы.

Список литературы

- [1] *C. B. Крюков*. Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 5. С. 375.
- [2] *D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 271. P. 93.
- [3] *R. Sasaki, I. Yamanaka*. Virasoro algebra, vertex operator, quantum sine-Gordon and solvable quantum field theory. In: Proc. Kyoto Symp. on Conformal field theory and solvable lattice models, 1986. Adv. Studies in Pure Math. V. 16, 1988. P. 271.
- [4] *S. Coleman*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2088.
- [5] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [6] *B. Feigin, E. Frenkel*. Phys. Lett. B. 1992. V. 276. P. 79.
- [7] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [8] *H. Itoyama, H. Thacker*. Nucl. Phys. B. 1989. V. 320. P. 541.
- [9] *Э. В. Копанев, С. В. Крюков, М. А. Сухоручкин*. ТМФ. 1997 (в печати).

Поступила в редакцию 30.IX.1996 г.,
после доработки 23.XII.1996 г.

S. V. Kryukov

NONCOMMUTATIVE INTEGRALS OF MOTION FOR QUANTUM SINE-GORDON EQUATION

The fermion representation for integrals of motion of quantum sine-Gordon equation is considered. The conservation currents and algebra of integrals of motion are calculated.