Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Кравцова, В. А. Смирнов, Вычисление трехпетлевых диаграмм Фейнмана с помощью четырехмерного интегрирования по частям и дифференциальной перенормировки, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 115–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:11:46

Г. А. Кравцова*, В. А. Смирнов†

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕХПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА С ПОМОЩЬЮ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Четырехмерное интегрирование по частям в сочетании с дифференциальной перенормировкой применяется для вычисления трехпетлевых диаграмм Фейнмана.

1. В работе [1] было продемонстрировано, как четырехмерное интегрирование по частям в совокупности с техникой дифференциальной перенормировки [2–4] и ее инфракрасного аналога ($\tilde{R}$ -операции) может быть использовано для вычисления двухпетлевых фейнмановских диаграмм. В настоящей заметке мы покажем, что этот метод работает и на трехпетлевом уровне и тем самым оказывается конкурентоспособным по отношению к хорошо известному и успешно применяемому на практике методу интегрирования по частям [5] в рамках размерной регуляризации [6].

В следующих двух пунктах мы в качестве примера проведем вычисление типичной скалярной трехпетлевой диаграммы пропагаторного типа, а в заключении сформулируем выводы.

Рис. 1. Базисная двухпетлевая диаграмма с двумя произвольными индексами (а) и типичная трехпетлевая диаграмма (б).

2. Рассмотрим сначала базисную двухпетлевую диаграмму с двумя аналитически регуляризованными пропагаторами (рис. 1а):

$$J(\alpha, 1, 1, \beta, 1) = \iint \frac{d^4 k d^4 l}{(p_1^2)^\alpha p_2^2 p_3^2 (p_4^2)^\beta p_5^2}, \quad (1)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: galya@class.mi.ras.ru

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: smirnov@theory.npi.msu.su

где $p_1 = k - q$, $p_2 = l - q$, $p_3 = l$, $p_4 = k$, $p_5 = k - l$.

Для случая, когда $\alpha + \beta \neq 2$, используя четырехмерное интегрирование по частям

$$\iint d^4k d^4l \left(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_4} + \frac{\partial}{\partial p_5} \right) p_5 I(\alpha, 1, 1, \beta, 1) = 0, \quad (2)$$

где $I(\alpha, 1, 1, \beta, 1)$ – подынтегральное выражение в (1), получаем

$$J(\alpha, 1, 1, \beta, 1) = \frac{1}{2 - \alpha - \beta} \iint d^4k d^4l \left\{ \alpha [I(\alpha + 1, 1, 1, \beta, 0) - I(\alpha + 1, 0, 1, \beta, 1)] + \right. \\ \left. + \beta [I(\alpha, 1, 1, \beta + 1, 0) - I(\alpha, 1, 0, \beta + 1, 1)] \right\}. \quad (3)$$

Интегралы от отдельных слагаемых имеют ультрафиолетовые или инфракрасные расходимости. Прежде чем представить интеграл от суммы как сумму интегралов, можно заблаговременно устранить эти расходимости с помощью дифференциальной перенормировки и ее инфракрасного аналога, что было предложено в [1]. Полученные в результате интегралы вычисляются с использованием перенормированного (и $\tilde{R}$ -нормированного) варианта формул однопетлевого интегрирования: например [1]

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \pi^2 \frac{1}{q^2} (1 + \ln q^2 / \tilde{\mu}^2). \quad (4)$$

В результате получаем известное выражение

$$J(\alpha, 1, 1, \beta, 1) = \frac{\pi^4}{2 - \alpha - \beta} \frac{1}{(q^2)^{\alpha+\beta-1}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(3-\alpha-\beta)} \times \\ \times \left\{ (1-\beta) [\psi(\beta) + \psi(2-\beta) - \psi(3-\alpha-\beta) - \psi(\alpha+\beta-1)] + \{\alpha \leftrightarrow \beta\} \right\}. \quad (5)$$

Соответствующий результат при $\alpha + \beta = 2$ можно получить предельным переходом в (5). Однако возможно использование четырехмерного интегрирования по частям и дифференциальной перенормировки непосредственно при этих значениях параметров исходя из тождества, аналогичного (2), но с дополнительным логарифмом, входящим после производных.

3. Вычислим теперь нашим методом типичную трехпетлевую диаграмму, изображенную на рис. 1б,

$$J(q) = \iiint d^4k d^4l d^4r I(p_1, \dots, p_7). \quad (6)$$

Как и в двухпетлевом случае [1], начнем с интегрирования по частям со вспомогательным логарифмом:

$$\iiint d^4k d^4l d^4r \left(\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_4} \right) p_4 \ln(p_1^2 / \mu^2) I(p_1, \dots, p_7) = 0. \quad (7)$$

В результате исходная диаграмма оказывается выраженной согласно соотношению, изображенному на рис. 2, где расходимости диаграмм в правой части устранены с помощью дифференциальной перенормировки. Как и раньше, эти расходимости устраняются, перед тем как полученный интеграл разбивается на сумму от интегралов.

Рис. 2. Вычисление диаграммы, приведенной на рис. 16.

На рис. 2 точка на линии указывает на вторую степень соответствующего пропагатора, а штрих – на наличие логарифма.

Шесть диаграмм в правой части вычисляются с помощью формулы (5), а также формул однопетлевого интегрирования

$$J_1 = J_2 = 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2}\right) \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (8)$$

$$J_3 = \left\{ 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\mu^2}\right) + 3\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \left(\ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2} + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) + 10\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (9)$$

$$J_4 = \left\{ 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\mu^2}\right) + 3\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \left(\ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2} + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (10)$$

$$J_5 = \left\{ 6\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(\ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + 1 \right) + 20\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (11)$$

$$J_6 = \left\{ 6\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(\ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + 1 \right) + 10\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}. \quad (12)$$

Подставляя эти выражения в (6), приходим к хорошо известному результату [7]

$$J = J_1 - J_2 + J_3 - J_4 + J_5 - J_6 = 20\zeta(5) \frac{\pi^6}{q^2}. \quad (13)$$

4. Рассмотренные примеры показывают, что четырехмерное интегрирование по частям в сочетании с дифференциальными R - и $\tilde{R}$ -операциями оказывается вполне удобным методом вычисления фейнмановских диаграмм. Напомним, что любая трехпетлевая безмассовая пропагаторная диаграмма вычисляется в рамках размерной регуляризации с помощью интегрирования по частям [5] за исключением двух диаграмм, для которых применяются дополнительные методы, например техника полиномов Гегенбауэра в координатном пространстве [7]. Ситуация с применением четырехмерного интегрирования по частям выглядит совершенно аналогично, причем соответствующие выкладки оказываются того же уровня сложности, что и при использовании интегрирования по частям в размерной регуляризации. Однако для применений в теориях с киральной и суперсимметриями явно четырехмерная техника должна оказаться более предпочтительной.

Предлагаемая вычислительная техника сочетается с дифференциальной перенормировкой. Хотя общая проблема совместности этой перенормировочной схемы с калибровочной инвариантностью остается открытой, в случае абелевых теорий существует вариант дифференциальной перенормировки [4], в рамках которой калибровочная инвариантность обеспечивается автоматически,¹⁾ т.е. без “подгонки” конечных контрчленов.

Эта работа поддержана РФФИ, грант 96–01–00654.

Мы благодарны К.Г. Четыркину за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. А. Смирнов. ТМФ. 1996. Т. 108. С. 129.
- [2] D. Z. Freedman, K. Johnson, J. I. Latorre. Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 353; J. I. Latorre, C. Manuel, X. Vilasís Cardona. Ann. Phys. 1994. V. 231. P. 149; V. A. Smirnov. Nucl. Phys. B. 1994. V. 427. P. 325.
- [3] О. И. Завьялов, В. А. Смирнов. ТМФ. 1993. Т. 96. С. 288; О. И. Завьялов. ТМФ. 1994. Т. 98. С. 536; V. A. Smirnov. Z. Phys. C. 1995. B. 67. S. 531.
- [4] V. A. Smirnov. hep-th/9605164; Int. J. Mod. Phys. A. 1997. (in print).
- [5] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov. Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 159.
- [6] G. 't Hooft, M. Veltman. Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189; C. G. Bollini, J. J. Giambiagi. Nuovo Cim. B. 1972. V. 12. P. 20.
- [7] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov. Nucl. Phys. B. 1980. V. 174. P. 345.
- [8] О. И. Завьялов, Г. А. Кравцова, А. М. Маложостов. ТМФ. 1996. Т. 107. С. 64.

Поступила в редакцию 14.II.1997 г.

G. A. Kravtsova, V. A. Smirnov

CALCULATION OF THREE LOOP FEYNMAN GRAPHS BY USING FOUR-DIMENSIONAL INTEGRATION BY PARTS AND DIFFERENTIAL RENORMALIZATION

Four-dimensional integration by parts and differential renormalization technique are applied for computing three loop Feynman graphs.

¹⁾См. также вариант дифференциальной перенормировки в работе [8], где доказаны соотношения, обеспечивающие выполнение тождеств Уорда в квантовой электродинамике для некоторых специальных классов диаграмм.