Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Цхакая, Е. И. Шульман, О вырожденных многомерных законах дисперсии, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 124–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:26:09

Д. Д. Цхакая*, Е. И. Шульман†
**О ВЫРОЖДЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ
ЗАКОНАХ ДИСПЕРСИИ**

Исследуется вырожденность многомерных аналитических в нуле законов дисперсии в предположении, что соответствующая функция вырожденности удовлетворяет условию (3). Доказывается, что вырожденными относительно процесса распада $1 \rightarrow 2$ могут быть только двумерные законы дисперсии $\omega(p, q)$, асимптотика которых при малых p и q имеет вид (28). Показано, что соответствующая функция вырожденности единственна, и найдена ее асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие вырожденных законов дисперсии возникло в теории гамильтоновых волновых систем — гамильтоновых уравнений в частных производных, допускающих в пределе малой нелинейности решение в виде свободных волн [1]. Оказывается, что свойства этих уравнений, например существование дополнительных интегралов движения, полная интегрируемость и интегрируемость по методу обратной задачи рассеяния (МОЗР), тесно связаны с вырожденностью соответствующих законов дисперсии [1–5]. Поэтому перечисление и классификация вырожденных законов дисперсии представляют собой интересную задачу.

В настоящей работе мы рассматриваем вырожденность законов дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ относительно процесса распада $1 \rightarrow 2$:

$$\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2). \quad (1)$$

Вся поверхность в пространстве $\mathbf{k}_1 \cup \mathbf{k}_2$, которую описывает данное уравнение, называется резонансной поверхностью процесса распада $1 \rightarrow 2$ и обозначается $\Gamma^{1,2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ называется вырожденным на заданном классе функций $f(\mathbf{k})$ в точке P резонансной поверхности $\Gamma^{1,2}$, если существует функция $f(\mathbf{k})$, линейно независимая от $\omega(\mathbf{k})$ и компонентов вектора $\mathbf{k}$, которая принадлежит заданному классу функций и удовлетворяет уравнению

$$f(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = f(\mathbf{k}_1) + f(\mathbf{k}_2) \quad (2)$$

в окрестности точки P на $\Gamma^{1,2}$.

*Институт физики Академии наук Грузии, Тбилиси, Грузия

†Центр нелинейных исследований при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

Когда говорят, что закон дисперсии вырожден, и не указывается, в какой точке, то подразумевается, что он вырожден в каждой точке резонансной поверхности.

Задание класса функций вырожденности в этом определении существенно. Так, например, любой аналитический в точке $\mathbf{k} = 0$ и удовлетворяющий условию $\omega(0) = 0$ закон дисперсии невырожден на классе аналитических функций $f(\mathbf{k})$ [2, 4]. Однако на более широком классе функций аналитические законы дисперсии могут быть вырожденными. Пример такого рода впервые был обнаружен в работе [6].

В общем случае невозможно исследовать вырожденность законов дисперсии в произвольной точке на $\Gamma^{1,2}$. Но в некоторых точках анализ упрощается. Одна из таких точек $\mathbf{k}_2 = 0$ (или $\mathbf{k}_1 = 0$) рассматривается в настоящей работе (о вырожденности законов дисперсии в точке $|\mathbf{k}_2| \rightarrow \infty$ см. [7]).

Мы будем рассматривать аналитические в нуле многомерные законы дисперсии. Класс функций вырожденности определим следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(\mathbf{k})$ принадлежит классу допустимых функций, если она удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{k}) &= \sum_{i \geq 1} f_i(t\mathbf{k}), \\ f_i(t\mathbf{k}) &= \sum_{l=0}^{\infty} t^{\alpha_i + l} f_i^{(l)}(\mathbf{k}), \quad |\alpha_i - \alpha_j| \notin N, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3)$$

при $|t| \ll 1$. Здесь $f_i^{(l)}$ – однородные вещественные функции, для которых не существует такой d -мерной области (d – размерность $\mathbf{k}$), где $f_i^{(l)}(\mathbf{k}) \equiv 0$. Кроме того, в двумерном случае потребуем, чтобы функция $f_i^{(0)}(p, \xi p) = p^{\alpha_i} f_i^{(0)}(I, \xi)$, $\alpha_i \in N$, не имела существенно особых точек по ξ .

2. ДВУМЕРНЫЕ ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ

Рассмотрим двумерные законы дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} = (p, q)$. Так как выражение (1) инвариантно относительно добавления к $\omega(\mathbf{k})$ линейных форм от $\mathbf{k}$, то без нарушения общности будем считать, что разложение $\omega(\mathbf{k})$ вблизи $\mathbf{k} = 0$ не содержит линейных по $\mathbf{k}$ членов.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\omega(p, q)$ аналитична по p и q в окрестности $p = q = 0$ и $\omega(0) = 0$. Тогда, для того чтобы $\omega(\mathbf{k})$ была вырождена в точке $\mathbf{k}_2 = 0$ на классе допустимых функций, необходимо, чтобы $\omega(p, q)$ с точностью до линейных преобразований по p и q при $p, q \rightarrow 0$ имела следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= p^2 q + \alpha q^3 + \sum_{n \geq 4} \omega^{(n)}(p, q), \\ \omega^{(n)}(\lambda \mathbf{k}) &= \lambda^n \omega^{(n)}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4)$$

Соответствующая функция $f(\mathbf{k})$ единственна с точностью до умножения на константу и добавления линейных форм от $\omega(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}$ и при малых p, q имеет следующий вид:

$$f(\mathbf{k}) = \frac{q^3}{p^2 - 3\alpha q^2} + \sum_{i \geq 1} q^{i+1} \psi^{(i)}(q/p). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega(\mathbf{k})$ удовлетворяет условиям теоремы, то точка $\mathbf{k}_2 = 0$ принадлежит резонансной поверхности $\Gamma^{1,2}$. При малых $\mathbf{k}_2$ введем следующую параметризацию $\Gamma^{1,2}$:

$$p_2 = \sum_{i \geq 1} t^i P_{2i}(p_1, q_1), \quad q_2 = \sum_{i \geq 1} t^i Q_{2i}(p_1, q_1), \quad |t| \ll 1. \quad (6)$$

Здесь t, p_1 и q_1 — независимые координаты, а функции P_{2i} и Q_{2i} подлежат определению. Для этого подставим (6) в уравнение (1) и, пользуясь малостью t , разложим в ряд по степеням t . Группируя отдельно члены при каждой степени t , получим следующие рекуррентные соотношения для P_{2i} и Q_{2i} :

$$\omega_p P_{2i}(p, q) + \omega_q Q_{2i}(p, q) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \omega_p P_{2i}(p, q) + \omega_q Q_{2i}(p, q) + \sum_{i=2}^n \sum_{s=0}^i \sum_{m_i} \sum_{l_i} \frac{1}{m_1! \dots m_{n+1-i}!} \times \\ & \times \frac{1}{l_1! \dots l_{n+1-i}!} (\omega_{p^s q^{i-s}} - \omega_{p^s q^{i-s}}(0)) (P_{21})^{m_1} \dots (P_{2(n+1-i)})^{m_{n+1-i}} \times \\ & \times (Q_{21})^{l_1} \dots (Q_{2(n+1-i)})^{l_{n+1-i}} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{m_i} m_i = s, \quad \sum_{l_i} l_i = i - s, \quad \sum_{j=1}^{n+1-i} (m_j + l_j) = n,$$

где $\omega_{p^s q^i} = \frac{\partial^s}{\partial p^s} \frac{\partial^i}{\partial q^i} \omega(p, q)$.

Из (7) получим

$$P_{21}(p, q) = \omega_q, \quad Q_{21}(p, q) = -\omega_p. \quad (9)$$

Используя метод математической индукции, из (9) и рекуррентного соотношения (8) нетрудно получить, что при $|p|, |q| \ll 1$ существуют решения $|P_{2n}(p, q)|, |Q_{2n}(p, q)| \ll 1$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому по крайней мере при малых p_1 и q_1 ряды (6) сходятся и на резонансной поверхности существует такая область, которую описывает данная параметризация.

Подставляя параметризацию (6) в уравнение (2), получим

$$f\left(p_1 + \sum_{i \geq 1} t^i P_{2i}, q_1 + \sum_{i \geq 1} t^i Q_{2i}\right) - f(p_1, q_1) = f\left(\sum_{i \geq 1} t^i P_{2i}, \sum_{i \geq 1} t^i Q_{2i}\right). \quad (10)$$

Как видим, левая часть уравнения (10) разлагается только по целым степеням t и начинается с линейных членов. Поэтому правая часть и соответственно разложение (3) могут содержать только одну функцию f_i с целым $\alpha_i \geq 1$. Если $\alpha_i > 1$, то из (10) получим $\omega_{q_1} f_{p_1} - \omega_{p_1} f_{q_1} = 0$, т.е. в некоторой области на Γ^{12} якобиан этих функций равен нулю и $f = F(\omega)$. Подставляя $f = F(\omega)$ в уравнение (2) и устремляя p_2, q_2 к нулю, нетрудно убедиться, что $F(\omega) = \text{const} \cdot \omega$. Из принадлежности $f(\mathbf{k})$ классу допустимых функций вытекает, что если в некоторой области $f(\mathbf{k}) = \text{const} \cdot \omega(\mathbf{k})$, то это соотношение выполняется везде. Это противоречит условию вырожденности, поэтому $\alpha_i = 1$ и

$$f(\mathbf{k}) = q\psi(q/p) + \sum_{i \geq 1} q^{i+1}\psi^{(i)}(q/p), \quad |q|, |p| \ll 1.$$

Далее, опуская индексы у q_1, p_1 из (7) и (10), получим

$$\omega_p f_q - \omega_q f_p = \omega_p \psi(-\omega_p/\omega_q). \quad (11)$$

Пусть q и p также малы (однако $|t| \ll |q|, |p|$). Представим ряд Тейлора функции $\omega(p, q)$ в виде разложения по однородным полиномам:

$$\omega(p, q) = \sum_{n=N}^{\infty} \omega^{(n)}(p, q), \quad N > 1. \quad (12)$$

Введем переменную $\xi = q/p$ и обозначим $A(\xi) = \omega_p^{(N)}/\omega_q^{(N)}$. Тогда, оставляя в (11) главные члены, получим

$$(\xi^2 + \xi A(\xi))\psi'(\xi) + A(\xi)\psi(\xi) = A(\xi)\psi(-A(\xi)). \quad (13)$$

При этом из (11) нетрудно получить, что $\omega^{(N)} \neq p^N, q^N$, поэтому $A(\xi) \neq 0, A(\xi) < \infty$.

Далее, рассматривая квадратичные и кубические по t члены, при $|q|, |p| \ll 1$ из (10) аналогичным путем получим соответственно

$$X(\xi)(\xi + A(\xi)) \left[\omega_{pp}^{(N)}(0) - 2A(\xi)\omega_{pq}^{(N)}(0) + A(\xi)^2\omega_{qq}^{(N)}(0) \right] = 0 \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} X'(\xi)(\xi + A(\xi))^2 + X(\xi) \left[3(\xi + A(\xi)) \left(3 - 2A'(\xi) + (\xi + A(\xi))A''(\xi)/A'(\xi) \right) + \right. \\ + 4p^2 \left(A(\xi)^3 (\omega_{qqq}^{(N)}(p, \xi p) - \omega_{qqq}^{(N)}(0)) - 3A(\xi)^2 (\omega_{qqp}^{(N)}(p, \xi p) - \omega_{qqp}^{(N)}(0)) + \right. \\ + 3A(\xi) (\omega_{qpp}^{(N)}(p, \xi p) - \omega_{qpp}^{(N)}(0)) - \\ \left. \left. - \omega_{ppp}^{(N)}(p, \xi p) + \omega_{ppp}^{(N)}(0) \right) / A'(\xi)\omega_q^{(N)}(p, \xi p) \right] = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $X(\xi) = \xi\psi''(\xi) + 2\psi'(\xi)$.

Покажем, что эти уравнения имеют общее решение только при $N = 3$.

Если в разложении (12) $N = 2$, то, как нетрудно убедиться, уравнение (14) решений не имеет. Поэтому законы дисперсии, начинающиеся с квадратичных членов, невырожденные. Если же $N \geq 3$, то уравнение (14) автоматически удовлетворяется.

При $N \geq 3$ рассмотрим полином N -й степени $\Omega_N(\xi) = \omega^{(N)}(p, \xi p)/p^N$. Раздельно рассмотрим случаи, когда этот полином имеет хотя бы один вещественный корень ξ_0 и когда действительных корней не существует. В первом случае, используя линейное преобразование (которое, конечно, не меняет вырожденность $\omega(\mathbf{k})$)

$$q \rightarrow q + \xi_0 p, \quad p \rightarrow p,$$

получим

$$\omega^{(N)}(\mathbf{k}) = q^m \sum_{n=0}^{N-m} \alpha_n q^n p^{N-m-n}, \quad (16)$$

где m ($m \geq 1$) – кратность корня ξ_0 . Устремим $\xi \rightarrow 0$ и разложим $\psi(\xi) = \alpha \xi^s + Q(\xi^{s+1})$, $\alpha = \text{const}$. По определению допустимой функции $f(\mathbf{k}) - |s| < \infty$. Тогда, подставляя старшие по ξ члены функций $\omega^{(N)}(p, \xi p)$ и $\psi(\xi)$ в уравнения (13) и (15), получим соответственно

$$sN/m + N/m - 1 = (-1)^s (N/m - 1)^{s+1} \quad (17)$$

и

$$s = m/N - 1 \quad \text{при } N > 3, \quad (18)$$

$$s = 7 - 5m \quad \text{при } N = 3. \quad (18a)$$

Нетрудно убедиться, что (17) совместно с (18a), но не совместно с (18). Это означает, что закон дисперсии со старшим (при $\mathbf{k} \rightarrow 0$) членом типа (16) с $N > 3$ невырожден.

Теперь рассмотрим случай, когда все корни полинома $\Omega_N(\xi)$ комплексны. Без нарушения общности можно считать, что в $\omega^{(N)}(\mathbf{k})$ отсутствует член, пропорциональный $p^{N-1}q$:

$$\omega^{(N)}(\mathbf{k}) = p^N + \sum_{n=m}^N \alpha_n q^n p^{N-n}, \quad m \geq 2. \quad (19)$$

Устремляя теперь в (15) $\xi \rightarrow 0$, получим

$$s = 4(m - 1) \quad (20)$$

(здесь s вновь означает порядок старшего члена в $\psi(\xi)$). Но это соотношение не инвариантно относительно линейного преобразования

$$\begin{aligned} p &= p_0 + zq_0, & q &= q_0 + yp_0, \\ z &= -\frac{\left(\sum_{n=m}^N n\alpha_n y^{n-1}\right)}{\left(N + \sum_{n=m}^N (N-n)\alpha_n y^n\right)}, \end{aligned}$$

которое оставляет инвариантным выражение (19). Действительно, в новом соотношении $\omega_0^{(N)}(p_0, q_0) = \omega^{(N)}(p, q)$ опять отсутствует член $p_0^{N-1}q_0$, а из равенства $f_0(p_0, q_0) = f(p, q)$ легко получить

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} X_0(\xi_0) = y\psi''(y) + 2\psi'(y),$$

т.е. $s_0 = 1 \neq 4(m_0 - 1)$, что противоречит условию (20).

Итак, при $N \neq 3$ уравнения (13)–(15) не имеют общего решения. Это касается и случая $N = 3$, когда все три корня $\Omega_3(\xi)$ совпадают и с точностью до линейного преобразования $\omega^{(3)}(p, q) = q^3$.

Таким образом, разложение аналитических вырожденных законов дисперсии начинается с кубических членов. С другой стороны, любой кубический полином по p и q (кроме рассмотренного выше случая, когда все три корня совпадают) с точностью до линейного преобразования p и q записывается в виде

$$\omega^{(3)}(p, q) = p^2 q + \alpha q^3, \quad \alpha = \text{const}, \quad (21)$$

что доказывает справедливость формулы (4).

Теперь, подставляя (21) в уравнения (13) и (15), прямым вычислением нетрудно убедиться, что существует единственное (в указанном выше смысле) решение

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^2}{1 - 3\alpha\xi^2}. \quad (22)$$

Это доказывает справедливость формулы (5) и в целом теоремы 1.

Рассмотрим законы дисперсии, представленные в виде кубического полинома, т.е. $\omega(\mathbf{k}) = \omega^{(3)}(p, q)$. Эти законы дисперсии, кроме не интересующего нас квазиодномерного случая $\omega^{(3)}(p, q) = (\alpha p + \beta q)^3$, $\alpha, \beta = \text{const}$, можно записать в форме (21). Справедлива доказанная в работах [8, 9]

ТЕОРЕМА 2. *Закон дисперсии (21) вырожден на классе допустимых функций, и соответствующая функция вырожденности имеет вид $f(\mathbf{k}) = q\psi(q/p)$, где ψ дается выражением (22).*

Что же касается аналитических законов дисперсии, которые кроме кубического содержат еще и дополнительные члены, то до настоящего времени известны только два таких вырожденных закона дисперсии (см. [6, 8]):

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \frac{q}{1 + p^2}, & f(\mathbf{k}) &= \frac{q^3}{p^2(1 + p^2)}, \\ \omega(\mathbf{k}) &= \frac{q}{1 + p^2 + q^2}, & f(\mathbf{k}) &= \arctg \frac{p - \sqrt{3}q}{p^2 + q^2} - \arctg \frac{p + \sqrt{3}q}{p^2 + q^2}. \end{aligned}$$

Здесь же следует отметить, что во втором случае функция $f(\mathbf{k})$ при малых p и q имеет скачок и поэтому не принадлежит рассмотренному в настоящей работе классу допустимых функций.

Используя уравнение (11) и уравнение, которое образуют квадратичные по t члены в выражении (10), после долгих вычислений получим, что в разложении (4) $n \geq 5$, что согласуется с приведенными выше примерами.

Этим завершается исследование двумерного случая.

3. ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ ЧЕМ ДВА

Рассмотрим вопрос о вырожденности законов дисперсии в размерности больше чем два. При этом подразумевается, что речь идет о реальной размерности, т.е. линейным преобразованием пространства $\mathbf{k}$ нельзя свести $\omega(\mathbf{k})$ к двумерному закону дисперсии.

Если в двумерном случае существуют вырожденные законы дисперсии, то с увеличением размерности ситуация меняется.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)})$, $d \geq 3$, аналитичен в окрестности $\mathbf{k} = 0$ и $\omega(0) = 0$. Тогда он невырожден на классе допустимых функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть для некоторого $\omega(\mathbf{k})$ существует функция вырожденности $f(\mathbf{k})$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, введем малый параметр t и в (1) и (2) разложим по нему $\mathbf{k}_2$:

$$\mathbf{k}_2 = \sum_{i \geq 1} t^i \mathbf{K}_{2i}(\mathbf{k}_1). \quad (23)$$

Обобщая выкладки, использованные при доказательстве теоремы 1, нетрудно убедиться, что, во-первых, по крайней мере при малом $|\mathbf{k}_1| \ll 1$ на резонансной поверхности $\Gamma^{1,2}$ существует такая область, которую описывает параметризация (23). Во-вторых, разложение функции вырожденности (3) может содержать только одну функцию f_i с $\alpha_i = 1$. Оставляя старшие по t члены, из уравнений (1) и (2) получим

$$\sum_{i=1}^d K_{21}^{(i)}(\mathbf{k}) \omega_i(\mathbf{k}) = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^d K_{21}^{(i)}(\mathbf{k}) f^i(\mathbf{k}) = f_1(\mathbf{K}_{21}), \quad (25)$$

где $\omega_i(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial k^{(i)}} \omega(\mathbf{k})$, $f^i(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial k^{(i)}} f(\mathbf{k})$ (для простоты индекс “1” у $\mathbf{k}_1$ опущен).

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что существует такая область в пространстве $\mathbf{k}$, где $f_1(\mathbf{k})$ — линейная функция: $f_1(\mathbf{k}) = \mathbf{c}\mathbf{k}$, $c^{(i)} = \text{const}$. Действительно, в этом случае из (24) и (25) получим $f(\mathbf{k}) = \mathbf{c}\mathbf{k} + F(\omega(\mathbf{k}))$ и, как было показано при доказательстве теоремы 1, это возможно только при $f(\mathbf{k}) = \mathbf{c}\mathbf{k} + \alpha\omega(\mathbf{k})$ ($\alpha = \text{const}$), что противоречит условию вырожденности.

Рассмотрим одно из решений уравнения (24):

$$\begin{aligned} K_{21}^{(l)} &= x_l, \quad l = 1, \dots, d-1, \\ K_{21}^{(l)} &= -\frac{1}{\omega_d(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^{d-1} x_i \omega_i(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (25) и дифференцируя два раза по x_1 , получим

$$\begin{aligned} & f_1^{11} \left(x_1, \dots, x_{d-1}, -\frac{1}{\omega_d(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^{d-1} x_i \omega_i(\mathbf{k}) \right) - \\ & - 2 \frac{\omega_1(\mathbf{k})}{\omega_d(\mathbf{k})} f_1^{1d} \left(x_1, \dots, x_{d-1}, -\frac{1}{\omega_d(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^{d-1} x_i \omega_i(\mathbf{k}) \right) + \\ & + \left(\frac{\omega_1(\mathbf{k})}{\omega_d(\mathbf{k})} \right)^2 f_1^{dd} \left(x_1, \dots, x_{d-1}, -\frac{1}{\omega_d(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^{d-1} x_i \omega_i(\mathbf{k}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как $d \geq 3$, то $\mathbf{k}$ всегда можно выбрать так, чтобы соотношение $\omega_1(\mathbf{k})/\omega_d(\mathbf{k})$ менялось, а выражение

$$\frac{1}{\omega_d(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^{d-1} x_i \omega_i(\mathbf{k})$$

оставалось неизменным. Тогда все члены уравнения (27) будут меняться независимо друг от друга, и для удовлетворения этого уравнения каждый из них должен отдельно равняться нулю. Далее, повторяя эти рассуждения для $x_2, \dots, x_{d-1}$, получим, что существует такая область в $\mathbf{k}$ -пространстве, где $f_1^{ij}(\mathbf{k}) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, d$, т.е. функция $f_1(\mathbf{k})$ линейна по своим аргументам, что и требовалось доказать.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, среди многомерных аналитических в нуле законов дисперсии вырожденными на допустимом классе функций могут быть только двумерные. Разложение последних при $|\mathbf{k}| \ll 1$ с точностью до линейного преобразования пространства $\mathbf{k}$ имеет следующий вид:

$$\omega(p, q) = \gamma p + \beta q + p^2 q + \alpha q^3 + \sum_{n \geq 5} \omega^{(n)}(p, q),$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \text{const}, \quad \omega^{(n)}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^n \omega^{(n)}(p, q). \quad (28)$$

Соответствующая функция вырожденности $f(\mathbf{k})$ с точностью до умножения на константу и добавления линейных форм от $\mathbf{k}$ и $\omega(\mathbf{k})$ единственна и при малых $|\mathbf{k}|$ имеет вид (5).

В связи с этим возникает вопрос о возможности существования уравнений с вырожденным законом дисперсии и единственным дополнительным интегралом движения, определяемым функцией $f(\mathbf{k})$ (см. [1, 2]). Если рассматривать соответствующие кинетические уравнения, в которых игнорируются члены выше кубического, то независимо от вида взаимодействия каждой функции вырожденности соответствует дополнительный интеграл движения. Что же касается точных интегралов движения, то, по-видимому, таких единственных дополнительных интегралов движения не существует.

В заключение мы хотим выразить благодарность А. М. Балку за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] V. E. Zakharov, E. I. Schulman. Physica D. 1988. V. 29. № 3. P. 283–321.
- [2] V. E. Zakharov, E. I. Schulman. Physica D. 1980. V. 1. № 2. P. 191–202.
- [3] В. Е. Захаров, Е. И. Шульман. ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 6. С. 1325–1328.
- [4] V. E. Zakharov. Lect. Notes Phys. 1983. V. 153. P. 190–216.
- [5] Е. И. Шульман. ТМФ. 1988. Т. 76. № 1. С. 88–99.
- [6] A. M. Balk, S. V. Nazarenko, V. E. Zakharov. Phys. Lett. A. 1990. V. 146. № 4. P. 217–221.
- [7] Д. Д. Цхакая. ТМФ. 1993. Т. 95. № 1. С. 20–33.
- [8] A. M. Balk. Phys. Lett. A. 1991. V. 155. № 1. P. 20–24.
- [9] Д. Д. Цхакая. Вырожденность законов дисперсии и многомерные интегрируемые дифференциальные уравнения. Диссертация канд. физ.-матем. наук. Тбилиси: ТГУ, 1991.

Поступила в редакцию 10.11.1995 г.

D. D. Tskhakaya, E. I. Shulman

ON DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL DISPERSION LAWS

We study degeneration of multidimensional analytic at the vicinity dispersion laws given that the corresponding function of degeneracy satisfies condition (3). We prove that two-dimensional dispersion laws $\omega(p, q)$ can be degenerate with respect to the decay process $1 \rightarrow 2$ if and only if their asymptotic behaviour when p and q are small has the form (28). It is shown that the corresponding function of degeneracy is unique and its asymptotic behaviour is found.