Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Вергелес, К вопросу о квантовании общековариантных теорий. Динамический метод квантования, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 1, 132–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:38:50

С. Н. Вергелес*

К ВОПРОСУ О КВАНТОВАНИИ ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЙ. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД КВАНТОВАНИЯ

Предложен принципиально новый метод квантования общековариантных теорий, включающий в себя регуляризацию теории и вычислительную схему. Метод основан на теории Дирака квантования систем со связями.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы излагаем метод квантования общековариантных теорий, названный нами динамическим методом квантования. Идея динамического квантования появилась в процессе изучения автором квантовой теории киральной модели Швингера. Возникший в результате метод квантования привел к квантовой теории модели Швингера со следующими важнейшими свойствами: а) в теории отсутствует калибровочная аномалия; б) состояния, близкие к вакууму, описываются свободными безмассовыми бозе-частицами, обладающими релятивистским спектром $\omega(k) = k > 0$ при малых импульсах по сравнению с импульсом обрезания [1]. Этот результат существенно отличается от результатов, полученных рядом других авторов при квантовании этой модели традиционными методами (см., например, [2]).

Однако вскоре стало ясно, что внутренняя логика нового метода естественно отвечает потребностям, возникающим при квантовании общековариантных теорий. Применение метода динамического квантования к теории гравитации, взаимодействующей с дираковским полем в $2 + 1$ -мерном пространстве, дало успешный результат. Была проведена регуляризация, сохраняющая общую ковариантность теории, и построена теория возмущений (ТВ) [3]. Как известно, другие методы квантования до сих пор не привели к положительному решению этой задачи.

В процессе квантования $2 + 1$ -мерной теории гравитации удалось достаточно четко сформулировать основные принципы динамического метода квантования и положить начало его аксиоматизации. Описание динамического метода как схемы квантования общековариантных теорий является предметом нашей статьи.

Идея этого метода проста. Как известно, в общековариантных теориях гамильтониан является произвольной линейной комбинацией связей первого рода χ_α . Кроме того,

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Россия. E-mail: vergeles@itp.ac.ru

имеется бесконечное число сохраняющихся операторов типа рождения и уничтожения $(a_N, a_N^\dagger)$, которые переводят одни физические состояния в другие. Регуляризация теории производится путем наложения бесконечного числа связей второго рода $a_N = 0$, $a_N^\dagger = 0$ при $|N| > N_0$. Таким образом, в теории остается лишь конечное число степеней свободы, соответствующих операторам a_N и $a_N^\dagger$ с $|N| < N_0$. При этом следует заменить скобку Пуассона соответствующей скобкой Дирака. Очень важно, что при такой замене алгебра операторов χ_α остается прежней: $[\chi_\alpha, \chi_\beta]^* = [\chi_\alpha, \chi_\beta]$, т.к. $[\chi_\alpha, a_N] = [\chi_\alpha, a_N^\dagger] = 0$ (звездочкой сверху обозначаем скобку Дирака). Отсюда следует, что свойство общей ковариантности и другие симметрии сохраняются в регуляризованной теории. Кроме того, оставляя “малое” число степеней свободы, мы получаем принципиально новую возможность развития ТВ по числу сохраненных степеней свободы.

2. НЕОБХОДИМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ ДИРАКА КВАНТОВАНИЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Приводимые здесь сведения из теории гамильтоновых систем со связями подробно изложены в [4]. Мы выписываем необходимые формулы в нужном нам полевом варианте.

Пусть x обозначает пространственную (а не пространственно-временную) точку и $\Phi(x)$ – динамические полевые переменные некой общековариантной системы, включающие, вообще говоря, и фермионные поля. Далее, пусть величины $\chi_\alpha(x)$ и κ_n являются некими функционалами динамических переменных, причем $\chi_\alpha(x)$ зависят локально от полей $\Phi(x)$. Кроме того, величины $\chi_\alpha(x)$ являются связями первого рода, а величины κ_n – связями второго рода. Это значит, что скобки Пуассона, составленные из этих величин, имеют вид

$$[\chi_\alpha(x), \chi_\beta(y)] \approx 0, \quad [\chi_\alpha(x), \kappa_n] \approx 0, \quad (1)$$

$$[\kappa_m, \kappa_n] = c_{mn}^{-1}. \quad (2)$$

Следуя Дираку, мы обозначаем знаком $\approx$ равенства по модулю слагаемых, содержащих связи или κ_n , или $\chi_\alpha(x)$, или их производные. Обратим внимание на то, что матрица c_{mn}^{-1} в (2) является невырожденной матрицей, которая в общем случае зависит от динамических переменных. Гамильтониан системы H есть величина первого рода

$$[H, \chi_\alpha(x)] \approx 0, \quad [H, \kappa_n] \approx 0. \quad (3)$$

Если в теории имеются связи второго рода, то при переходе от классической механики к квантовой требуются дополнительные построения. Прежде всего следует заменить обычную скобку Пуассона скобкой Дирака (последняя обозначается дополнительной звездочкой сверху). В классической теории скобка Дирака любых двух величин определяется формулой

$$[\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] - \sum_{m,n} [\xi, \kappa_m] c_{mn} [\kappa_n, \eta]. \quad (4)$$

Для любых величин ξ и κ_n имеем

$$[\xi, \kappa_n]^* = 0. \quad (5)$$

Вследствие (3) и (4) справедливо равенство

$$[\xi, H] \approx [\xi, H]^*. \quad (6)$$

Из равенств (5) вытекает, что связи второго рода κ_n можно положить равными нулю до вычисления скобок Дирака. Слабое равенство (6) означает, что уравнения движения, полученные при помощи скобок Пуассона и скобок Дирака, по существу совпадают.

Из формул (1) и (4) непосредственно следует, что

$$[\chi_\alpha(x), \chi_\beta(y)]^* \approx 0. \quad (7)$$

Так как здесь рассматривается общеквариантная теория, то гамильтониан полагается равным нулю в слабом смысле, т.е. является произвольной линейной комбинацией связей первого рода:

$$H = \int dx \lambda_\alpha(x) \chi_\alpha(x), \quad (8)$$

здесь $\lambda_\alpha(x)$ – произвольные поля, играющие роль множителей Лагранжа, и $\int dx$ является интегралом по пространству.

При переходе к квантовой механике следует так подобрать квантовую скобку Дирака, соответствующую классической скобке Дирака (4), и так упорядочить операторы в связях $\chi_\alpha(x)$, чтобы квантовая скобка Дирака удовлетворяла всем необходимым свойствам и сохранялись соотношения (7). Эта задача не может быть решена в общем виде. Все состояния теории $|\rangle$, имеющие физический смысл, удовлетворяют условиям

$$\chi_\alpha(x) |\rangle = 0. \quad (9)$$

Вследствие (7) уравнения (9) совместны.

3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

Таким образом, в рамках классической динамики некой общеквариантной теории мы имеем следующую картину: гамильтониан системы является произвольной линейной комбинацией связей первого рода (см. (8)), вместо исходной скобки Пуассона используется скобка Дирака (4), и связи второго рода равны нулю в сильном смысле.

Далее скобку Дирака (4) будем обозначать обычным символом $[\cdot, \cdot]$ и называть просто скобкой Пуассона. Такое упрощение обозначений нужно для того, чтобы отличать скобку Дирака (4) в формальной или нерегуляризованной теории от скобки Дирака, возникающей в методе динамического квантования.

Выделим из динамических полевых переменных $\Phi(x)$ полный набор взаимно коммутирующих полей и обозначим эти переменные $E(x)$. Поле $E(x)$ играет ту же роль, которую играет полный набор коммутирующих переменных в квантовой механике.

Построение квантовой теории при помощи динамического метода основывается на следующих естественных предположениях или аксиомах относительно структуры не-регуляризованного пространства F физических состояний теории.

АКСИОМА 1. Все состояния теории, имеющие физический смысл, получаются из основного состояния $|0\rangle$ при помощи операторов рождения a_N^+ :

$$|n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle = (n_1! \dots n_s!)^{-\frac{1}{2}} (a_{N_1}^+)^{n_1} \dots (a_{N_s}^+)^{n_s} |0\rangle, \\ a_N |0\rangle = 0. \quad (10)$$

Состояния (10) образуют ортонормированный базис пространства F физических состояний теории.

Числа $n_1, \dots, n_s$ принимают натуральные значения и называются числами заполнения.

АКСИОМА 2. Состояние $E(x) |n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle$ содержит суперпозицию всех состояний теории, у которых одно из чисел заполнения отличается по модулю на единицу, а остальные совпадают с числами заполнения состояния (10).

Здесь операторы a_N^+ и их сопряженные a_N обладают обычными коммутационными свойствами:

$$[a_N, a_M] = 0, \quad [a_N, a_M^+] = \delta_{NM}. \quad (11)$$

Если операторы рождения и уничтожения имеют статистику Ферми, то в (11) подразумевается антикоммутатор. Для интересующего нас случая компактных пространств без ограничения общности можно считать, что индекс N , нумерующий операторы рождения и уничтожения, принадлежит дискретной конечномерной решетке. В пространстве индексов N легко вводится норма.

Так как состояния (10) физические, то они удовлетворяют соотношениям (9), что эквивалентно следующим коммутационным соотношениям (КС):

$$[H, a_N^+] = 0, \quad [H, a_N] = 0, \quad (12)$$

где H – гамильтониан (8). Обратим внимание на то, что КС (12) являются следствием общей ковариантности теории. В других теориях может не существовать набора операторов со свойствами (12), исчерпывающего физические степени свободы системы.

Следует заметить, что обе введенные аксиомы могут быть несколько изменены в зависимости от свойств рассматриваемой динамической системы. Здесь приведен вариант формулировки аксиом, учитывающий случай, встретившиеся в нашей практике. В конечном счете важным является лишь требование выполнения следующих предположений:

а) существует набор операторов (a_N, a_N^+) , исчерпывающих физические степени свободы системы и удовлетворяющих КС (12);

б) матрица, составленная из элементов $[a_M, a_N^+]$, $[a_M, a_N]$ и $[a_M^+, a_N^+]$, является обратимой.

Приведем некоторые следствия из аксиом 1 и 2.

Пусть $|N\rangle = a_N^+ |0\rangle$. Из аксиомы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} E(x) |N\rangle &= E_N(x) |0\rangle + |N; E(x)\rangle, \\ \langle 0 | N; E(x) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

и линейно независимые поля $E_N(x)$ не зависят от операторов a_M или a_M^+ :

$$[E_N(x), a_M] = 0, \quad [E_N(x), a_M^+] = 0.$$

Если $E(x)$ – вещественное поле, то из аксиом 1 и 2 и формул (13) следует справедливость разложения

$$E(x) = \sum_N (a_N E_N(x) + a_N^+ E_N^+(x)) + e(x), \quad (14)$$

где поле $e(x)$ не содержит операторов a_N и a_N^+ в первой степени. В случае комплексного дираковского поля ψ разложение (14) приобретает вид

$$\psi(x) = \sum_N a_N \psi_N(x), \quad (15)$$

где (a_N, a_N^+) – фермионные операторы. Поскольку операторы (a_N, a_N^+) сохраняющиеся, то вся динамика полей $E(x)$ ($\psi(x)$) заключена в переменных $E_N(x)$ и $e(x)$ ($\psi_N(x)$). Конфигурация и уравнения движения (или коммутаторы с гамильтонианом) полей $E_N(x)$ и $e(x)$ в общем виде представлены быть не могут. Для случаев 2 + 1-мерной теории гравитации, взаимодействующей с дираковским полем, и 3 + 1-мерной чистой гравитации этот вопрос рассматривается в приложении. Здесь отметим лишь, что информация о полях $E_N(x)$ и $e(x)$ может быть получена путем изучения матричных элементов относительно состояний (10) некоторых инвариантных величин, составленных из полей $E(x)$. В случае фермиевских полей эта задача решается легче. Установлено, что когда гамильтониан имеет квадратичную зависимость от фермионных полей, то поля $\psi_N(x)$ удовлетворяют тому же уравнению Дирака или уравнению типа Дирака, которому удовлетворяет поле $\psi(x)$.

Предыдущие построения позволяют рассмотреть регуляризацию теории. До сих пор наше изложение было формальным, поскольку сингулярности теории во внимание не принимались.

Важность КС (11) и (12) заключается в том, что любой набор пар операторов a_N, a_N^+ может рассматриваться как набор связей второго рода. Это дает возможность регуляризовать теорию следующим образом.

Выделим конечный набор пар операторов уничтожения и рождения (a_N, a_N^+) и занумеруем их таким образом, что $|N| < N_0$. Поскольку физическая информация содержится в волновых функциях $E_N(x)$, то фактически этот выбор определяется выбором набора линейно независимых волновых функций $(E_N(x))'$, соответствующего набору операторов (a_N, a_N^+) . Выбор функций в наборе $(E_N(x))'$ определяется физическими условиями задачи. Например, если x -пространство является тором, то в качестве волновых функций этого набора могут быть взяты периодические бегущие волны, волновые

числа которых ограничены по модулю. Все операторы рождения и уничтожения, кроме выбранных, т.е. операторы с $|N| > N_0$, полагаем равными нулю:

$$a_N = 0, \quad a_N^+ = 0, \quad |N| > N_0. \quad (16)$$

Докажем важную для нашего метода теорему, придающую смысл всей схеме динамического квантования.

ТЕОРЕМА. *Наложение связей второго рода (16) не изменяет формы уравнений Гейзенберга, имеющих классический вид.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\mathcal{M}'\rangle, |\mathcal{N}'\rangle, \dots$ обозначают базисные векторы (10), построенные при помощи ограниченного набора операторов $(a_N, a_N^+)'$, и F' обозначает фockовское пространство с этими базисными векторами. Наложение связей (16) означает, что пространство физических состояний F ограничивается до регуляризованного подпространства $F' \subset F$. Для любого оператора A в регуляризованной теории рассматриваются лишь матричные элементы вида $\langle \mathcal{M}' | A | \mathcal{N}' \rangle$. Поэтому соответствующие связям (16) матричные элементы квантовой скобки Дирака операторов A и B представляются в виде

$$\langle \mathcal{M}' | [A, B]^* | \mathcal{N}' \rangle = \sum_{\mathcal{L}'} \left(\langle \mathcal{M}' | A | \mathcal{L}' \rangle \langle \mathcal{L}' | B | \mathcal{N}' \rangle - \langle \mathcal{M}' | B | \mathcal{L}' \rangle \langle \mathcal{L}' | A | \mathcal{N}' \rangle \right). \quad (17)$$

По определению квантовой скобки Дирака операторы a_N и a_N^+ с $|N| > N_0$, содержащиеся в операторах A и B из (17), полагаются равными нулю. Коммутатор $[A, B]$ формально отличается от скобки Дирака (17) тем, что при вычислении матричных элементов $\langle \mathcal{M}' | [A, B] | \mathcal{N}' \rangle$ по формуле, аналогичной (17), суммирование идет по всем промежуточным состояниям (10). Допустим, что оператор B диагонален в базисе (10) и не зависит от операторов a_N и a_N^+ с $|N| > N_0$. Тогда из (17) видно, что

$$\langle \mathcal{M}' | [A, B]^* | \mathcal{N}' \rangle = \langle \mathcal{M}' | [A, B] | \mathcal{N}' \rangle, \quad (18)$$

если в матричном элементе в правой части (18) положить $a_N = 0, a_N^+ = 0$ при $|N| > N_0$. Теперь остается заметить, что все операторы чисел заполнения $n_N = a_N^+ a_N$ коммутируют с гамильтонианом (8). Более того, вследствие КС (12) гамильтониан не зависит от операторов a_N, a_N^+ . Поэтому в (18) вместо оператора B можно подставить гамильтониан H . Это означает справедливость теоремы.

Имеется также классический **вариант** приведенной теоремы.

Наложение связей (16) полностью сохраняет вид уравнений движения, что выражается равенством $[\xi, H] = [\xi, H]^$ (ср. с (6)).*

Последнее утверждение немедленно следует из формул (4) и (12).

СЛЕДСТВИЕ. *Регуляризованная теория является общековариантной.*

Действительно, это непосредственно вытекает из доказанной теоремы. Уравнения движения, которым подчиняются поля $\Phi(x)$ в регуляризованной теории, совпадают по

форме с классическими уравнениями движения, являющимися общековариантными. Тем самым следствие доказано.

Поскольку в регуляризованной теории может быть оставлено в принципе **любое** число физических степеней свободы, то по этому числу может быть развита ТВ. Нулевое приближение в такой ТВ – это состояние с отсутствующими локальными степенями свободы.

Для примеров, рассматриваемых в приложении, в нулевом приближении тензор кривизны равен нулю, поэтому здесь легко решаются уравнения Гейзенберга. Далее для решения уравнений Гейзенберга развиваются итерации по числу оставшихся в теории локальных физических степеней свободы. В работах [3] в 2 + 1-мерной теории гравитации проведены некоторые вычисления в рамках такой ТВ.

Заметим, что физически значимые результаты, полученные путем вычислений в рамках развитой таким образом ТВ, явились бы подтверждением естественности введенных аксиом.

4. ФОРМАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Теперь изложим более аксиоматизированную схему динамического квантования. Эта схема, являясь, быть может, менее естественной, обладает большей логической стройностью и упрощает вычисления.

Основой такого подхода является

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Теория регуляризована таким образом, что выполнены следующие аксиомы.*

АКСИОМА 3. *Все состояния теории, имеющие физический смысл, получаются из основного состояния $|0\rangle$ при помощи операторов рождения a_N^+ с $|N| < N_0$:*

$$|n_1, N_1; \dots; n_s, N_s\rangle = (n_1! \dots n_s!)^{-\frac{1}{2}} (a_{N_1}^+)^{n_1} \dots (a_{N_s}^+)^{n_s} |0\rangle, \quad (19)$$

$$a_N |0\rangle = 0.$$

Состояния (19) образуют ортонормированный базис пространства F' физических состояний теории.

АКСИОМА 4. *Динамические переменные $E(x)$ переводят состояние (19) в суперпозицию состояний теории вида (19), содержащую все состояния, у которых одно из чисел заполнения отличается по модулю на единицу, а остальные совпадают с числами заполнения состояния (19).*

АКСИОМА 5. *Уравнения движения и связей для физических полей $\Phi(x)$ с точностью до расстановки операторов совпадают по форме с соответствующими классическими уравнениями и связями.*

Аксиомы 3 и 4 являются аналогами аксиом 1 и 2 в нерегуляризованной теории. Аксиома 5 заменяет собой теорему из раздела 3. Она постулирует правильный вид уравнений движения и связей в соответствии с классической механикой. Поскольку теперь уравнения движения выводить более не нужно, то ненужным становится и гамильтониан.

Таким образом, при формальном подходе задача сводится к следующему. Выбираются конечный набор линейно независимых функций $(E_N(x))'$ и соответствующий им набор пар операторов $(a_N, a_N^\dagger)'$, с их помощью согласно (14) составляется квантовое регуляризованное поле $E(x)$. Затем решаются уравнения движения и связи для регуляризованных полей. Это можно делать при помощи ТВ. Физическое состояние задается разложением по базису (19), и по отношению к этому состоянию вычисляются всевозможные средние.

Корректность введенных аксиом для конкретной теории устанавливается приемлемостью результатов, полученных при помощи развитого на их основе вычислительного аппарата.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами описан новый метод квантования общековариантных теорий. Этот метод обеспечивает регуляризацию теории, сохраняющую ее общую ковариантность и дающую аппарат построения ТВ. Именно потому, что метод согласован с динамикой системы, он называется динамическим.

Обратим внимание на тот интересный факт, что явный вид возникающих в процессе динамического квантования скобок Дирака не используется в вычислениях при решении уравнений Гейзенберга. Причина этого в том, что регуляризованные уравнения Гейзенберга сохраняют свой классический вид. Это обстоятельство очень облегчает применение метода.

В заключение обратим внимание на серьезную проблему упорядочения операторов в регуляризованных уравнениях Гейзенберга. По-видимому, решение этой проблемы зависит от свойств изучаемой модели. Результаты, полученные в этом направлении для случая 2 + 1-мерной гравитации, содержатся в [3].

При подходе, описанном в разделе 4, можно привести некоторые соображения об упорядочении операторов в уравнениях движения в общем случае.

Напомним, что задача упорядочения операторов возникает в связи с проблемой установления самосогласованности теории. Выпишем уравнения Гейзенберга в общем виде:

$$\dot{\Phi}(x) = F(\lambda, \Phi)(x). \quad (20)$$

Здесь поле $\lambda(x)$ определяет гамильтониан согласно (8). В (20) F является локальной функцией полей $\lambda(x)$ и $\Phi(x)$ и линейно зависит от поля λ . По определению, если поле λ является операторным, то оно располагается левее полей Φ в функции $F(\lambda, \Phi)$. Согласно (20) для произвольных полей λ_1 и λ_2 имеем

$$\delta_i \Phi = \delta t_i F(\lambda_i, \Phi), \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим величину $(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \Phi$, которую обозначим $\delta_{[1\ 2]} \Phi$. Необходимым условием самосогласованности теории является возможность такого упорядочения операторов в уравнении (20), чтобы имело место слабое равенство

$$\delta_{[1\ 2]} \Phi \approx \delta t_1 \delta t_2 F(\lambda_{[1\ 2]}, \Phi).$$

Здесь поле $\lambda_{[1\ 2]}$ есть билинейная антисимметричная форма относительно полей λ_1 и λ_2 и, вообще говоря, зависит от поля Φ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-02-17331-а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь на примере двух моделей рассматривается задача о конфигурации и динамике введенных согласно (13), (14) и (15) функций $E_N(x)$, $\psi_N(x)$.

1. Теория 2 + 1-мерной гравитации, взаимодействующей с дираковским полем [3]. Поле $\Phi(x)$ состоит из полей триад $e_i^a(x)$, связности $\omega_i^{ab}(x)$ и дираковских полей $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$. Индексы $a, b, \dots = 0, 1, 2$ – локальные лоренцевы индексы, $i, j, \dots = 1, 2$ – пространственные координатные индексы. В качестве полного набора взаимно коммутирующих полей $E(x)$ берутся поля $e_i^a(x)$ и $\psi(x)$. В 2 + 1-мерном пространстве все локальные степени свободы содержатся в фермионном поле. Для состояния (10) все числа заполнения равны либо нулю, либо единице. Состоянию (10) и фермионным полям можно приписать фермионный заряд, так чтобы фермионный заряд полей $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ был равен -1 и 1 , соответственно, а фермионный заряд состояния (10) равнялся s . Поскольку в пространстве физических состояний имеется градуировка и $\psi(x)$ – комплексное поле, имеющее заряд -1 , формула (13) упрощается:

$$\psi(x) | N \rangle = \psi_N(x) | 0 \rangle. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $\{\psi_N(x)\}$ – набор линейно независимых спинорных бозонных полей. Уравнение Гейзенберга для поля $\psi(x)$ является уравнением Дирака в искривленном трехмерном пространстве-времени, поэтому

$$0 = i \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi(x) | N \rangle = i \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi_N(x) | 0 \rangle. \quad (\text{П.2})$$

Из (П.2) следует, что

$$i \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi_N(x) = 0. \quad (\text{П.3})$$

2. Теория чистой гравитации в 3 + 1-мерном пространстве. В этой модели поле $\Phi(x)$ состоит из полей тетрад $e_i^a(x)$ и связности $\omega_i^{ab}(x)$, $i, j, \dots = 1, 2, 3$ – пространственные координатные индексы, $a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$ – локальные лоренцевы индексы. В качестве полного набора коммутирующих полей $E(x)$ берутся поля тетрад $e_i^a(x)$. Поскольку эти поля вещественны, то нужное нам разложение имеет вид (14), где следует сделать замены $E_N(x) \rightarrow e_{N_i}^a(x)$ и $e(x) \rightarrow \tilde{e}_i^a(x)$. Поля $e_{N_i}^a(x)$ по определению не зависят от операторов a_M и a_M^+ .

Классическое уравнение Гейзенберга для полей тетрад имеет вид

$$\dot{e}_i^a = -i[e_i^a, H] = -\omega_0^{ab} e_{bi} + \nabla_i e_0^a, \quad (\text{П.4})$$

где $\nabla_\mu \xi^a = \partial_\mu \xi^a + \omega_\mu^{ab} \xi_b$ и $e_0^a(x)$ – произвольные поля (множители Лагранжа в гамильтониане). Рассмотрим состояние

$$\left(\int d^3x \sqrt{-g} \right) | N \rangle. \quad (\text{П.5})$$

Здесь состояние $|N\rangle$ определено согласно (13), $g = \det g_{ij}$, $g_{ij} = e_i^a e_{aj}$. Величина $\int d^3x \sqrt{-g}$ инвариантна относительно общих замен координат в трехмерном пространстве. Как известно, выражение в правой части (П.4) дает изменение тетрад при бесконечно малом изменении координат. Из сказанного следует, что состояние (П.5) аннулируется гамильтонианом. Это выражается формулой

$$\int d^3x e_{a0} \nabla_i (\sqrt{-g} g^{ij} e_j^a) |N\rangle = 0. \quad (\text{П.6})$$

Здесь g^{ij} — матрица, обратная к матрице g_{ij} . Сопоставление формул (10) и (П.6) приводит к результату

$$\nabla_i (\sqrt{-g} g^{ij} e_{Nj}^a) = 0.$$

Теперь нетрудно выписать уравнения движения, которым подчиняются поля e_{Ni}^a и $\tilde{e}_i^a$.

Список литературы

- [1] *S. N. Vergeles*. Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 2117.
- [2] *M. B. Paranjape*. Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 649; *K. Harada, I. Tsutsui*. Phys. Lett. B. 1987. V. 183. P. 311; *R. Jackiw, R. Rajaraman*. Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1219; *J. G. Halliday, E. Rabinovici, A. Schwimmer, M. Chanowitz*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 413; *M. Chanowitz*. Phys. Lett. B. 1986. V. 171. P. 280.
- [3] *С. Н. Вергелес*. ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1739; ЯФ. 1994. Т. 57. С. 2286.
- [4] *P. A. M. Dirac*. Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964.

Поступила в редакцию 8. II. 1996 г.

S. N. Vergeles

ON QUANTIZATION OF GENERAL COVARIANT THEORIES. THE DYNAMIC QUANTIZATION METHOD

New method of quantization of general covariant theories, including regularization of the theory and calculation scheme is proposed. The method is based on the Dirac theory of quantization of systems with constraints.