Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Обобщенные преобразования Лежандра, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 2, 179–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:53:40

В. Э. Адлер*, А. Б. Шабат†

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА

Излагается общая теория интегрируемых цепочек Тоды, рассматриваемых как лагранжевы динамические системы с одним непрерывным и одним дискретным временем. Теория основана на инвариантности интегрируемых цепочек относительно преобразований, аналогичных преобразованию Лежандра в классической механике.

*Из-за частого упоминания классиков
механики называют свою науку классической*

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе, являющейся продолжением [1], рассматриваются цепочки

$$q_{n,xx} = \Phi_n = \Phi(q_n, q_{n\pm 1}, z_n, z_{n\pm 1}), \quad z_n \equiv q_{n,x}, \quad (1)$$

которые являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для функционалов вида

$$\mathcal{S} = \int dx \sum L(z_n, q_{n+1}, q_n). \quad (2)$$

В качестве отправной точки мы выбираем, учитывая результаты нашей предыдущей работы, следующую общую формулу для лагранжиана:

$$L_n = L(z_n, q_{n+1}, q_n) = c(z_n, q_n) - z_n a(q_{n+1}, q_n) - b(q_{n+1}, q_n). \quad (3)$$

Первое и последнее слагаемые определяют здесь соответственно кинетическую и потенциальную энергию системы. С известной долей условности можно связать оставшийся (линейный по z_n) член с вкладом магнитного поля.

В упрощенном варианте (для систем с сохраняющимся импульсом) общий лагранжиан заменяется инвариантным относительно сдвига $q \rightarrow q + \tau$:

$$L_n = c(z_n) - z_n a(y_n) - b(y_n), \quad y_n \equiv q_{n+1} - q_n. \quad (4)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.ub.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

Очевидно, заменой $\hat{q}_n = Q(q_n)$ к такому виду приводится любой лагранжиан (3), допускающий классическую симметрию $q_{n,\tau} = \psi(q_n)$. Цепочки (1), соответствующие (4), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{n,xx} &= r(z_n)(z_{n+1}f(y_n) - z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_n) - g(y_{n-1})), \\ r(z) &= 1/c''(z), \quad f(y) = a'(y), \quad g(y) = b'(y). \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости мы будем относить цепочки при $f = 0$ (нулевое магнитное поле) к типу I, а при $f \neq 0$ — к типу II.

Основываясь на идее о равноправности непрерывного x и дискретного n аргументов в формуле (2), мы определяем пару обобщенных импульсов Y_n, Z_n как частные производные лагранжиана L_n :

$$Y_n = \partial L_n / \partial z_n, \quad Z_{n+1} = -\partial L_n / \partial q_{n+1}. \quad (6)$$

Аргументом в пользу этого определения служит тождество

$$\rho_n(\Phi_n - z_{n,x})\delta q_n = \delta L(z_n, q_n, q_{n+1}) - (Y_n \delta q_n)_x + Z_{n+1} \delta q_{n+1} - Z_n \delta q_n, \quad (7)$$

где $\rho_n = \rho(z_n, q_n)$, $\rho(z, q) = c_{zz}(z, q)$. Это тождество выполняется, как нетрудно проверить, для всех цепочек (1), соответствующих лагранжианам (3) общего вида.

В классической механике преобразованием Лежандра называется переход $q, q_x \leftrightarrow q, p = \partial L / \partial q_x$ от обобщенных скоростей к обобщенным импульсам. В $(1 + \varepsilon)$ -мерных системах типа (5) имеются две обобщенные скорости $y_n = q_{n+1} - q_n$ и $z_n = q_{n,x}$ и два обобщенных импульса (6). Отказываясь от обратимости преобразования переменных q , мы определяем преобразование Лежандра как замену $y_n, z_n \leftrightarrow Y_n, Z_{n+1}$.

Опишем теперь вкратце наши результаты. В разделе 1 рассмотрены интегрируемые цепочки типа II. В отличие от нашей предыдущей работы [1], определением интегрируемости служит свойство инвариантности цепочек относительно преобразования Лежандра. Для цепочек типа I это определение не пригодно, т.к. преобразование Лежандра вырождается в обычную, хотя и полезную, точечную замену переменных, не имеющую отношения к интегрируемости. Напротив, для цепочек типа II требование инвариантности приводит к исчерпывающей классификации.

Помимо воспроизведения списка интегрируемых цепочек, это определение позволяет доказать в разделе 2, что интегрируемые цепочки типа I и II являются преобразованиями Бэклунда друг для друга. Точнее, основная теорема гласит, что композиция преобразований Лежандра для цепочек типа II задает сдвиги в цепочках типа I. Здесь же приведен пример конечномерной динамической системы и дискретного отображения, возникающих при периодическом замыкании цепочки.

В следующем разделе рассматриваются два обобщения основной теоремы. В пункте 3.1 устанавливается двойственность двух специальных интегрируемых цепочек, не приводимых к виду (5). Этот результат представляется важным, т.к. имеет приложения к известной в физике конденсированных сред модели Ландау–Лифшица. В пункте 3.2 содержится пример векторной цепочки типа II, допускающей обобщенные преобразования Лежандра. Полное описание и исследование векторного случая представляет собой сложную открытую задачу.

В разделе 4 уточняются связи с нашей предыдущей работой [1], строятся преобразования типа Миуры и исследуются соответствующие гамильтоновы структуры. Замечательно, что преобразования типа Миуры, построенные в пункте 4.2, задаются такими же общими формулами, как и преобразования в разделе 1.

Заканчивая введение, нужно сказать, что помимо [1] мы опирались на богатую литературу, посвященную интегрируемым цепочкам. Цепочки обоих типов возникали обычно как преобразования Бэклунда для эволюционных систем типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [2, 3, 4]. Цепочки типа I (представителем является цепочка Тоды) выделены тем, что задают обратимые дифференциальные подстановки, и поэтому они наиболее хорошо изучены [3, 5–7]. Систематического изучения цепочек типа II раньше не проводилось, хотя как преобразования Бэклунда они в неявном виде часто возникали (см., например, [4]). Исключение составляет так называемая релятивистская цепочка Тоды ($23_{\mu,0}$), введенная Руйзенарсом в 1986 г. и с тех пор изучавшаяся многими авторами. Построение общей теории, объединяющей преобразования Бэклунда обоих типов, давно напрашивалось, и основная теорема раздела 2 показывает, что преобразования Лежандра неожиданно просто позволяют решить эту задачу.

1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЦЕПОЧКИ ТИПА II

При изучении цепочек (5) удобно перейти от динамических переменных q_n, z_n к переменным y_n, z_n и переписать (5) в виде системы уравнений первого порядка:

$$y_{n,x} = z_{n+1} - z_n, \quad z_{n,x} = r(z_n)(z_{n+1}f(y_n) - z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_n) - g(y_{n-1})), \quad (8)$$

Это позволяет расширить круг допустимых преобразований, и, например для цепочек типа I с $f = 0$, дополнительная замена

$$y_n \leftrightarrow g_n = g(y_n)$$

приводит уравнения (8) к симметричному виду

$$z_{n,x} = r(z_n)(g_n - g_{n-1}), \quad g_{n,x} = \tilde{r}(g_n)(z_{n+1} - z_n). \quad (9)$$

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением цепочек, удовлетворяющих условию невырожденности

$$f \neq 0, \quad |f'| + |g'| \neq 0.$$

К цепочкам типа I мы вернемся в следующем разделе.

Обобщением классического преобразования Лежандра на размерность $1 + \varepsilon$ служит переход $y_n, z_n \leftrightarrow Y_n, Z_{n+1}$ к обобщенным импульсам (6). Вообще говоря, эта замена изменяет вид цепочек (8). Поэтому мы принимаем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Невырожденная цепочка (8) называется интегрируемой, если хотя бы одно из двух преобразований Лежандра

$$T_- : Y_n = c'(z_n) - a(y_n), \quad Z_{n+1} = z_n f(y_n) + g(y_n), \quad (10)$$

$$T_+ : Y_n^1 = c'(z_{n+1}) - a(y_n), \quad Z_n^1 = z_{n+1} f(y_n) + g(y_n) \quad (11)$$

обратно и переводит (8) в цепочку того же вида, возможно, с новыми коэффициентами r, f, g .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Наличие двух преобразований Лежандра связано с инвариантностью цепочки (8) относительно отражения σ :

$$\tilde{q}_n = -q_{-n}, \quad \tilde{x} = -x \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y}_n = y_{-n-1}, \quad \tilde{z}_n = z_{-n},$$

сохраняющего функционал действия. Преобразования T_- и T_+ переходят при этом друг в друга: $T_+ = \sigma T_- \sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если не обращать внимания на необратимость преобразования $q, p \leftrightarrow Q, P$, то мы требуем, чтобы указанные замены были каноническими преобразованиями, сохраняющими стандартную скобку Пуассона и гамильтониан (см. п. 4.2).

Как уже говорилось, для цепочек типа I преобразование

$$Y_n = c'(z_n), \quad Z_{n+1} = g(y_n),$$

аналогичное (10), (11), эквивалентно элементарной замене переменных (ср. (9)). Напротив, в случае цепочек типа II определение 1 позволяет провести исчерпывающую классификацию этих цепочек.

ТЕОРЕМА 1. *Невырожденная цепочка интегрируема, если и только если*

$$r = r_2 z^2 + r_1 z + r_0, \quad f' = \alpha f - r_1 f^2 + 2r_2 f g, \quad g' = \beta f - 2r_0 f^2 + r_1 f g, \quad (12)$$

где α, β — произвольные постоянные. При этом обратные преобразования Лежандра имеют вид

$$T_-^{-1}: \quad y_n = C'(Z_{n+1}) - A(Y_n), \quad z_n = Z_{n+1}F(Y_n) + G(Y_n), \quad (13)$$

$$T_+^{-1}: \quad y_n = C'(Z_n^1) - A(Y_n^1), \quad z_{n+1} = Z_n^1 F(Y_n^1) + G(Y_n^1), \quad (14)$$

а переменные Y, Z и Y^1, Z^1 удовлетворяют цепочке

$$\begin{aligned} Y_{n,x} &= Z_{n+1} - Z_n, \\ Z_{n,x} &= R(Z_n)(Z_{n+1}F(Y_n) - Z_{n-1}F(Y_{n-1}) + G(Y_n) - G(Y_{n-1})), \end{aligned} \quad (15)$$

где $R = 1/C''$, $F = A'$, $G = B'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем вычисления только для преобразования T_- . Обращая матрицу Якоби преобразования (10), получаем (для краткости индекс n опущен)

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \partial y / \partial Y & \partial z / \partial Y \\ \partial y / \partial Z_1 & \partial z / \partial Z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f & -zf' - g' \\ -1/r & -f \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\Delta = -f^2 - \frac{1}{r}(zf' + g') \neq 0$ согласно определению 1. Легко убедиться, что после замены (10) цепочка (8) принимает вид

$$Y_{n,x} = Z_{n+1} - Z_n, \quad Z_{n+1,x} = r(z_n)(f(y_n)(Z_{n+1} - Z_n) - \Delta_n(z_{n+1} - z_n)), \quad (17)$$

где, конечно, еще нужно выразить z_{n+1} , z_n , y_n через Z_{n+2} , Z_{n+1} , Y_{n+1} , Y_n . Заметим, что здесь от Z_{n+2} зависит только z_{n+1} . Таким образом, имеем необходимое условие $\partial^2 z_n / \partial Z_{n+1}^2 = 0$. Вычисление показывает, что для этого $r(z)$, $f(y)$ и $g(y)$ должны быть связаны соотношением

$$f(zf'' + g'') - f'(zf' + g') + 2f^2 f' r - f^2(zf' + g')r' = 0. \quad (18)$$

Дважды дифференцируя (18) по z , получаем $(zf' + g')r''' = 0$, откуда в силу невырожденности следует, что r есть полином степени не выше 2. Далее, деля (18) на f^2 и интегрируя по y , получаем

$$zf' + g' + 2f^2 r - f(zf + g)r' = f(\alpha z + \beta).$$

Расщепление этого уравнения по z и дает (12). Покажем, что условие (12) является и достаточным, т.е. что новая цепочка принадлежит тому же классу, что и исходная.

Из (16) имеем $\partial y / \partial Y = -\partial z / \partial Z_1$. Сравнивая это соотношение с условием $\partial^2 z / \partial Z_1^2 = 0$, получаем, что обратная замена имеет вид (13). Далее, из соотношений

$$\partial y / \partial Y = \frac{f}{\Delta} = -F, \quad \partial y / \partial Z_1 = -\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{R}$$

получаем $\Delta r = -R$, $rf = RF$, что и позволяет переписать (17) в виде (15).

Система (12) имеет первый интеграл

$$\gamma = r_0 f^2 - r_1 f g + r_2 g^2 + \alpha g - \beta f. \quad (19)$$

Исключая g с его помощью, находим, что f удовлетворяет уравнению

$$f'^2 = K_0 f^4 + K_1 f^3 + K_2 f^2,$$

где $K_0 = r_1^2 - 4r_2 r_0$, $K_1 = 4\beta r_2 - 2\alpha r_1$ и $K_2 = \alpha^2 + 4\gamma r_2$. Таким образом, f и g выражаются через элементарные функции.

Заметим, что цепочки естественно различать с точностью до линейных замен

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= k_0 x, & \tilde{y} &= k_1 y + k_2, & \tilde{z} &= k_1 z / k_0 + k_3, \\ \tilde{c} &= k_4 c + k_5 z + k_6, & \tilde{a} &= k_4 a, & \tilde{b} &= k_4 b + k_7 y + k_8. \end{aligned} \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 2 (КЛАССИФИКАЦИОННАЯ). *Невырожденная интегрируемая цепочка вида (8) заменами (20) приводится к одной из следующих цепочек:*

$$z_{n,x} = z_{n+1} e^{y_n} - z_{n-1} e^{y_{n-1}} - e^{2y_n} + e^{2y_{n-1}}, \quad (21)$$

$$z_{n,x} = z_n \left(\frac{z_{n+1}}{y_n} - \frac{z_{n-1}}{y_{n-1}} + y_n - y_{n-1} \right), \quad (22)$$

$$z_{n,x} = z_n \left(\frac{z_{n+1}}{1 + \mu e^{-y_n}} - \frac{z_{n-1}}{1 + \mu e^{-y_{n-1}}} + \nu (e^{y_n} - e^{y_{n-1}}) \right), \quad (23)$$

$$z_{n,x} = z_n(z_n + 1) \left(\frac{z_{n+1}}{y_n} - \frac{z_{n-1}}{y_{n-1}} \right), \quad (24)$$

$$z_{n,x} = z_n(z_n - \mu) \left(\frac{z_{n+1}}{\mu + e^{y_n}} - \frac{z_{n-1}}{\mu + e^{y_{n-1}}} \right), \quad (25)$$

$$z_{n,x} = (z_n^2 + \mu) \left(\frac{z_{n+1} - y_n}{\mu + y_n^2} - \frac{z_{n-1} - y_{n-1}}{\mu + y_{n-1}^2} \right), \quad (26)$$

$$z_{n,x} = \frac{1}{2}(z_n^2 + 1 - \mu^2) \left(\frac{z_{n+1} - \operatorname{sh} y_n}{\mu + \operatorname{ch} y_n} - \frac{z_{n-1} - \operatorname{sh} y_{n-1}}{\mu + \operatorname{ch} y_{n-1}} \right). \quad (27)$$

Очевидно, что функции R , F и G в (13)–(15) удовлетворяют системе, аналогичной (12). Нам в дальнейшем понадобится только явный вид полинома R :

$$R(Z) = r_2 Z^2 + \alpha Z - \gamma. \quad (28)$$

Эта формула легко выводится из соотношения $R = -\Delta r$ с учетом первого интеграла (19).

Сравнивая преобразования $T_{\pm}$ и их обратные, мы приходим к выводу, что либо цепочка переходит в себя, либо имеется пара дуальных цепочек, переходящих друг в друга. Точнее, нужно говорить не о цепочках, а о классах цепочек, эквивалентных по модулю преобразований (20).

Непосредственная проверка списка показывает, что пары образуют цепочки (21) и (22), (24) и (25₀), (26) и (27_{±1}), остальные же цепочки переходят в себя. Более подробно, замены T_- даются следующими формулами (индексы в номерах соответствуют параметрам цепочек):

$$\begin{aligned} (21) \rightarrow (22) & \quad Y_n = z_n - e^{y_n}, \quad Z_{n+1} = (z_n - e^{y_n})e^{y_n}, \\ (22) \rightarrow (21) & \quad Y_n = \ln \frac{z_n}{y_n}, \quad Z_{n+1} = \frac{z_n}{y_n} + y_n, \\ (23_{\mu,\nu}) \rightarrow (23_{\nu e^\delta, \mu e^{-\delta}}) & \quad Y_n = \ln \frac{z_n}{\mu + e^{y_n}} + \delta, \quad Z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + \mu e^{-y_n}} + \nu e^{y_n}, \\ (24) \rightarrow (25_0) & \quad Y_n = \ln \frac{z_n}{y_n(z_n + 1)}, \quad Z_{n+1} = \frac{z_n}{y_n}, \\ (25_0) \rightarrow (24) & \quad Y_n = e^{-y_n} - \frac{1}{z_n}, \quad Z_{n+1} = z_n e^{-y_n} - 1, \\ (25_\mu) \rightarrow (25_\mu) & \quad Y_n = \ln \frac{\mu z_n}{(\mu - z_n)(1 + \mu e^{-y_n})}, \quad Z_{n+1} = \mu - \frac{\mu z_n}{\mu + e^{y_n}}, \quad \mu \neq 0, \\ (26_0) \rightarrow (26_0) & \quad Y_n = \frac{1}{z_n} - \frac{1}{y_n}, \quad Z_{n+1} = \frac{1}{y_n} - \frac{z_n}{y_n^2}, \\ (26_{-\nu^2}) \rightarrow (27_{-1}) & \quad Y_n = \ln \frac{(z_n - \nu)(y_n + \nu)}{(z_n + \nu)(y_n - \nu)}, \quad Z_{n+1} = \frac{2\nu(z_n - y_n)}{y_n^2 - \nu^2}, \quad \nu \neq 0, \\ (27_{-1}) \rightarrow (26_{-\nu^2}) & \quad Y_n = \nu \left(\frac{e^{y_n} + 1}{e^{y_n} - 1} - \frac{2}{z_n} \right), \quad Z_{n+1} = \nu \frac{z_n - \operatorname{sh} y_n}{\operatorname{ch} y_n - 1}, \quad \nu \neq 0, \\ (27_\mu) \rightarrow (27_\mu) & \quad Y_n = \ln \frac{(\lambda - z_n)(e^{y_n} + \nu)}{(\lambda + z_n)(\nu e^{y_n} + 1)}, \quad Z_{n+1} = \lambda \frac{z_n - \operatorname{sh} y_n}{\mu + \operatorname{ch} y_n}, \quad \mu \neq \pm 1. \end{aligned}$$

В последней формуле $2\mu = \nu + 1/\nu$, $2\lambda = \nu - 1/\nu$.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Как будет показано в пункте 4.2, все интегрируемые цепочки типа II связаны между собой преобразованиями типа Миуры. Аналогичные преобразования для цепочек типа I хорошо известны, см., например [7]. Связь между цепочками различных классов носит иной характер, и при построении единой теории естественно возникают уравнения на решетке (см. ниже п. 2.2).

2.1. Присоединенные цепочки. Композиция замен, введенных в предыдущем разделе, позволяет получить автопреобразование цепочки (8), причем уже в переменных q_n . Обозначая его итерации верхним индексом, мы вводим тем самым второе дискретное время.

ТЕОРЕМА 3. Преобразование $\tau = T_-^{-1}T_+$ задает каноническое преобразование цепочки (8), эквивалентное сдвигу в некоторой цепочке типа I (которую мы в дальнейшем называем присоединенной к (8)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая итерации отображений $\tau = T_-^{-1}T_+$ и $T = T_+T_-^{-1}$ верхним индексом, получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 y^{m-1}, z^{m-1} & \xrightarrow{\tau} & y^m, z^m & \xrightarrow{\tau} & y^{m+1}, z^{m+1} & & \\
 \dots & & \searrow T_- & & \searrow T_- & & \dots \\
 & & Y^m, Z^m & \xrightarrow{T} & Y^{m+1}, Z^{m+1} & \xrightarrow{T} & Y^{m+2}, Z^{m+2} \\
 & & \nearrow T_+ & & \nearrow T_+ & &
 \end{array}$$

При этом непосредственно из формул (8) и (15) следует, что при любом n переменные z_n^m и Z_n^m удовлетворяют уравнениям

$$z_x^m = r(z^m)(Z^{m+1} - Z^m), \quad Z_x^m = R(Z^m)(z^m - z^{m-1}). \quad (29)$$

Полагая

$$z^m = q_x^m, \quad C'(Z^m) = q^m - q^{m-1}, \quad \varphi(C'(Z)) = Z,$$

получим цепочку типа I:

$$q_{xx}^m = r(q_x^m)(\varphi(q^{m+1} - q^m) - \varphi(q^m - q^{m-1})). \quad (30)$$

Разумеется, точно так же можно получить дуальную цепочку

$$Q_{xx}^m = R(Q_x^m)(\Phi(Q^{m+1} - Q^m) - \Phi(Q^m - Q^{m-1})). \quad (31)$$

Функции φ , Φ из формул (30), (31), удовлетворяют соответственно уравнениям $\varphi' = R(\varphi)$, $\Phi' = r(\Phi)$. Опуская индексы, мы немедленно воспроизводим список интегрируемых цепочек типа I [7]:

$$y_{n,x} = z_{n+1} - z_n, \quad z_{n,x} = r(z_n)(g(y_n) - g(y_{n-1})), \quad (32)$$

$$r(z) = r_2 z^2 + r_1 z + r_0, \quad g'(y) = R(g) = r_2 g^2 + \alpha g - \gamma. \quad (33)$$

В том случае, когда r и R совпадают, замена $w_{2m} = z^m$, $w_{2m-1} = Z^m$ позволяет переписать (29) в виде цепочки Вольтера [6]

$$w_x^m = r(w^m)(w^{m+1} - w^{m-1}). \quad (34)$$

Итак, переменные q_n^m образуют двухиндексную совокупность, причем при фиксированном верхнем индексе они удовлетворяют цепочке типа I, а при фиксированном нижнем – цепочке типа II. При этом сдвиг по каждому из индексов согласован с динамикой по x . Иными словами, цепочки типа Тоды (30) и цепочки с магнитным полем (8) задают преобразования Бэклунда друг для друга. С помощью формул (10) и (11) связь между q_n^m с различными индексами можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(q_{n+1}^{m+1} - q_n^{m+1}) &= q_{n,x}^{m+1} f(q_{n+1}^{m+1} - q_n^{m+1}) + g(q_{n+1}^{m+1} - q_n^{m+1}), \\ \varphi(q_n^{m+1} - q_n^m) &= q_{n+1,x}^m f(q_{n+1}^m - q_n^m) + g(q_{n+1}^m - q_n^m). \end{aligned} \quad (35)$$

Более подробно, чем на приведенной выше диаграмме, преобразования T_- и T_+ изображены на рисунке. Вершины заштрихованных квадратов соответствуют переменным, связанным преобразованием, написанным в центре. Отображениям τ и T соответствует сдвиг по диагонали решетки.

2.2. Примеры. Исключая из (35) производные, мы получим чисто разностные уравнения на решетке. Например, для цепочки (22) автопреобразование τ имеет вид

$$y_n^1 = y_{n+1} + \frac{z_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{z_{n+1}}{y_n}, \quad z_n^1 = \frac{z_{n+1}}{y_n} \left(y_{n+1} + \frac{z_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{z_{n+1}}{y_n} \right).$$

Пусть цепочка замкнута периодически, т.е. $n \in \mathbb{Z}_N$. Тогда она превращается в некоторую динамическую систему в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}$, а преобразование τ – в отображение $\mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, которое переводит решения этой системы в ее же решения. По аналогии с уже изученными моделями (см., например, [4, 8, 9]) естественно предположить, что и динамическая система, и отображение τ интегрируемы по Лиувиллю.

Более общие, чем (35), уравнения на решетке можно получить, рассмотрев цепочки вида (8) с явной зависимостью от n . Классификация таких цепочек – еще не решенная задача, и мы ограничимся одним простым примером. Преобразование Бэклунда для цепочки Тоды

$$q_{xx}^m = e^{q^{m+1} - q^m} - e^{q^m - q^{m-1}}$$

имеет вид (см., например, [5, § 3.9])

$$\begin{aligned} q_{n,x}^{m+1} &= \alpha_n e^{q_{n+1}^{m+1} - q_n^{m+1}} + \frac{1}{\alpha_n} e^{q_n^{m+1} - q_{n+1}^m} + \beta_n, \\ q_{n+1,x}^m &= \alpha_n e^{q_{n+1}^m - q_n^m} + \frac{1}{\alpha_n} e^{q_n^{m+1} - q_{n+1}^m} + \beta_n. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что исключение сдвигов по m приводит к цепочке типа (21) с переменными коэффициентами

$$z_{n,x} = \alpha_n (z_{n+1} - \beta_n) e^{y_n} - \alpha_{n-1} (z_{n-1} - \beta_{n-1}) e^{y_{n-1}} - \alpha_n^2 e^{2y_n} + \alpha_{n-1}^2 e^{2y_{n-1}}.$$

Множитель α_n обращается в нуль заменой $q_n = \tilde{q}_n + c_n$, $c_n - c_{n+1} = \ln \alpha_n$. Зависимость от β_n оказывается существенной.

3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

3.1. Неприводимые цепочки. Цепочки (1), не обладающие элементарными симметриями $q_{n,\tau} = \psi(q_n)$, заслуживают отдельного рассмотрения. Более того, в силу доказанной в [1] классификационной теоремы все интегрируемые цепочки типа II можно трактовать как частные случаи цепочки

$$\begin{aligned} z_{n,x} &= -(z_n^2 + r(q_n)) \left(\frac{z_{n+1}}{h(q_{n+1}, q_n)} - \frac{z_{n-1}}{h(q_n, q_{n-1})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \partial_{q_n} \ln(h(q_{n+1}, q_n) h(q_n, q_{n-1})) \right) - \frac{1}{2} r'(q_n), \end{aligned} \quad (36)$$

где $h(u, v)$ – симметрический полином степени не выше 2 по каждой из переменных:

$$h(u, v) = c_1 u^2 v^2 + c_2 uv(u + v) + c_3 (u - v)^2 + c_4 uv + c_5 (u + v) + c_6, \quad (37)$$

а полином r степени не выше 4 – его дискриминант:

$$4r(v) = 2hh_{uu} - h_u^2, \quad 4r(u) = 2hh_{vv} - h_v^2.$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид (3)

$$L_n = c(z_n, q_n) - z_n a(q_{n+1}, q_n) + \frac{1}{2} \ln h(q_{n+1}, q_n), \quad a_u(u, v) = 1/h(u, v). \quad (38)$$

Аналогично интегрируемые цепочки типа I являются частными случаями цепочки

$$z_x^m = -((z^m)^2 + r(q^m)) \left(\frac{1}{q^{m+1} - q^m} - \frac{1}{q^m - q^{m-1}} \right) - \frac{1}{2} r'(q^m), \quad r^V = 0, \quad (39)$$

с лагранжианом

$$L^m = c(z^m, q^m) - \ln(q^{m+1} - q^m). \quad (40)$$

В обоих случаях функция c , определяющая кинетическую энергию, имеет вид

$$c(z, q) = -\frac{1}{2\sqrt{r}} [(\sqrt{r} + iz) \ln(\sqrt{r} + iz) + (\sqrt{r} - iz) \ln(\sqrt{r} - iz)].$$

Точечная замена

$$q = Q(\hat{q}), \quad (Q')^2 = r(Q)$$

сохраняет общую структуру лагранжианов и позволяет исключить зависимость от q из c . Это удобно делать в случаях, когда цепочки (36) и (39) обладают классической симметрией $q_\tau = \psi(q)$. Можно показать, что это имеет место тогда и только тогда, когда полином $r(q)$ является полным квадратом, что равносильно приводимости h . При этом $\psi(q) = \sqrt{r(q)}$ — многочлен степени не выше 2, и решение уравнения $q_\tau = \psi(q)$ определяет группу дробно-линейных преобразований.

Для цепочек (36) и (39), можно указать непосредственный аналог преобразования Бэклунда (35).

ТЕОРЕМА 4. *Цепочки (36) и (39) (с одним и тем же полиномом r) получаются при исключении сдвигов по m и n соответственно из соотношений*

$$\begin{aligned} q_{n,x}^{m+1} &= \left(\frac{1}{q_{n+1}^{m+1} - q_{n+1}^m} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_{n+1}^m} \right) h(q_n^{m+1}, q_{n+1}^m), \\ q_{n+1,x}^m &= \left(\frac{1}{q_n^{m+1} - q_n^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_n^{m+1}} \right) h(q_n^{m+1}, q_{n+1}^m). \end{aligned} \quad (41)$$

Утверждение доказывается прямым, хотя и весьма трудоемким, вычислением. Чтобы выделить сдвиг по n , зафиксируем m и положим $q_n^m = p_n$, $q_n^{m+1} = q_n$, тогда (41) примет вид

$$\begin{aligned} q_{n,x} &= \left(\frac{1}{q_{n+1} - p_{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{n+1}} \right) h(q_n, p_{n+1}), \\ p_{n+1,x} &= \left(\frac{1}{q_n - p_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) h(q_n, p_{n+1}). \end{aligned}$$

Фиксируя n и полагая $q_n^m = p^m$, $q_{n+1}^m = q^m$, получаем аналогично

$$\begin{aligned} q_x &= \left(\frac{1}{p^{m+1} - p^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^{m+1}} \right) h(p^{m+1}, q^m), \\ p_x^{m+1} &= \left(\frac{1}{q^{m+1} - q^m} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^m} \right) h(p^{m+1}, q^m). \end{aligned}$$

Цепочки (36) и (39) получаются теперь при исключении переменных p .

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно проверить, что, помимо связи, указанной в теореме 4, цепочки вида (36) и (39) связаны предельным переходом

$$c_3 \rightarrow \infty, \quad c_i = \text{const}, \quad i \neq 3.$$

При этом полиномы r в этих цепочках различны: в цепочке (39) $r(q) = c_1 q^4 + 2c_2 q^3 + c_4 q^2 + 2c_5 q + c_6$.

3.2. Векторный пример. С физической точки зрения привлекательны векторные цепочки ($q_n \in \mathbb{R}^d$). Рассмотрим наивное обобщение лагранжиана (4) в виде

$$L_n = c_n - \langle z_n, y_n \rangle a_n - b_n, \quad (42)$$

где $c_n = c(\langle z_n, z_n \rangle)$, $a_n = a(\langle y_n, y_n \rangle)$, $b_n = b(\langle y_n, y_n \rangle)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение. Можно рассмотреть и более общие члены, например вида $\langle y_n, J y_n \rangle$ или $\langle z_n, [y_n, J y_n] \rangle$. При этом пропадет инвариантность относительно группы вращений. Обобщенный импульс равен

$$Y_n = \partial L_n / \partial z_n = 2c'_n z_n - a_n y_n.$$

Инвариантность относительно сдвигов приводит к векторному закону сохранения импульса

$$Y_{n,x} = Z_{n+1} - Z_n, \quad Z_{n+1} = a_n z_n + 2a'_n \langle z_n, y_n \rangle y_n + 2b'_n y_n.$$

Гамильтониан равен $I_1 = \sum (\langle Y_n, z_n \rangle - L_n) = \sum [2c'_n \langle z_n, z_n \rangle - c_n + b_n]$.

Мы ограничимся только одним примером. Рассмотрим лагранжиан

$$L_n = \ln \langle z_n, z_n \rangle - 2 \frac{\langle z_n, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} - \ln \langle y_n, y_n \rangle,$$

обобщающий лагранжиан скалярной цепочки (26) при $\mu = 0$. Соответствующая векторная цепочка может быть записана в виде, аналогичном (26), если ввести некоторые обозначения. А именно, рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ тернарное умножение

$$\{u, v, w\} = \langle u, v \rangle w + \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v$$

и положим $P_u(v) = \{u, v, u\} = 2\langle u, v \rangle u - \langle u, u \rangle v$. Известно, что такое умножение наделяет $\mathbb{R}^d$ структурой тройной йордановой системы. Оператор P_u обратим:

$$P_u^{-1} = \frac{1}{\langle u, u \rangle^2} P_u.$$

При помощи этого оператора рассматриваемая нами цепочка записывается очень компактно:

$$z_{n,x} = P_{z_n} (P_{y_n}^{-1} (z_{n+1} - y_n) - P_{y_{n-1}}^{-1} (z_{n-1} - y_{n-1})).$$

Соответствующее преобразование Лежандра T_- имеет вид

$$Y_n = \frac{z_n}{\langle z_n, z_n \rangle} - \frac{y_n}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad Z_{n+1} = \frac{y_n}{\langle y_n, y_n \rangle} - P_{y_n}^{-1} (z_n),$$

и, как нетрудно убедиться, отображает цепочку в себя.

Можно надеяться по аналогии со скалярным случаем, что анализ преобразования Лежандра позволит и здесь эффективно описать некоторый класс интегрируемых лагранжианов. Следует только заметить, что сдвигово-инвариантная калибровка цепочек типа II не всегда является самой удобной для векторных обобщений. В ряде случаев, по-видимому, достаточно постулировать инвариантность относительно некоторой дробно-линейной группы.

4. БИГАМИЛЬТОНОВОСТЬ

Стандартные вычисления показывают, что уравнение Эйлера для лагранжиана (3) при произвольных c, a, b является гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$I_1 = \sum (z_n Y_n - L_n) = \sum [z_n c_{z_n}(z_n, q_n) - c(z_n, q_n) + b(q_{n+1}, q_n)] \quad (43)$$

и скобками Пуассона

$$\{q_n, z_n\} = r(z_n, q_n), \quad \{z_n, z_{n+1}\} = f(q_{n+1}, q_n) r(z_n, q_n) r(z_{n+1}, q_{n+1}). \quad (44)$$

Здесь $r(z, q) = 1/c_{zz}(z, q)$, $f(u, v) = a_u(u, v)$ и приведены, естественно, только ненулевые скобки. В дополнение к интегралу энергии (43) рассматриваемые интегрируемые цепочки обладают достаточно простым высшим интегралом I_2 , который будет построен в пункте 4.1 с помощью теоремы Нетер.

Отметим в этой связи, что в нашей предыдущей работе [1] в качестве критерия интегрируемости использовался симметричный тест, т.е. цепочка (1), обладающая симметрией вида

$$q_{n,t} = \Psi_n = \Psi(q_n, q_{n\pm 1}, z_n, z_{n\pm 1}), \quad (45)$$

называлась интегрируемой. Как уже говорилось, инвариантность цепочек типа II относительно преобразований Лежандра выделяет в точности тот же класс цепочек¹⁾.

4.1. Теорема Нетер. Учитывая результаты [1], мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5. *Лагранжианы (4), допускающие вариационную симметрию*

$$q_{n,t} = r(z_n)(z_{n+1}f(y_n) + z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_n) + g(y_{n-1})) + s(z_n), \quad (46)$$

где $s(z) = \alpha z^2 + \mu z + \nu$, приводят к цепочкам (8), (12) либо (32), (33).

Заметим, что коэффициенты μ и ν произвольны (они отвечают классическим симметриям $x \rightarrow x + c$, $q \rightarrow q + c$), в частности, их можно положить равными нулю. При $r_2 \neq 0$ коэффициент α также может быть сделан нулевым за счет переобозначения $g \rightarrow g + c$, которое не меняет самой цепочки по x .

Доказательство сводится к проверке условия

$$L_{n,t} = N_{n,x} + M_n - M_{n-1}, \quad (47)$$

где N_n, M_n являются функциями от $q_n, q_{n\pm 1}, z_n, z_{n\pm 1}$. Проверка (47) проводится прямым вычислением. Более того, при этом можно даже, как и в случае классических симметрий $q_{n,\tau} = \psi(q_n, q_{n,x})$, не пользоваться уравнениями (1).

Аналогом этой теоремы в случае специальных цепочек из пункта 3.1 является следующая:

¹⁾ В этом можно убедиться, сравнив уравнения (12) для коэффициентов f, g из теоремы 2 с соответствующими уравнениями работы [1].

ТЕОРЕМА 6. *Уравнения*

$$q_{n,t} = (z_n^2 + r(q_n)) \left(\frac{z_{n+1}}{h(q_{n+1}, q_n)} + \frac{z_{n-1}}{h(q_n, q_{n-1})} - \frac{1}{2} \partial_{q_n} \ln \frac{h(q_{n+1}, q_n)}{h(q_n, q_{n-1})} \right),$$

$$q_t^m = ((z^m)^2 + r(q^m)) \left(\frac{1}{q^{m+1} - q^m} + \frac{1}{q^m - q^{m-1}} \right)$$

задают вариационную симметрию лагранжианов (38) и (40), соответственно.

В силу теоремы Нетер каждая вариационная симметрия $q_{n,t} = \psi_n$ порождает закон сохранения вида $P_{n,x} = Q_n - Q_{n-1}$. Точнее, имеет место следующее тождество (ср. [10, § 5.3]):

$$\psi_n \rho_n(z_{n,x} - \Phi_n) = P_{n,x} - Q_n + Q_{n-1}. \quad (48)$$

В частности, при $\psi_n = 1$, z_n эта формула дает соответственно законы сохранения импульса и энергии.

Применение (48) к (32), (33) и (46) приводит к дополнительному закону сохранения:

$$(r(z_n)(g(y_n) + g(y_{n-1})) + s(z_n))(z_{n,x}/r(z_n) + g(y_{n-1}) - g(y_n)) = P_{n,x} - Q_n + Q_{n-1},$$

где

$$P_n = d(z_n) + z_n(g(y_n) + g(y_{n-1})) + h(y_n),$$

$$Q_n = z_n z_{n+1} R(g(y_n)) + (r_1 z_{n+1} + r_0) g^2(y_n) + (\mu z_{n+1} + \nu) g(y_n),$$

$$d'(z) = s(z)/r(z), \quad h'(y) = r_1 g^2(y) + \mu g(y).$$

Проделав аналогичное вычисление для цепочек из теоремы 1, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функции r , f и g удовлетворяют условиям (12) либо при $f = 0$ условиям (33), тогда цепочка (8) имеет дополнительный первый интеграл вида

$$I_2 = \sum [d(z_n) + z_{n+1} z_n f(y_n) + (z_{n+1} + z_n) g(y_n) + h(y_n)], \quad (49)$$

где функции $d(z)$ и $h(y)$ определяются соотношениями

$$d' = s(z)/r(z), \quad h' = \mu g - \nu f - 2r_0 f g + r_1 g^2. \quad (50)$$

Этот интеграл является гамильтонианом для цепочки (46) и находится в инволюции с I_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для функций d и h нетрудно указать также и явные выражения, которые, однако, зависят от вида цепочки. Например, при $r_2 \neq 0$, выбирая $\mu = \alpha r_1 / r_2$, $\nu = \alpha r_0 / r_2$, находим $d = \alpha z / r_2$, $h = (r_1 g - r_0 f) / r_2$.

В работе [1] подробно обсуждалась простая связь симметрий (45) с нелинейными эволюционными уравнениями типа НУШ. А именно, для интегрируемой цепочки, обозначив $q_{n+1} = u$, $q_n = v$, получаем, складывая и вычитая уравнения (1), (45), соответствующую эволюционную систему типа НУШ. В частности, в применении к (5), (46) это дает

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2r(u_x)(v_x f(u - v) + g(u - v)) + s(u_x), \\ v_t + v_{xx} &= 2r(v_x)(u_x f(u - v) + g(u - v)) + s(v_x). \end{aligned}$$

Другой естественный выбор переменных u , v приводящий к так называемым дивергентным системам [11], т.е. системам вида

$$u_t = u_{xx} + (2r(u)v + s(u))_x, \quad v_t = -v_{xx} + (2R(v)u + S(v))_x, \quad (51)$$

где r , s , R , S — некоторые многочлены степени не выше 2, выводится непосредственно в преобразованиях Лежандра. Действительно, дифференцируя (8) и (46) по x , получаем уравнения

$$\begin{aligned} z_{n,xx} &= [r(z_n)(z_{n+1}f(y_n) - z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_n) - g(y_{n-1}))]_x, \\ z_{n,t} &= [r(z_n)(z_{n+1}f(y_n) + z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_n) + g(y_{n-1})) + s(z_n)]_x. \end{aligned}$$

Положим $u = z_n$, $v = Z_n$. В силу теоремы 1 Z_n удовлетворяют таким же цепочкам, но с прописными буквами R , F , G , S :

$$\begin{aligned} Z_{n,xx} &= [R(Z_n)(Z_{n+1}F(Y_n) - Z_{n-1}F(Y_{n-1}) + G(Y_n) - G(Y_{n-1}))]_x, \\ Z_{n,t} &= [R(Z_n)(Z_{n+1}F(Y_n) + Z_{n-1}F(Y_{n-1}) + G(Y_n) + G(Y_{n-1})) + S(Z_n)]_x. \end{aligned}$$

При этом согласно формулам (10), (13)

$$u = z_n = Z_{n+1}F(Y_n) + G(Y_n), \quad v = Z_n = z_{n-1}f(y_{n-1}) + g(y_{n-1}),$$

откуда, складывая и вычитая, получаем (51).

4.2. Преобразования типа Миуры. Помимо интеграла энергии (43), цепочка (8) обладает первым интегралом

$$I_0 = \sum Y_n = \sum [c'(z_n) - a(y_n)], \quad (52)$$

выражающим закон сохранения импульса $Y_{n,x} = Z_{n+1} - Z_n$. Еще один первый интеграл $\tilde{I}_0 = \sum y_n$ является результатом перехода к переменным y_n и исчезает в переменных q_n . Интегралы I_0 , $\tilde{I}_0$ являются аннуляторами пуассоновой структуры (44), которая в переменных y , z принимает вид

$$\{y_n, z_n\} = -r(z_n), \quad \{y_n, z_{n+1}\} = r(z_{n+1}), \quad \{z_n, z_{n+1}\} = f(y_n)r(z_n)r(z_{n+1}).$$

Преобразование Лежандра (10) заключается в переходе от переменных y, z к плотности Y и потоку Z закона сохранения импульса. Взяв вместо него закон сохранения энергии, мы получим преобразование

$$Y_n = z_n c'(z_n) - c(z_n) + b(y_n), \quad Z_{n+1} = z_{n+1}(z_n f(y_n) + g(y_n)). \quad (53)$$

В отличие от (10) оно может быть необратимым. По этой причине мы будем называть его преобразованием типа Миуры (даже в тех случаях, когда обратимость имеет место).

Требование, чтобы замена (53) сохраняла вид цепочки, приводит к более строгим ограничениям на r, f, g , чем в теореме 1. В частности, легко показать, что многочлен $R(Z)$ должен быть первой степени. Полагая (не теряя общности) $R = Z$, получаем далее соотношения $r_0 = \gamma = 0$. Очевидно, например, что цепочка (21) не удовлетворяет этому условию.

Тем не менее прямая проверка остальных цепочек показывает, что используя при необходимости замены (20), можно получить преобразования Миуры, не выводящие за пределы списка:

$$\begin{aligned} (23_{\mu, \nu}) \rightarrow (22) \quad & Y_n = z_n + \nu(e^{y_n} + \mu), \quad Z_{n+1} = \frac{z_{n+1}z_n}{1 + \mu e^{-y_n}} + \nu z_{n+1} e^{y_n}, \\ (24) \rightarrow (23_{-1, 0}) \quad & Y_n = \ln(z_n + 1), \quad Z_{n+1} = \frac{z_n z_{n+1}}{y_n}, \\ (25_{\mu}) \rightarrow (23_{-1, 0}) \quad & Y_n = \ln(z_n - \mu) - y_n, \quad Z_{n+1} = z_{n+1} \left(\frac{z_n}{\mu + e^{y_n}} - 1 \right), \\ (25_{\mu}) \rightarrow (23_{\mu, -1}) \quad & Y_n = \ln(z_n - \mu), \quad Z_{n+1} = \frac{z_n z_{n+1}}{\mu + e^{y_n}}, \\ (26_{-\nu^2}) \rightarrow (23_{-1, -1}) \quad & Y_n = \ln \frac{z_n + \nu}{y_n + \nu}, \quad Z_{n+1} = \frac{(z_{n+1} - \nu)(z_n - y_n)}{y_n^2 - \nu^2}, \\ (27_{\mu}) \rightarrow (23_{-1, \nu}) \quad & Y_n = \ln \frac{z_n + \lambda}{e^{y_n} + \nu}, \quad Z_{n+1} = \frac{z_{n+1} - \lambda}{2} \left(\frac{z_n - \operatorname{sh} y_n}{\mu + \operatorname{ch} y_n} - 1 \right), \\ & 2\mu = \nu + \frac{1}{\nu}, \quad 2\lambda = \nu - \frac{1}{\nu}. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти формулы с приведенными в конце раздела 1, мы можем легко убедиться в связности графа замен. Таким образом, общий вывод заключается в том, что *все интегрируемые цепочки типа II представляют собой разные записи одного и того же объекта*. Это утверждение, правда, не совсем строгое, т.к. некоторые стрелки соответствуют необратимым заменам.

Преобразования Миуры позволяют с легкостью установить бигамильтоновость цепочки (23) (а следовательно, и цепочек (22), (24), (25), которые связаны с ней или ее вырождениями обратимыми заменами). В качестве простейшего примера можно взять последовательность $(24) \rightarrow (23_{-1, 0}) \rightarrow (22)$, в которой обе замены обратимы. Гамильтонианы для этих цепочек равны соответственно

$$I_1 = \sum \ln(z_n + 1), \quad I_1 = \sum z_n, \quad I_1 = \sum \left(z_n + \frac{1}{2} y_n^2 \right).$$

Пересчитывая их и соответствующие скобки Пуассона (44) в переменных какой-то одной из трех цепочек, мы, очевидно, получим для нее три гамильтоновы структуры. Можно проверить, что они будут согласованными. Тригамильтоновость цепочки Руйзенарса $(23_{-1,0})$ была установлена впервые в работе [12]. Отметим, что для нее приведенные выше гамильтонианы превращаются соответственно в первые интегралы

$$\tilde{I}_0 = \sum y_n, \quad I_1 = \sum z_n, \quad I_2 = \sum \left(\frac{z_n z_{n+1}}{1 - e^{-y_n}} + \frac{1}{2} z_n^2 \right).$$

Что касается скобок Пуассона, то они слишком громоздки, и мы их не приводим. Заметим только, что, как и в пункте 4.1, переход от переменных y, z к z, Z существенно упрощает запись, т.к. скобки становятся полиномиальными. Сама цепочка $(23_{-1,0})$ тоже переписывается более просто:

$$z_{n,x} = z_{n+1} Z_{n+1} - z_n Z_n, \quad Z_{n,x} = Z_n (z_n - z_{n-1} + Z_n - Z_{n-1}).$$

Мы оставляем обобщения этих наблюдений для дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-93-166-Ext и РФФИ: # 96-01-00128, # 95-01-00755.

Список литературы

- [1] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 323–334.
- [2] D. Levi. J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V. 14. P. 1083–1098.
- [3] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.
- [4] V. E. Adler, R. I. Yamilov. J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 477–492.
- [5] М. Toda. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [6] Р. И. Ямилов. УМН. 1983. Т. 38. № 6. С. 155–156.
- [7] R. I. Yamilov. Classification of Toda type scalar lattices. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1993. P. 423–431.
- [8] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [9] J. Weiss. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 11. P. 2647–2656.
- [10] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [11] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
- [12] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, O. Ragnisco. J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2664.

Поступила в редакцию 4.VI.1997 г.

V. E. Adler, A. B. Shabat

GENERALIZED LEGENDRE TRANSFORMATIONS

We discuss a general theory of the integrable Toda lattices which are considered as Lagrangian dynamical systems with one continuous and one discrete time. The invariance with respect to an analog of the classical Legendre transformations implies their integrability.