Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Муайн, Характеризация многомерных евклидовых состояний Ландау с помощью преобразований когерентных состояний, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 492–499

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:16:21

© 2004 г.

З. Муайн*

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается семейство многомерных обобщенных когерентных состояний, получаемых посредством представления Фока–Баргмана группы Гейзенберга. Доказано, что области значений соответствующих преобразований когерентных состояний совпадают с пространствами связанных состояний системы, являющейся четномерным аналогом заряженной частицы в однородном магнитном поле. Это дает новое описание евклидовых состояний Ландау.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, представление Фока–Баргмана, преобразования когерентных состояний, евклидовы состояния Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет когерентные состояния (КС) привлекли к себе большое внимание. КС являются полезным инструментом в теории поля, и существует много различных определений КС (см. [1] и приведенные там ссылки).

КС для заряженной частицы, движущейся в постоянном однородном магнитном поле, перпендикулярном евклидовой xu -плоскости, изучались в работах [2]–[4] и другими авторами. В этой задаче связанные с нижним уровнем Ландау КС были рассмотрены в [5], а для всех уровней Ландау КС были построены в [6].

В настоящей работе рассматривается четномерный аналог заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле. Для каждого уровня Ландау строится семейство обобщенных когерентных состояний (ОКС). При построении используется метод, в основе которого лежат квадратично интегрируемые на однородном пространстве представления основной группы. Конкретно нас интересует представление Фока–Баргмана группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, реализованное на пространстве Фока $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ целых гауссовых квадратично интегрируемых функций. Установлено, что образы пространства Фока при преобразованиях КС, ассоциированных с построенными ОКС, совпадают с пространствами связанных состояний гамильтониана Ландау в $\mathbb{C}^n$.

*Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics (M'Ghila), Cadi Ayyad University, Béni Mellal, Morocco. E-mail: mouayn@math.net

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 мы представляем гамильтониан Ландау, действующий на гильбертовом пространстве комплекснозначных гауссовых квадратично интегрируемых функций. В разделе 3 дано краткое описание пространств состояний Ландау. В разделе 4 мы даем обзор формализма построения КС с помощью представлений группы, которые являются квадратично интегрируемыми на факторпространстве группы по модулю подгруппы. Этот формализм применяется в разделе 5 к представлению Фока–Баргмана. В разделе 6 устанавливается теорема характеристики для состояний Ландау. В разделе 7 приведены некоторые заключительные замечания.

2. ГАМИЛЬТониан ЛАНДАУ В $\mathbb{C}^n$

В подходящей системе единиц с точностью до аддитивной константы гамильтониан Ландау заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ имеет вид

$$H_B = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n ((\partial_{x_j} + iBy_j)^2 + (\partial_{y_j} - iBx_j)^2) - \frac{n}{2} \quad (1)$$

и действует на пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2n}, d\mu)$, $d\mu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^{2n}$. Для того чтобы использовать комплексную структуру, отождествим евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с пространством $\mathbb{C}^n$ обычным способом. Для $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, пишем $\xi \cdot \zeta = \xi_1 \zeta_1^* + \dots + \xi_n \zeta_n^*$, $\zeta^* = (\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*)$, ζ_j^* – комплексно-сопряженное к $\zeta_j \in \mathbb{C}$ и $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi$. Оператор, соответствующий H_B (1), может быть представлен оператором

$$\tilde{H}_B := e^{B|\xi|^2/2} H_B e^{-B|\xi|^2/2}. \quad (2)$$

В соответствии с (2) произвольный кет-вектор $|\rangle$ представляется функцией

$$\psi(\xi) := e^{B|\xi|^2/2} \langle \xi | \rangle, \quad \psi \in L^2(\mathbb{C}^n, e^{-B|\xi|^2} d\mu).$$

Явное выражение для оператора (2) имеет вид

$$\tilde{H}_B = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_j^*} + B \sum_{j=1}^n \xi_j^* \frac{\partial}{\partial \xi_j^*}. \quad (3)$$

Далее мы полагаем в (3) $B = 1$ и рассматриваем гамильтониан Ландау $\tilde{H} := \tilde{H}_1$, действующий на гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|\xi|^2} d\mu)$, которое снабжено эрмитовым скалярным произведением

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi) e^{-|\xi|^2} \psi(\xi) \varphi(\xi)^*.$$

3. ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ

Представим краткое описание пространств состояний Ландау, определенных как пространства связанных состояний гамильтониана $\tilde{H}$. Прежде всего введем некоторые обозначения. Для $p, q \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{Y}_{p,q}$ пространство сужений на сферу $\mathbf{S}^{2n-1} = \{\omega \in \mathbb{C}^n, |\omega| = 1\}$ однородных (степени p по переменной ξ и степени q по переменной ξ^*) евклидовых гармонических полиномов на пространстве $\mathbb{C}^n$. При $n = 2, 3, \dots$ размерность пространства $\mathcal{Y}_{p,q}$ равна

$$d(n, p, q) = \frac{(p+q-1)(p+n-2)!(q+n-2)!}{p!q!(n-1)!(n-2)!},$$

а для $n = 1$ имеем $pq = 0$, и в этом случае $d(1, p, q) = 1$. Более подробную информацию относительно этих сферических гармоник можно найти в [7], [8].

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{C}^n)$ пространство собственных состояний $|\psi\rangle$ гамильтониана $\tilde{H}$ в пространстве $\mathcal{H}$ с собственным значением λ . Полное описание этого собственного пространства, приведенное в [9], можно суммировать следующим образом. Если $\lambda \neq 0, 1, 2, \dots$, то $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{C}^n)$ – тривиальное пространство. Если $\lambda = m \in \mathbb{Z}_+$, то волновая функция состояния $|\psi\rangle$ есть функция

$$\langle \xi | \psi \rangle = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ 0 \leq q \leq m}} \sum_{1 \leq j \leq d(n, p, q)} \frac{(m-q)!\Gamma(n+p+q)}{\Gamma(n+p+m)} L_{m-q}^{p+q+n-1}(r^2) r^{p+q} \gamma_{p,q}^j h_{p,q}^j(\omega),$$

принадлежащая $C^\infty(\mathbb{C}^n)$, где $\xi = r\omega$, $\omega \in \mathbf{S}^{2n-1}$, $r > 0$, $L_k^\beta(x)$ – полином Лагерра (см. [10]), $\{h_{p,q}^j\}_{1 \leq j \leq d(n, p, q)}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{Y}_{p,q}$ и $(\gamma_{p,q}^j) = \gamma_{p,q} \in \mathbb{C}^{d(n, p, q)}$ таковы, что

$$\sum_{\substack{p \geq 0 \\ 0 \leq q \leq m}} \frac{(m-q)!(p+q+n-1)!\Gamma(n+p+q)}{2\Gamma(n+p+m)} |\gamma_{p,q}|^2 < +\infty.$$

4. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ФОРМАЛИЗМ

Пусть G – локально компактная группа, U – замкнутая подгруппа, $X = G/U$ – соответствующее однородное пространство с мерой ν , инвариантной относительно действия группы G . Пусть $\sigma: X \rightarrow G$ – борелевское сечение (в главном расслоении $G \rightarrow G/U$) и T – непрерывное унитарное представление группы G обратимыми изометричными операторами $T(g)$, $g \in G$, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

В соответствии с [11] будем говорить, что $\phi_0 \in \mathcal{H}$ есть вакуумный вектор, если для всех $u \in U$

$$T(u)[\phi_0] = \chi(u)\phi_0. \quad (4)$$

Отображение $u \rightarrow \chi(u)$ определяет характер подгруппы U . Будем говорить, что множество

$$\phi_x := T(\sigma(x))[\phi_0], \quad x \in X, \quad (5)$$

образует семейство КС, если

$$\int_X d\nu(x) \langle \phi_0, \phi_x \rangle \langle \phi_x, \phi_0 \rangle = \langle \phi_0, \phi_0 \rangle. \quad (6)$$

Преобразование КС может быть определено как отображение из пространства $\mathcal{H}$ в пространство ограниченных непрерывных функций на G с помощью коэффициентов представления

$$\phi \rightarrow \langle \phi, T(g)[\phi_0] \rangle, \quad g \in G.$$

Вследствие (4) такие функции обладают простыми трансформационными свойствами при движении вдоль орбит gU , т.е. $\langle \phi, T(gu)[\phi_0] \rangle = \chi(u)^* \langle \phi, T(g)[\phi_0] \rangle$, $u \in U$, они полностью определяются своими значениями, проиндексированными точками пространства X . Поэтому мы можем рассматривать редуцированные преобразования КС из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ в пространство $L^2(X, d\nu)$, определенные формулой [11]

$$W: \phi \rightarrow W[\phi](x) := \langle \phi, \phi_x \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (7)$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА–БАРГМАНА И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ – это группа Ли, являющаяся многообразием $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ с умножением

$$(\xi, t)(\zeta, s) = \left(\xi + \zeta, t + s + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\zeta \cdot \xi) \right),$$

где $\operatorname{Im}(\zeta \cdot \xi) = (\zeta \cdot \xi - \xi \cdot \zeta)/(2i)$. Группа $\mathbb{H}_n$ является унимодулярной группой, мера Хаара которой совпадает с мерой Лебега на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$.

Сильно непрерывные унитарные неприводимые представления (УНП) группы $\mathbb{H}_n$ хорошо известны ([12], с. 37). Здесь мы сосредоточим внимание на обозначаемом через ρ УНП группы $\mathbb{H}_n$, которое реализуется на пространстве Фока $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ целых функций φ на $\mathbb{C}^n$ таких, что $\langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} < +\infty$, следующим образом:

$$\rho(\xi, t)[\varphi](z) = e^{it} e^{z \cdot \xi^* - |\xi|^2/2} \varphi(z - \xi^*),$$

$\varphi \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, и называется представлением Фока–Баргмана группы $\mathbb{H}_n$. УНП ρ квадратично интегрируемо в следующем смысле: если $\mathbb{R}$ – центр группы $\mathbb{H}_n$ и сечение σ_0 – сечение расслоения $\mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{H}_n/\mathbb{R} = \mathbb{C}^n$, определенное формулой $\sigma_0(\xi) = (\xi, 0)$ [13], то существует ненулевой вектор $\phi_0 \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{H}_n/\mathbb{R}} |\langle \rho(\sigma_0(\xi))[\phi_0], \phi_0 \rangle_{\mathcal{H}}|^2 d\mu(\xi) < +\infty. \quad (8)$$

Это условие может быть также выражено как существование некоторого самосопряженного положительного полуинвариантного оператора K в пространстве $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ такого, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi) \langle \varphi_1, \rho(\xi, 0)\psi_1 \rangle \langle \rho(\xi, 0)\psi_2, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \langle K^{1/2}\psi_1, K^{1/2}\psi_2 \rangle \quad (9)$$

для всех $\psi_1, \psi_2 \in \text{dom}(K^{1/2})$ и всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$. Поскольку группа $\mathbb{H}_n$ унимодулярная, оператор K здесь тождественный [14].

Теперь в соответствии с (5) построим множество ОКС

$$|\xi, \alpha\rangle := \rho(\sigma_0(\xi))|\alpha\rangle, \quad (10)$$

$\xi \in \mathbb{C}^n$, и $|\alpha\rangle$ – нормированное фоковское состояние с волновой функцией

$$\langle z | \alpha \rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi^n \alpha!}} z^\alpha,$$

$\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, которое представляет вакуумный вектор, удовлетворяющий (4). Волновые функции ОКС $|\xi, \alpha\rangle$, определенные в (10), даются тогда выражением

$$\langle z | \xi, \alpha \rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi^n \alpha!}} e^{z \cdot \xi^* - |\xi|^2/2} (z - \xi^*)^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Такое определение ОКС полностью оправдывается квадратичной интегрируемостью ρ по модулю подгруппы $\mathbb{R}$. Действительно, из условия (9) вытекает условие (6), которое в нашем случае имеет вид

$$\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi) \langle \varphi | \xi, \alpha \rangle \langle \varphi | \xi, \alpha \rangle^* = \langle \varphi, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n). \quad (11)$$

6. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ

Прежде всего заметим, что условие (11) означает, что редуцированное преобразование КС $\mathcal{W}_m: \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$, определенное в соответствии с (7) формулой

$$\mathcal{W}_m[\varphi](\xi) := \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z) e^{-|z|^2} \varphi(z)^* \langle z | \xi, \alpha \rangle,$$

есть изометрическое вложение. Однако для того чтобы охарактеризовать пространства состояний Ландау $\mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n)$, которые включены в гильбертово пространство $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых с весом $e^{-|\xi|^2} d\mu$ функций, мы должны воспользоваться унитарным преобразованием $\tilde{\mathcal{W}} := Q \circ \mathcal{W}_m$, в котором $Q: L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) \rightarrow \mathcal{H}$ есть унитарное отображение (преобразование основного состояния), определенное формулой $Q[\phi](\xi) = e^{|\xi|^2/2} \phi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему характеристики.

ТЕОРЕМА. Для $m \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\tilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)] = \mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n).$$

Для того чтобы показать, что $\tilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)] \subset \mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n)$, нам необходимо вычислить действие гамильтониана Ландау $\tilde{H}$ (H_1 в формуле (3)) на $\tilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi)$ для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. Прямое вычисление показывает, что $\tilde{H}\tilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi) = m\tilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi)$.

Обратно, пусть $\psi \in \mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\psi(z) := \pi^{-n} \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} (\psi(\zeta))^* \langle z | \zeta, \alpha \rangle.$$

Покажем, что φ_ψ удовлетворяет условию $\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi] = \psi$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) &= \pi^{-n} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z) e^{-|z|^2} \langle z | \xi, \alpha \rangle \times \\ &\quad \times \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} (\psi(\zeta))^* \langle z | \zeta, \alpha \rangle \right)^* = \\ &= \pi^{-n} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \times \\ &\quad \times \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z) e^{-|z|^2} \langle z | \xi, \alpha \rangle \langle z | \zeta, \alpha \rangle^* = \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \times \\ &\quad \times \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z) e^{-|z|^2} e^{z \cdot \xi^* - |\xi|^2/2} (z - \xi^*)^\alpha \times \\ &\quad \times e^{z^* \cdot \zeta - |\zeta|^2/2} (z^* - \zeta)^\alpha = \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n d\mu(z_j) e^{-|z_j|^2} \times \\ &\quad \times e^{z_j \xi_j + z_j^* \zeta_j^*} (z_j - \xi_j^*)^{\alpha_j} (z_j^* \zeta_j)^{\alpha_j} = \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n e^{\zeta_j^* \xi_j} \mathcal{I}_j, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &:= \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z_j) e^{|z_j|^2} (z_j^*)^{\alpha_j} \sum_{k=0}^{\alpha_j} \frac{\alpha_j!}{k! (\alpha_j - k)!} (\zeta_j^* - \xi_j^*)^k z_j^{\alpha_j - k} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} (\zeta_j - \xi_j)^l (z_j)^l = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \alpha_j \\ 0 \leq l < +\infty}} \frac{\alpha_j!}{k! l! (\alpha_j - k)!} \left(\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z_j) e^{-|z_j|^2} z_j^{\alpha_j + l} (z_j^*)^{\alpha_j - k} \right) (\xi_j^* - \zeta_j^*)^k (\zeta_j - \xi_j)^l. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить интеграл в последней сумме, используем полярные координаты $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j > 0$, $0 \leq \theta_j \leq 2\pi$. Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \alpha_j \\ 0 \leq l < +\infty}} \frac{\alpha_j!}{k! l! (\alpha_j - k)!} (\xi_j^* - \zeta_j^*)^k (\zeta_j - \xi_j)^l \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\theta_j e^{i(k-l)\theta_j} \int_0^{+\infty} dr_j r_j^{2\alpha_j + 1 - k + l} e^{-r_j^2}. \end{aligned}$$

После вычисления сумма $\mathcal{I}_j$ сводится к выражению

$$\mathcal{I}_j = 2\pi \sum_{0 \leq k \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{k!l!(\alpha_j - k)!} \frac{\alpha_j}{2} (\xi_j^* - \zeta_j^*)^k (\zeta_j - \xi_j)^l.$$

Вспомнив, что полином Лагерра дается формулой [10]

$$L_p^\nu(x) = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p+\nu}{p-k} \frac{x^k}{k!},$$

получим

$$\mathcal{I}_j = \pi \alpha_j! L_{\alpha_j}^0(|\xi_j - \zeta_j|^2).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2} \psi(\zeta) e^{\xi \cdot \zeta} \times \\ &\times \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} L_{\alpha_1}^0(|\xi_1 - \zeta_1|^2) \dots L_{\alpha_n}^0(|\xi_n - \zeta_n|^2). \end{aligned}$$

Используя формулу суммирования [10]

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n = p} L_{i_1}^{\beta_1}(x_1) \dots L_{i_n}^{\beta_n}(x_n) = L_p^{\beta_1 + \dots + \beta_n + d - 1}(x_1 + \dots + x_n)$$

для $p = m$, $d = n$, $\beta_j = 0$, $i_j = \alpha_j$ и $x_j = |\xi_j - \zeta_j|^2$, $1 \leq j \leq n$, получаем

$$\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta) e^{-|\zeta|^2} \psi(\zeta) (\pi^{-n} e^{\xi \cdot \zeta} L_m^{n-1}(|\xi - \zeta|^2)).$$

Но функция переменных ξ , ζ в последнем интеграле совпадает с воспроизводящим ядром собственного пространства $\mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n)$ [9]. Поэтому последнее равенство означает, что $\mathcal{W}_m[\varphi_\psi](\xi) = \psi(\xi)$. Очевидно, что $z \rightarrow \varphi_\psi(z)$ есть целая функция. Более того, она удовлетворяет условию $\langle \varphi_\psi, \varphi_\psi \rangle_{\mathcal{H}} \leq +\infty$, поскольку $\widetilde{\mathcal{W}}_m$ есть унитарное отображение. Тем самым включение $\mathcal{A}_m^2(\mathbb{C}^n) \subset \widetilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)]$ доказано.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении четномерного аналога заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле для каждого уровня Ландау мы построили семейство ОКС путем сдвига фоковских состояний посредством операторов представления Фока–Баргмана группы Гейзенберга. При построении был использован метод, в основе которого лежат квадратично интегрируемые на однородном пространстве представления основной группы. Мы установили, что образ пространства Фока при преобразованиях КС, ассоциированных с построенными ОКС, совпадает с пространствами связанных состояний частицы. Это дает новое описание многомерных евклидовых состояний Ландау. Таким образом, метод КС дает нам возможность посмотреть на собственные пространства гамильтониана Ландау с математической точки зрения.

Благодарности. Автор благодарен своим коллегам Дж. Кубали, О. Мадихи и И. Такату.

Список литературы

- [1] V. V. Dodonov. J. Opt. B. Quant. Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. R1.
- [2] И. А. Малкин, В. И. Манько. ЖЭТФ. 1969. Т. 55. С. 1014.
- [3] B. R. Johnson, J. O. Hirschfelder, K. H. Yang. Rev. Mod. Phys. 1983. V. 55. P. 109.
- [4] S. Varro. J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 1631.
- [5] S. M. Girvin, T. Jach. Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 5617.
- [6] M. K. Fung, Y. F. Wang. Chinese J. Phys. 1999. V. 37. № 5. P. 435.
- [7] G. B. Folland. Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 47. P. 401.
- [8] W. Rudin. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer, 1980.
- [9] N. Askour, A. Intissar, Z. Mouayn. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3057.
- [10] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
- [11] V. V. Kisil. Acta Appl. Math. 1999. V. 59. P. 79.
- [12] G. B. Folland. Harmonic Analysis on Phase Space. Ann. Math. Stud. V. 122. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1989.
- [13] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratclif. J. Funct. Ann. 1992. V. 105. P. 405.
- [14] M. Duflou, C. C. Moore. J. Funct. Anal. 1976. V. 21. № 2. P. 208.

Поступила в редакцию 10.VII.2003 г.