Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Л. Рчеулишвили, Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 2, 249–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:45:51

Г. Л. Рчеулишвили*

ОБОБЩЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА В ПЯТИМЕРНОМ ЛОРЕНЦЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В пятимерном римановом пространстве с сигнатурой -3 изучаются генераторы групп конформных движений, допускаемых линейным элементом с затравочной $L = t^2 \oplus so(3)$ симметрией.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы изучения генераторов групп движений, допускаемых сферически-симметричным линейным элементом в четырехмерном римановом пространстве, достаточно всеобъемлюще изложены в труде [1]. Серии изометрических и конформных векторных полей, связанных с движениями четырехмерного пространства с линейным элементом в определенной параметризации, изучались, например, в работах [2] и [3]. Аналогичная задача решалась в работе [4], в которой получены решения изометрических уравнений Киллинга в пятимерном римановом пространстве.

В настоящей работе изучаются генераторы групп конформных движений, допускаемых линейным элементом (1) (см. ниже). Наличие конформных векторных полей Киллинга позволяет описывать законы сохранения для бесследовых тензорных величин (например, [5]); пятимерное риманово пространство является выделенным многообразием в теориях типа Калуцы–Клейна (см. [6]). Вдобавок решение обобщенной системы приводит к более прозрачному пониманию природы ограничений, которые в работе [4] накладывались на g_{nn} при получении серий изометрических полей.

Рассматриваемое риманово многообразие определяется линейным элементом ds^2 , обладающим начальной $L = t^2 \oplus so(3)$ симметрией:

$$ds^2 = g_{11}(z) dt^2 - dz^2 - g_{33}(z) d\vartheta^2 - (g_{33}(z) \sin^2 \vartheta + g_{55}(z) \cos^2 \vartheta) d\varphi^2 - 2g_{55}(z) \cos \vartheta d\varphi d\psi - g_{55}(z) d\psi^2. \quad (1)$$

Компоненты g_{nn} параметризованы радиальной переменной r четырехмерного пространства посредством функции $z = \int^r \sqrt{g_{22}} dr$. Условия $g_{nn} > 0$ обеспечивают $\text{sign} = -3$. Конформные векторы Киллинга $\zeta = \xi^k \partial_k$ в пространствах с метрическим тензором $\tilde{g}$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi^k \partial_k \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ik} \partial_j \xi^k + \tilde{g}_{kj} \partial_i \xi^k = \Phi \tilde{g}_{ij}. \quad (2)$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: rcheul@mx.ihep.su

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ

Решая систему (2), предварительно выделим ограничения, налагаемые на те $g_{nn}(z)$, которые допускают существование групп высших симметрий. Для линейного элемента (1) можно получить уравнения третьего порядка на величины $\tilde{\xi}^k$ ($\tilde{\xi}^k = \xi^k$, $k = 1, 2, 3$; $\tilde{\xi}^5 = \xi^5 + \cos \vartheta \xi^4$)

$$\begin{aligned} \partial_{222}\tilde{\xi}^i + 3F_i\partial_{22}\tilde{\xi}^i + \{(F'_i + 2F_i^2) + \hat{\gamma}R_i^\mu(z)\}\partial_2\tilde{\xi}^i &= 0, \\ \partial_{iii}\xi^2 + g_{ii}(z)R_i^\mu(z)\partial_i\xi^2 &= 0, \quad i = 1, 3, 5, \quad \mu = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\hat{\gamma} = 1$ для $i = 1$ и $\hat{\gamma} = -1$ для $i = 3, 5$; $F_i = g'_{ii}/(2g_{ii})$, $i = 1, 3, 5$; $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial \vartheta}$, $\partial_4 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\partial_5 = \frac{\partial}{\partial \psi}$ и штрих обозначает производную по переменной z . Величины R_i^μ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1^1(z) &= (F_1 - F_3)' + F_3(F_1 - F_3), \quad R_3^1(z) = (F_1 - F_3)' + F_1(F_1 - F_3), \\ R_3^2(z) &= \{(F_5 - F_3)' + F_5(F_5 - F_3) + 1/g_{33} - g_{55}/(2g_{33}^2)\}/2, \\ R_5^2(z) &= (F_3 - F_5)' + F_3(F_3 - F_5) + g_{55}/(4g_{33}^2). \end{aligned}$$

R_1^2 и R_5^1 получаются из R_1^1 и R_3^1 соответственно заменой $F_3 \rightarrow F_5$. Из формул (3) имеем (ниже $\kappa_{ii} = 0$ или $\kappa_{ii} = \rho_{ii} = \text{const} \neq 0$)

$$(R_i^1 - R_i^2)\partial_i\xi^2 = (R_i^1 - R_i^2)\partial_2\tilde{\xi}^i = 0, \quad R_i^\mu = \kappa_{ii}/g_{ii}, \quad i = 1, 3, 5. \quad (4)$$

Из системы (2) видно, что равенство нулю производной $\partial_2\xi^i$ (либо $\partial_i\xi^2$), где i принимает одно из трех значений $i = 3, 4, 5$, влечет за собой равенство нулю аналогичных величин для двух оставшихся значений индекса i . Свойство переменной ξ^2 иметь зависимость сразу от всех трех угловых переменных, т.е. $\xi^2 = \xi^2(\vartheta, \varphi, \psi)$, приводит к требованию совместного выполнения двух равенств: $R_3^1 = R_3^2$ и $R_5^1 = R_5^2$, что возможно лишь для значений $\kappa_{33} = \kappa_{55} = 1/4$. Нетривиальные решения ξ^2, ξ^3, ξ^4 и ξ^5 как функций от пространственных переменных имеем лишь в следующих случаях:

$$\text{либо} \quad \partial_i\xi^2 = \partial_2\xi^i = 0, \quad i = 3, 4, 5, \quad (5)$$

$$\text{либо} \quad R_3^1 = R_3^2 = 1/(4g_{33}) \quad \text{и} \quad R_5^1 = R_5^2 = 1/(4g_{55}). \quad (6)$$

Детальное рассмотрение показывает, что формула (6) выполняется лишь при значениях $g_{33} = g_{55}$ или $g_{33} = \sigma(z)g_{55}$, где $\sigma(z)$ — произвольная функция z , с производной $\sigma'(z) \neq 0$. В первом случае (6) сводится к условию

$$(F_1 - F_3)' + F_1(F_1 - F_3) = 1/(4g_{33}). \quad (7)$$

Во втором удобно выразить решения (6) через функцию $\sigma(z)$:

$$g_{11} = \text{const } \sigma^2(\sigma - 1)/(\alpha(\sigma')^2), \quad g_{33} = \sigma(\sigma - 1)^2/(\sigma')^2, \quad \alpha = \text{sign}(\sigma - 1). \quad (8)$$

Из вида системы (2) и уравнений (4) для $i = 1$ следуют условия, определяющие зависимость компоненты ξ^2 от переменной t :

$$\text{либо} \quad \partial_1 \xi^2 = \partial_2 \xi^1 = 0, \quad (9)$$

$$\text{либо} \quad R_1^1 = R_1^2 = \kappa_{11}/g_{11}. \quad (10)$$

Таким образом, система (2) изначально должна решаться лишь для тех значений g_{nn} , которые удовлетворяют формулам (5), (7) или (8) и дополнительным ограничениям для каждой из этих трех формул в виде равенств (9) или (10). Формулы (5) и (9) нужно понимать как наличие всевозможных неравенств для величин, фигурирующих в выражениях (6) и (10), соответственно. Например, равенство (9) означает наличие двух неравенств $R_1^1 \neq R_1^2$ и $R_1^1 \neq \kappa_{11}/g_{11}$.

Полученные серии полностью будут выписаны лишь для генераторов нетривиальных конформных групп. V_m^α означает наличие α -й серии, состоящей из m базисных векторов ζ_i , которые конструируются следующим образом: $\zeta_i = (\partial/\partial D^i)\xi^k (\sum_m D^m)\partial_k$, где D^m — постоянные. Имеются следующие поля изометрий, определяемые начальной симметрией линейного элемента (1) и описанные в [4] формулами (15) и (16):

$$V_5 : \left\{ g_{33} \neq g_{55}, R_i^1 \neq R_i^2, i = 3, 5; (R_1^1 \neq \kappa_{11}/g_{11} \text{ или } F_3 - F_5 \neq 0) \right\},$$

$$V_7^0 : \left\{ g_{33} = g_{55}, R_3^1 \neq 1/(4g_{33}), R_1^1 \neq \kappa_{11}/g_{11} \right\}, \quad \Phi = 0.$$

Серии V_7^i ($g_{33} = \tau_3 g_{55}$, $\tau_3 = \text{const}$) и V_9^i ($g_{33} = g_{55}$), $i = 1, 2, 3$, с функцией $\Phi = 2F_3\sqrt{g_{33}}D^{2(\mu-1)}l_\mu(t)$, $\mu = 1, 2$, имеют следующий вид:

$$V_7^1(V_9^1) : \{ \kappa_{11} = 0, F_1 - F_3 = 0 \}, \quad V_7^2(V_9^2) : \{ \kappa_{11} = 0, F_1 - F_3 \neq 0 \},$$

$$V_7^3(V_9^3) : \{ \kappa_{11} = \rho_{11}, (F_1 - F_3)' + F_3(F_1 - F_3) - \rho_{11}/g_{11} = 0 \}.$$

Здесь $l_1 = \{ \sin \sqrt{\rho_{11}} t, \text{sh} \sqrt{|\rho_{11}|} t \text{ или } t \}$ и $l_2 = \{ \cos \sqrt{\rho_{11}} t, \text{ch} \sqrt{|\rho_{11}|} t \text{ или } 1 \}$ в зависимости от значений $\{ \rho_{11} > 0, \rho_{11} < 0 \text{ или } \kappa_{11} = 0 \}$, соответственно.

Серии V_9^4 и V_{11} имеют одинаковые функции $\Phi = 2F_1\sqrt{g_{11}}D^m P_m$, $m = 8, \dots, 11$, где $P_{8(10)} = \cos \frac{\varphi \mp \psi}{2} \sin(\cos) \frac{\vartheta}{2}$, $P_{9(11)} = \mp \sin \frac{\varphi \mp \psi}{2} \sin(\cos) \frac{\vartheta}{2}$:

$$V_9^4 : \{ g_{nn} \text{ даны формулами (8)} \};$$

$$V_{11} : \left\{ g_{33} = g_{55}, R_1^\mu \neq \frac{\kappa_{11}}{g_{11}}, \text{ выполнено соотношение (7)} \right\}. \quad (11)$$

При описании серий нетривиальных конформных генераторов V_{21}^1 и V_{21}^2 воспользуемся существованием $(F_1 - F_3 \neq 0)$ функции $\sigma_1(z)$: $g_{11} = \sigma_1(z)g_{33}$, $\sigma_1'(z) \neq 0$. В зависимости от знака постоянной ρ_{11} получаем две серии: V_{21}^1 и V_{21}^2 при $\kappa_{11} = 0$. Имеем

$$V_{21}^1 : \left\{ g_{33} = g_{55}, R_3 = 1/(4g_{33}), R_1 = \rho_{11}/g_{11} \rightarrow g_{33} = \sigma_1(\sigma_1 - 4\rho_{11})/(\sigma_1')^2 \right\},$$

$$\xi^1 = \sqrt{g_{33}/g_{11}} \{ -2D^{m,\mu} P_m \partial_1 l_\mu + (F_1 - F_3) \sqrt{g_{11}}/\rho_{11} D^{2(\mu-1)} \partial_1 l_\mu \} + D^7,$$

$$\xi^2 = \sqrt{g_{11}} \{ 2\sqrt{g_{33}} (F_1 - F_3) D^{m,\mu} l_\mu(t) + D^m \} P_m + \sqrt{g_{33}} D^{2(\mu-1)} l_\mu(t),$$

$$\xi^3 = -2M^m \partial_3 P_m + \xi_{V_7^0}^3, \quad \xi^{4+i} = 4/(\sin \vartheta) M^m \partial_{3,5-i} P_m + \xi_{V_7^0}^{4+i},$$

$$\Phi = 2F_3 \xi^2 + M^m P_m, \quad m = 8, 9, 10, 11, \quad i = 0, 1, \quad \mu = 1, 2, \quad (12)$$

где $M^m = \sqrt{g_{11}/g_{33}} \{D^{m,\mu} l_\mu(t) + 2\sqrt{g_{33}}(F_1 - F_3)D^m\}$, а также серию

$$\begin{aligned} V_{21}^2 : \quad & \{g_{33} = g_{55}, \quad R_3 = 1/4g_{33}, \quad R_1 = 0 \rightarrow g_{33} = (\sigma_1)^2/(\sigma'_1)^2\}, \\ & \xi^1 = -2\sqrt{g_{33}/g_{11}} D^{m,r} P_m \partial_1 t^r / r! - (t^2/4 + g_{33}/g_{11})D^{2(0)} - tD^{2(1)}/2 + D^7, \\ & \xi^2 = 2(F_1 - F_3) \left\{ \sqrt{g_{11}g_{33}} [D^{m,r} t^r / r! + 2g_{33}/g_{11} D^{m,2}] P_m + g_{33} D^{2(\mu-1)} l_\mu \right\}, \\ & \xi^3 = -2N^m \partial_3 P_m + \xi_{V_7^0}^3, \quad \xi^{4+i} = 4/(\sin \vartheta) N^m \partial_{3,5-i} P_m + \xi_{V_7^0}^{4+i}, \\ & \Phi = 2F_3 \xi^2 + N^m P_m, \quad m = 8, 9, 10, 11, \quad i = 0, 1, \quad \mu = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $N^m = \sqrt{g_{11}/g_{33}} \{D^{m,r} t^r / r! - 2g_{33}/g_{11} D^{m,2}\}$, $r = 0, 1, 2$.

Серии V_{21}^1 и V_{21}^2 удовлетворяют алгебре $L_{V_{21}} = so(5, 2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конформные преобразования $\bar{g}_{nm} = \exp(2\omega)g_{nm}$, приводящие к пространству $\bar{V}$ (см. [7]), в котором тривиальные конформные серии V_7^i, V_9^i ($i = 1, 2, 3$), V_9^4 и V_{11} генерируют группу изометрий, имеют вид

$$\bar{g}_{nm} \sim g_{nm}/g_{33} \quad \text{для } V_7^i, V_9^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \bar{g}_{nm} \sim g_{nm}/g_{11} \quad \text{для } V_9^4 \text{ и } V_{11}. \quad (14)$$

В работе [4] генераторы изометрий $\bar{\xi}^n$ приведены для частного вида $\bar{g}_{nn}$. Выражения для генераторов тривиальных конформных групп можно получить с помощью $\bar{\xi}^n$, если, воспользовавшись преобразованиями (14), умножить еще компоненту $\bar{\xi}^2$ на $\sqrt{g_{11}}$ для $\bar{V}_9^4$ ($\bar{V}_{11}$) и на $\sqrt{g_{33}}$ для $\bar{V}_7^i$ ($\bar{V}_9^i$).

Из серий V_{21}^1 и V_{21}^2 можно выделить различные серии V_m^α , что, в частности, позволяет получить соответствующие подалгебры алгебры $L_{V_{21}}$. Так, например, при равных нулю D^m , $D^{2(1)}$ и $D^{2(0)}$ и ограничении $4\sqrt{g_{11}g_{33}}F_3(F_1 - F_3) + \sqrt{g_{11}/g_{33}} = 0$ серии V_{21}^1 сводятся к двум изометрическим сериям, связанным с алгебрами де Ситтера и анти-де Ситтера; условия $F_1 = 0$ и $D^{m,2} = D^{2(1)} = D^{2(0)} = 0$ приводят V_{21}^2 к третьей серии генераторов изометрий, удовлетворяющих алгебре $L = t^5 \oplus so(4, 1)$.

Лоренцево пространство V_n , допускающее нетривиальную группу конформных движений, конформно-эквивалентно пространству $\hat{V}_n$, полученному в работе [8]. В ряде случаев, однако, вместо сравнения V_n с $\hat{V}_n$ проще явно решить систему (2). При этом также имеется возможность явно выписать ограничения на g_{nn} , приводящие к различным сериям V_m^α .

Автор глубоко благодарен М. В. Савельеву за полезные дискуссии. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 95-01-00125а.

Список литературы

- [1] *Hyôitirô Takeno*. The Theory of Spherically Symmetric Space-Times. In: Scient. Reports. V. 5. Hiroshima: Hiroshima University, 1966.
- [2] *Ashfaq H. Bokhari, Asghar Qadir*. J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1019.
- [3] *R. Maartens, S. D. Maharaj, B. O. J. Tupper*. Class. Quantum Gravit. 1995. V. 12. P. 2577.
- [4] *G. Rcheulishvili*. ТМФ. 1995. Т. 102. № 3. С. 345.
- [5] *T. Fulton, F. Rohrlich, L. Witten*. Rev. Mod. Phys. 1962. V. 34. № 3. P. 442; *Р. Пенроуз, В. Рундлер*. Спиноры и пространство-время. Т. 2. М.: Мир, 1988.
- [6] *E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 186. P. 412.
- [7] *Н. Х. Ибрагимов*. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, Физматгиз, 1983.
- [8] *А. П. Чупахин*. ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 5. С. 1056.

Поступила в редакцию 7.IV.1997 г.

G. L. Rcheulishvili

**GENERALIZED KILLING VECTORS IN
FIVE-DIMENSIONAL LORENTZ MANIFOLD**

The solutions of the generalized Killing equation are obtained for the line element with an initial $L = t^2 \oplus so(3)$ symmetry in five-dimensional manifold of signature -3 .