Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Бердников, Г. Г. Нанобашвили, Г. П. Пронько, Фотонное излучение протяженного релятивистского объекта, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 2, 283–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1043>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:49:20

Е. Б. Бердников*, Г. Г. Нанобашвили[†], Г. П. Пронько[‡]
**ФОТОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОТЯЖЕННОГО
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОБЪЕКТА**

Построен оператор электромагнитного взаимодействия для протяженного релятивистского объекта. Показано, что главная трудность, обусловленная некоммутативностью координат и скоростей зарядов в релятивистской квантовой механике, может быть преодолена при выборе специальной процедуры упорядочения операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблеме излучения фотонов составной системой в нерелятивистской квантовой механике посвящена обширная литература (см., например, [1]). Решение этой проблемы приводит к построению электромагнитного тока, задаваемого, в свою очередь, координатами и скоростями (импульсами) электрических зарядов. С помощью этого тока можно получить все разнообразные электромагнитные свойства атомов и ядер. В физике адронов существует аналогичный подход, но он дает значимые результаты только в случае тяжелого кваркония. Причина такого ограничения проста: нам известно очень мало про квантовую (и даже классическую) теорию релятивистских протяженных систем, т.е. систем, отличных от точечных частиц. С другой стороны, уже то, что мы знаем, говорит о том, что проблема построения электрического тока в таких системах должна быть крайне сложной. Действительно, в соответствии с “теоремой об отсутствии взаимодействия”, доказанной Йорданом, Курри и Сударшаном [2], координаты взаимодействующих частиц (зарядов) не могут быть каноническими даже в классической механике, что, в свою очередь, приводит к тому, что соответствующие операторы квантовой теории также не коммутируют. Выбирая самый простой вид для электромагнитного взаимодействия

$$H_{\text{int}} = j^{\mu}(x)A_{\mu}(x),$$

мы приходим к весьма неопределенному выражению, в котором в полной мере проявляется проблема определения функции от некоммутирующих переменных, которая в то же время должна сохранять градиентную инвариантность взаимодействия.

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская область, Россия. E-mail: berdnikov@mx.ihep.su

[†]Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Республика Грузия

[‡]Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская область, Россия. E-mail: pronko@mx.ihep.su

В дальнейшем мы дадим решение этой проблемы в случае простейшей протяженной релятивистской системы [3]. Эта система – прямая (жесткая) струна – использовалась в целом ряде различных подходов [4–6] в качестве базисной модели для реалистичного описания легких мезонов. Она достаточно привлекательна, т.к. мы с самого начала знаем ее геометрическое содержание, а именно координаты концов струны, которые мы отождествляем с координатами зарядов. Из струнной динамики следует, что векторы скоростей концов струны всегда лежат на световом конусе, т.е. в этой картине соблюдается принцип причинности.

2. ПРЯМАЯ СТРУНА

Как было отмечено во введении, теория жестких струн допускает различные подходы. Здесь мы вкратце опишем наиболее явный способ редуцирования общей струны Намбу–Гото. Подобная струна описывается классическим действием, пропорциональным площади мирового листа струны:

$$A = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad (1)$$

где α' – коэффициент, имеющий размерность квадрата длины, $x_\mu(\sigma, \tau)$ суть координаты мирового листа струны, а точка и штрих над переменными обозначают соответственно производные по τ и σ . Конфигурация прямой струны задается следующим анзацем:

$$x_\mu(\sigma, \tau) = X_\mu(\tau) + q_\mu(\tau)\varphi(\sigma, \tau). \quad (2)$$

Заметим, что концы струны $x_\mu^{1,2}(\tau)$ отвечают случаю $\sigma = 0, \pi$ в выражении (2), и, следовательно,

$$\begin{aligned} x_\mu^{1,2}(\tau) &= X_\mu(\tau) + q_\mu(\tau)\varphi^{1,2}(\tau), \\ \varphi^{1,2}(\tau) &= \varphi(\sigma, \tau)|_{\sigma=0, \pi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя анзац (2) в формулу (1), получим, что

$$A = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_{\varphi_1(\tau)}^{\varphi_2(\tau)} d\varphi \sqrt{(-q^2)(\dot{X}_\perp + \dot{q}_\perp \varphi)^2}, \quad (4)$$

где мы ввели обозначение $a_{\mu\perp} \equiv a_\mu - q_\mu \frac{a q}{q^2}$. Динамическими переменными такой редуцированной системы будут $X_\mu(\tau)$, $q_\mu(\tau)$ и $\varphi^{1,2}(\tau)$. Переменные $\varphi^{1,2}(\tau)$ могут быть исключены с помощью уравнений движения

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi^{1,2}(\tau)} = 0,$$

откуда

$$\varphi^{1,2}(\tau) = -\frac{\dot{X}_\perp \dot{q}}{\dot{q}_\perp^2} \pm \left(\frac{\dot{X}_\perp^2}{\dot{q}_\perp^2} - \frac{(\dot{X}_\perp \dot{q})^2}{\dot{q}_\perp^4} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (4) по φ , мы получим следующее действие для прямой струны:

$$A = \frac{1}{4\alpha'} \int d\tau (q^2 \dot{q}_\perp^2)^{1/2} \left[\frac{\dot{X}_\perp^2}{\dot{q}_\perp^2} - \frac{(\dot{X}_\perp \dot{q})^2}{\dot{q}_\perp^2} \right]. \quad (6)$$

В этом действии динамическими переменными являются только $X_\mu(\tau)$ и $q_\mu(\tau)$. Действие (6) инвариантно по отношению к следующим калибровочным преобразованиям:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \varphi(\tau), \\ X_\mu &\rightarrow X_\mu(\tau) + \alpha(\tau)q_\mu(\tau), \\ q_\mu(\tau) &\rightarrow \beta(\tau)q_\mu(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

относящимся к оставшейся подгруппе первоначальной калибровочной группы репараметризаций мирового листа струны.

Переход к гамильтонову формализму достаточно прост. Переменным X_μ и q_μ канонически сопряжены импульсы P_μ и p_μ :

$$\{X_\mu, P_\nu\} = \{q_\mu, p_\nu\} = g_{\mu\nu}.$$

Кроме того, вводятся три связи первого рода, отвечающие трем калибровочным преобразованиям (7):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \alpha' P^2 + (q^2 p_\perp^2)^{1/2} \approx 0, \quad p_\perp^\mu = p^\mu - P^\mu \frac{pP}{P^2}, \\ \Phi_1 &= Pq \approx 0, \\ \Phi_2 &= pq \approx 0. \end{aligned}$$

В силу того что канонический гамильтониан обращается в нуль, его роль должна играть некоторая линейная комбинация связей Φ_i , $i = 0, 1, 2$:

$$H = \sum_i v_i(\tau) \Phi_i. \quad (8)$$

Пуанкаре-инвариантность действия (6) приводит к существованию интегралов движения, являющихся генераторами алгебры Пуанкаре: полному импульсу P_μ и полному угловому моменту

$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu.$$

Та часть тензора $M_{\mu\nu}$, которая поперечна к импульсу P_μ , является спинным тензором струны

$$S_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\alpha} \Pi_{\nu\beta} M^{\alpha\beta} = q_\mu p_\perp_\nu - q_\nu p_\perp_\mu, \quad \Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2}.$$

Используя связи $\Phi_{1,2}$, можно переписать Φ_0 в виде

$$\Phi_0 = \alpha' P^2 - \left(\frac{1}{2} S_{\mu\nu}^2 \right)^{1/2}.$$

Такое описание гамильтонова формализма вполне стандартно для релятивистских систем; новым является его геометрическое содержание. Из исходной постановки задачи следует, что координаты “частиц”, т.е. исходные струнные переменные, суть координаты концов струны. Используя уравнения (3) и (5), можно выразить $x_\mu^{1,2}$ через гамильтоновы переменные:

$$x_\mu^{1,2} = \left(X_\mu + q_\mu \frac{Pp}{P^2} \right) \pm 2\alpha' \sqrt{P^2} \frac{q^\mu}{\sqrt{-q^2}}. \quad (9)$$

Эти выражения являются хорошим примером так называемой “теоремы об отсутствии взаимодействия”. В самом деле, физические координаты частиц в нашем случае не являются каноническими переменными, а задаются некоторыми (довольно сложными) функциями от них. Выражение (9) представимо в виде суммы двух членов: координаты центра масс X_μ^{cm} и относительной координаты X_μ^{rel} :

$$X_\mu^{\text{cm}} = X_\mu + q_\mu \frac{Pp}{P^2}, \quad X_\mu^{\text{rel}} = 2\alpha' \sqrt{P^2} \frac{q_\mu}{\sqrt{-q^2}}.$$

В последующем рассмотрении концы струны играют определяющую роль, так что мы начнем с описания их характерных свойств.

Координаты центра масс X_μ^{cm} канонически сопряжены полному импульсу P_μ , однако их скобки между собой отличны от нуля:

$$\{X_\mu^{\text{cm}}, P_\nu\} = g_{\mu\nu}, \quad \{X_\mu^{\text{cm}}, X_\nu^{\text{cm}}\} = -\frac{S_{\mu\nu}}{P^2}.$$

Это свойство типично для динамических систем, отвечающих протяженным релятивистским объектам. Гамильтониан (8) порождает эволюцию X_μ^{cm} вдоль направления импульса P_μ :

$$\dot{X}_\mu^{\text{cm}} = \{X_\mu^{\text{cm}}, H\} = \alpha' v_0 P_\mu.$$

Хотя гамильтониан H и представим в виде суммы трех первичных связей, в действительности только одна из них, Φ_0 , порождает эволюцию X_μ^{cm} . То же справедливо по отдельности для каждой координаты концов струны, т.е.

$$\dot{x}_\mu^{1,2} = \{x_\mu^{1,2}, H\} = 2\alpha' v_0 \left(P_\mu \mp \sqrt{P^2} \frac{p_{\perp\mu}}{\sqrt{-p_\perp^2}} \right).$$

Очевидно, что $(\dot{x}^{1,2})^2 = 0$, поэтому движение концов струны отвечает распространению безмассовых частиц. Наконец, отметим, что относительная координата является пространственноподобным вектором, длина которого пропорциональна полной массе объекта:

$$\sqrt{-(x^1 - x^2)^2} = 4\alpha' \sqrt{P^2}.$$

Таким образом, относительное движение концов струны финитно.

В итоге мы приходим к интуитивному представлению обсуждаемой системы в виде связанного состояния двух безмассовых скалярных частиц с координатами $X_\mu^{1,2}$. Полная масса связанного состояния зависит от относительного движения составляющих его

объектов. Канонические переменные, в терминах которых описывается механика системы, не имеют четкого геометрического смысла, в то время как физические координаты, обладающие таким смыслом, суть весьма сложные функции канонических переменных.

Теперь мы в состоянии продвинуться дальше и проквантовать прямолинейную струну. Чтобы упростить обсуждение основной темы данной статьи – электромагнитного взаимодействия, мы явно разрешим связи $\Phi_{1,2}$ и оставим нетронутым только условие массовой поверхности Φ_0 . С этой целью мы фиксируем калибровку для связей $\Phi_{1,2}$ следующим образом:

$$\chi_1 = Pp, \quad \chi_2 = q^2 + 1.$$

Чтобы выделить независимые переменные, удобно рассмотреть вместо p_μ и q_μ 4-векторы тетрады $e_\mu^a(P)$ ($a = 0, 1, 2, 3$), на которые наложены следующие связи:

$$\begin{aligned} e_\mu^0(P) &= P_\mu / \sqrt{P^2}, & e_\mu^i(P) e^{0\mu}(P) &= 0, \\ e_\mu^i(P) e^{j\mu}(P) &= -\delta_{ij}, & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Независимые переменные определяются с помощью процедуры Дирака

$$S_i, \quad n_i, \quad P_\mu, \quad Z_\mu = X_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_\mu^{ij}(P) \epsilon_{ijk} S_k, \quad (10)$$

где

$$S_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_\mu^i(P) e_\nu^j(P) S^{\mu\nu}, \quad n_i = e_{i\mu}(P) q^\mu,$$

а $\Gamma_\mu^{ij}(P)$ – символы Кристоффеля, задающие параллельный перенос тетрады в импульсном пространстве,

$$\Gamma_\mu^{ab}(P) = e_\alpha^a(P) \frac{\partial}{\partial P_\mu} e^{b\alpha}, \quad a, b = 0, 1, 2, 3.$$

Переменные S_i и n_i , описывающие систему, удовлетворяют следующим условиям:

$$\vec{n}^2 = 1, \quad \vec{S} \vec{n} = 0.$$

Ненулевые пуассоновы (дираковские) скобки между переменными (10) имеют следующий вид:

$$\{Z_\mu, P_\nu\} = g_{\mu\nu}, \quad \{S_i, S_j\} = -\epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, n_j\} = -\epsilon_{ijk} n_k. \quad (11)$$

Условие массовой поверхности задается уравнением

$$\Phi_0 = \alpha' P^2 - \sqrt{\vec{S}^2},$$

а координаты частиц – концы струны – записываются в указанных координатах как

$$x_\mu^{1,2} = Z_\mu - \frac{1}{2} \Gamma_\mu^{ij} \epsilon_{ijk} S_k \pm 2\alpha' \sqrt{P^2} e_\mu^i(P) n_i. \quad (12)$$

Теперь уже все готово к квантованию, которое в нашем случае состоит в непосредственной замене пуассоновых скобок (11) коммутаторами

$$[Z_\mu, P_\nu] = -ig_{\mu\nu}, \quad [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k, \quad [S_i, n_j] = i\epsilon_{ijk} n_k. \quad (13)$$

Квантовый аналог условия массовой поверхности приводит к эквидистантному спектру масс

$$\Phi_0 = \alpha' P^2 - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right), \quad (14)$$

где¹⁾

$$\gamma = (\vec{S}^2 + 1/4)^{1/2}. \quad (15)$$

Коммутационные соотношения для оператора γ выводятся непосредственно [7]:

$$[\gamma, \vec{n}] = i\vec{n}, \quad [\gamma, \vec{\tilde{n}}] = -i\vec{n},$$

здесь

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{n}} &= \frac{1}{\gamma} \left(-\vec{S} \times \vec{n} + \frac{i}{2} \vec{n} \right) = \left(\vec{S} \times \vec{n} - \frac{i}{2} \vec{n} \right) \frac{1}{\gamma}, \\ \vec{\tilde{n}}^2 &= 1, \quad \vec{\tilde{n}} \vec{S} = 0, \quad \tilde{n} n = -n \tilde{n} = \frac{i}{2\gamma}, \quad [\tilde{n}_i, \tilde{n}_j] = 0, \\ [n_i, \tilde{n}_j] &= \frac{1}{\gamma} (\delta_{ij} - n_i n_j - \tilde{n}_i \tilde{n}_j) = (\delta_{ij} - n_i n_j - \tilde{n}_i \tilde{n}_j) \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

С использованием этих коммутационных соотношений мы можем найти квантовые скорости переменных $x^{1,2}$:

$$\dot{x}_\mu^{1,2} = i[x_\mu^{1,2}, \Phi_0] = 2\alpha' (P_\mu \mp \sqrt{P^2} e_\mu^i(P) \tilde{n}_i),$$

и проверить, что уравнения

$$\dot{x}_{1,2}^2 = 0$$

выполняются в операторном смысле.

Физическое подпространство расширенного гильбертова пространства выделяется с помощью условия массовой поверхности

$$\Phi_0 \Psi_{\text{ph}} = 0. \quad (16)$$

При этом базис физического подпространства состоит из функций

$$\Psi_{\vec{Q}, l, m}(P, \vec{n}) = 2(\vec{Q}^2 + l/\alpha')^{1/2} \delta(P^2 - l/\alpha') \delta^3(\vec{Q} - \vec{P}) Y_l^m(\vec{n}), \quad (17)$$

где $\vec{Q}$, l и m суть собственные значения операторов $\vec{P}$, $\gamma - 1/2$ и S_3 , соответственно; Y_l^m — сферические гармонические функции. Следуя стандартной процедуре Фаддеева-Попова, мы зададим скалярное произведение в физическом подпространстве в соответствии с условием (16):

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^4 P d^2 n_i \Psi_1^*(P, n_i) \tilde{\Psi}_2(P, n_i),$$

¹⁾ Так как размерность $\vec{S}$ совпадает с размерностью действия, константы $1/2$ и $1/4$ в формулах (14) и (15) становятся соответственно равными $\hbar/2$ и $\hbar^2/4$, после чего исчезают в классическом пределе.

где обозначение $\tilde{\Psi}$ введено для такого вектора Ψ , из которого исключен множитель $\delta(P^2 - l/\alpha')$. Данное построение физического подпространства совпадает с соответствующим построением для случая точечной релятивистской частицы, т.е. для решения уравнения Клейна–Гордона.

3. ИСПУСКАНИЕ ФОТОНА

В классическом случае взаимодействие с электромагнитным полем определяется гамильтонианом взаимодействия

$$S_{\text{int}} = \sum e_a \int d\tau \dot{x}_\mu^a(\tau) A^\mu [x^a(\tau)],$$

где e_a и x_μ^a суть заряды и координаты частиц. Так как мы рассматриваем излучение только лишь одного физического фотона, электромагнитное поле A_μ может быть заменено плоской волной $A_\mu = \epsilon_\mu(k) \exp(ikx)$, $k^2 = 0$, $\epsilon k = 0$. Таким образом, на квантовом уровне гамильтониан взаимодействия с отдельно взятой частицей имеет вид

$$H_{\text{int}} = e\epsilon_\mu(k) J^\mu(k),$$

где

$$J_\mu \sim \dot{x}_\mu \exp(ikx), \quad \dot{x}_\mu = i[\Phi_0, x_\mu].$$

Здесь символ $\sim$ обозначает то, что в правой части уравнения требуется еще задать процедуру упорядочения и сделать другие необходимые уточнения.

Гамильтониан взаимодействия должен удовлетворять следующим условиям. Во-первых, оператор взаимодействия должен быть поперечен:

$$k_\mu J^\mu(k) = 0. \quad (18)$$

При этом достаточно, чтобы это свойство было выполнено на физическом подпространстве. Во-вторых, в системе со связями надо, чтобы этот оператор был инвариантен по отношению к действию указанной связи. Другими словами, необходимо, чтобы для этого оператора физическое подпространство было инвариантным. Отсюда вытекают условия на импульс фотона. Если начальное и конечное состояния являются физическими, то, принимая во внимание спектр исследуемой системы (14), мы получим

$$\alpha'(P^2 - (P - k)^2) = 2\alpha'Pk = j_1 - j_2 = \nu, \quad (19)$$

где ν – целое число. Накладывая условия (19) на импульс фотона, приходим к следующему оператору, удовлетворяющему всем необходимым условиям:

$$H_{\text{int}} = \epsilon_\mu(k) \sum_{a=1,2} e_a \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)kx^a(\tau)} \dot{x}_a^\mu(\tau) e^{i\varphi kx^a(\tau)} = \epsilon_\mu(k) J^\mu(k). \quad (20)$$

Здесь e_a , $x_\mu^a(\tau)$ суть соответственно заряды и координаты (концы струны) частиц. Зависимость от τ координат x_μ^a задается следующим уравнением:

$$x_\mu^a(\tau) = e^{-i\Phi_0\tau} x_\mu^a e^{i\Phi_0\tau},$$

где x_μ^a определена уравнением (12). С помощью прямых вычислений мы получим, что

$$\begin{aligned} x_\mu^{1,2}(\tau) &= 2\alpha' P_\mu \tau + Z_\mu - \frac{1}{2} \Gamma_\mu^{ij}(P) \epsilon_{ijk} S_k \pm 2\alpha' \sqrt{P^2} e_\mu^i(P) (n_i \cos \tau - \tilde{n}_i \sin \tau), \\ \dot{x}_\mu^{1,2}(\tau) &= 2\alpha' P_\mu \mp 2\alpha' \sqrt{P^2} e_\mu^i(P) (n_i \sin \tau + \tilde{n}_i \cos \tau). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя уравнение (21), можно показать, что подынтегральное выражение в уравнении (20) периодически по τ с периодом 2π , если только импульс фотона удовлетворяет дополнительному условию (19), которое также задает зависимость k_μ от P :

$$k_\mu = \frac{\nu}{2\alpha' P n} n_\mu, \quad (22)$$

здесь n_μ — произвольный изотопический вектор, для которого

$$n^2 = 0.$$

Из соотношений (22) и (10) непосредственно следуют правила коммутации для координаты центра масс:

$$[X_\mu^{\text{cm}}, k_\rho] = -\frac{2\alpha'}{\nu} i k_\mu k_\rho.$$

Таким образом,

$$kx^a = x^a k, \quad [kx^a, k_\mu] = 0.$$

Более того, хотя k_μ не коммутируют с $J_\mu(k)$, тем не менее порядок операторов в условии поперечности (18) неважен. Меняя поляризацию $\epsilon_\mu \rightarrow k_\mu$ в выражении (20), мы получим, что

$$\begin{aligned} k_\mu J^\mu(k) &= \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)kx^a(\tau)} k \dot{x}^a(\tau) e^{i\varphi kx^a(\tau)} = \\ &= \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)kx^a(\tau)} (-i) [\Phi_0, kx^a(\tau)] e^{i\varphi kx^a(\tau)}. \end{aligned}$$

Далее, напомним формулу

$$[A, e^{iB}] = \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)B} [A, B] e^{i\varphi B},$$

которая выполняется для произвольных операторов A и B . Таким образом, имеем

$$k_\mu J^\mu(k) = \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau (-i) [\Phi_0, e^{ikx^a(\tau)}] = \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau \frac{d}{d\tau} e^{ikx^a(\tau)}.$$

Функция $\exp ikx^a(\tau)$ периодична с периодом 2π вследствие условия (19), наложенного на импульс фотона. Тем самым в итоге получим, что

$$k_\mu J^\mu(k) = 0.$$

Отсюда следует, что интеграл по φ в гамильтониане (20) есть не что иное, как специальное упорядочение операторов $\dot{x}_\mu$ и $\exp ikx$, которое обеспечивает градиентную инвариантность взаимодействия в квантовом случае.

С помощью схожих рассуждений можно показать, что гамильтониан H_{int} коммутирует с условием массовой поверхности:

$$\begin{aligned} [\Phi_0, H_{\text{int}}] &= \epsilon_\mu(k) \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^1 d\varphi [\Phi_0, e^{i(1-\varphi)kx^a(\tau)} \dot{x}^\mu(\tau) e^{i\varphi kx^a(\tau)}] = \\ &= \epsilon_\mu(k) \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau i \frac{d}{d\tau} \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)kx^a(\tau)} \dot{x}^\mu(\tau) e^{i\varphi kx^a(\tau)} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (23) выполняется благодаря периодичности подынтегрального выражения, что следует из условия (19).

Таким образом, мы доказали, что выражение (20) действительно удовлетворяет всем необходимым условиям и может играть роль вершинного оператора, действующего в физическом подпространстве и описывающего испускание безмассовых векторных частиц.

В дальнейшем мы рассмотрим редуцирование матричных элементов вершинного оператора в физическом подпространстве. Используя явный вид координатной переменной $x_\mu^a(\tau)$, мы можем явно выделить зависимость от τ ее различных составляющих:

$$x_\mu^a(\tau) = 2\alpha' P_\mu \tau + y_\mu^{\text{cm}} \pm y_\mu^{\text{rel}}(\tau),$$

откуда

$$kx^a(\tau) = \nu\tau + ky^{\text{cm}} \pm ky^{\text{rel}}(\tau),$$

здесь y_μ^{rel} — постоянная составляющая $x_\mu^{\text{cm}}(\tau)$, а $y_\mu^{\text{rel}}(\tau)$ совпадает с $x_\mu^{\text{rel}}(\tau)$. Из перестановочных соотношений (13) следует, что

$$[ky^{\text{cm}}, ky^{\text{rel}}] = 0,$$

и, следовательно, мы можем переписать гамильтониан взаимодействия (20) в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \epsilon_\mu(k) \sum_a e^a \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} \int_0^1 d\varphi e^{i(1-\varphi)ky^{\text{rel}}(\tau)} \times \\ &\times \left(e^{i(1-\varphi)ky^{\text{cm}}} (P_\mu + (-1)^a \sqrt{P^2} e_\mu^i \tilde{n}_i(\tau)) e^{i\varphi ky^{\text{cm}}} \right) e^{i\varphi ky^{\text{rel}}(\tau)}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (13) и разложение

$$\exp(-A)B \exp A = B - [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] - \dots,$$

после сравнительно простых, но длинных выкладок мы получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= e^{\varphi ky^{\text{cm}}} \sum_a e^a \epsilon_i \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} \times \\ &\times e^{(-1)^a i(1-\varphi)\vec{\beta}\vec{n}(\tau)} \tilde{n}_\perp^i(\tau) e^{(-1)^a i\varphi\vec{\beta}\vec{n}(\tau)}, \end{aligned} \quad (24)$$

в которой

$$\tilde{n}_\perp^i = \left(\delta_{ij} - \frac{\beta_i \beta_j}{\vec{\beta}^2} \right) \tilde{n}_i, \quad \beta^i = 2\alpha' \sqrt{P^2} e_\mu^i(P) k^\mu,$$

а $\epsilon_i = e_\mu^i(P) \epsilon^\mu(k)$ – компоненты поляризации в системе отсчета, связанной с тетрадой $e_\mu^i(P)$. Вследствие того что траектории движения обоих зарядов совпадают, два члена в суммировании по индексу “ a ” в выражении (24) равны с точностью до знака. В самом деле, $\vec{n}(\tau + \pi) = -\vec{n}(\tau)$, и, таким образом, единственное различие между двумя указанными членами состоит в сдвиге по τ в множителе $\exp i\nu\tau$. Это приводит только к возникновению множителя $(-1)^\nu$. В итоге мы получим, что

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= (e_1 + (-1)^\nu e_2) e^{iky^{\text{cm}}} \epsilon_i \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} \times \\ &\times \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} e^{i(1-\varphi)\vec{\beta}\vec{n}(\tau)} \tilde{n}_\perp^i(\tau) e^{i\varphi\vec{\beta}\vec{n}(\tau)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Действие оператора $\exp iky^{\text{cm}}$ на базисные векторы (17) может быть выведено с помощью простых вычислений, представленных в деталях в работе [7]. Здесь мы приводим лишь конечный ответ:

$$e^{iky^{\text{cm}}} \Psi_{\vec{Q}, l, m}(\vec{P}, \vec{n}) = \Psi_{\vec{Q} - \vec{k}, l, m}(\vec{P}, w^{ij}(P) n_j),$$

где ортогональная матрица $w^{ij}(P)$ имеет вид

$$w^{ij}(P) = -e_\mu^i \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu k^\nu}{Pk} + k^\mu k^\nu \frac{P^2 + \sqrt{P^2(P-k)^2}}{Pk} \right) e_\nu^j$$

и возникает при следующем сдвиге в аргументе поля тетрады $e_\mu^i(P): P_\mu \rightarrow P_\mu - k_\mu$. При этом в матричном элементе

$$(\Psi_2, H_{\text{int}} \Psi_1) = \int d^4 P d^2 n_i \tilde{\Psi}_{\vec{Q}_2, l', m'}^*(\vec{P}, \vec{n}) H_{\text{int}} \Psi_{\vec{Q}_1, l, m}(\vec{P}, \vec{n})$$

появляются δ -функция $\delta(\vec{Q}_2 + \vec{k} - \vec{Q}_1)$, отвечающая закону сохранения импульса, и матрица w^{ij} , задающая поворот конечного состояния. Тем самым мы свели матричный элемент гамильтониана (25) к матричному элементу оператора $\epsilon^i B_\nu^i$, где

$$\begin{aligned} B_\nu^i &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} \tilde{n}^i(\varphi, \tau), \\ \tilde{n}^i(\varphi, \tau) &= e^{i(1-\varphi)\vec{\beta}\vec{n}(\tau)} \tilde{n}_\perp^i(\tau) e^{i\varphi\vec{\beta}\vec{n}(\tau)}. \end{aligned}$$

Зависимость подынтегрального выражения от параметра τ задается оператором Φ_0 , который в данном случае сводится к спиновому оператору γ , поскольку в этом пределе остаются лишь внутренние степени свободы струны. Тогда имеем

$$B_\nu^i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} e^{i\tau\gamma} \left(\int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} \tilde{n}^i(\varphi, 0) \right) e^{-i\tau\gamma}.$$

Действие оператора $\exp i\tau\gamma$ в матричном элементе $\langle l_2, m_2 | B_\nu^i | l_1, m_1 \rangle$ дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \langle l_2, m_2 | B_\nu^i | l_1, m_1 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\nu\tau} e^{il_2\tau} e^{-il_1\tau} \times \\ &\times \left\langle l_2, m_2 \left| \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} \tilde{n}^i(\varphi, 0) \right| l_1, m_1 \right\rangle = \\ &= \delta_{l_1, l_2+\nu} \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} \langle l_2, m_2 | \tilde{n}^i(\varphi, 0) | l_1, m_1 \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Итак, мы свели задачу вычисления электромагнитного перехода в нашем протяженном релятивистском объекте к задаче вычисления матричного элемента оператора $\tilde{n}^i(\varphi, \tau)$, которая сама по себе достаточно сложна, но ее решение известно из обычной теории излучения. Действительно, используя соотношение $\tilde{n}_k = i[n_k, \gamma]$, мы можем привести оператор в уравнении (26) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} e^{i(1-\varphi)\vec{\beta}\vec{n}} \tilde{n}_\perp^i e^{i\varphi\vec{\beta}\vec{n}} &= \\ &= i \left[n_i, \int_0^1 d\varphi (P^2 - 2\nu\varphi/\alpha')^{1/2} e^{i(1-\varphi)\vec{\beta}\vec{n}} \gamma e^{i\varphi\vec{\beta}\vec{n}} \right] = i[n_i, h]. \end{aligned} \quad (27)$$

Напомним, что в нерелятивистской теории оператор электромагнитного перехода пропорционален $[\vec{d}, H]$, где $\vec{d}$ — дипольный момент и H — гамильтониан системы. В нашем случае спиновый оператор γ играет роль гамильтониана для внутренних степеней свободы. Таким образом, уравнение (27) показывает, что релятивистский случай отличается от нерелятивистского только специальным упорядочением операторов.

В заключение отметим, что обсуждение в данной работе затронуло наиболее специфические свойства, присущие взаимодействию протяженных релятивистских объектов. Как следует из нашего рассмотрения, мы не делали никаких предположений об исходной структуре оператора взаимодействия. Вместо этого рассмотрение было начато с классического минимального взаимодействия вида $e\dot{x}_\mu A^\mu(x)$. Известная “теорема об отсутствии взаимодействия” утверждает, что координаты частиц становятся некоммутирующими операторами в квантовой теории. В таком случае оказывается очень трудно обеспечить локальную калибровочную инвариантность взаимодействия, однако мы показали, что это может быть сделано за счет введения специального операторного упорядочения. Заметим, что та же проблема была рассмотрена ранее в работах [8, 9]. Преимущество нашего подхода состоит в том, что были выбраны такие координаты зарядов, которые следуют из струнной механики и геометрического образа струны. Вообще говоря, если бы в качестве координат зарядов использовалась произвольная комбинация канонических переменных, то мог бы нарушиться принцип причинности.

Один из авторов (Г. П. Пронько) благодарит профессора Арно Бома за многочисленные ценные обсуждения вопросов, рассмотренных в статье. Работа Г. П. Пронько была частично поддержана грантом РФФИ № 95-01-00647а.

Список литературы

- [1] *A. Мессиа.* Квантовая механика. М.: Наука, 1978.
- [2] *D. G. Currie.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1470; *D. G. Currie, T. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan.* Rev. Mod. Phys. 1965. V. 35. P. 350.
- [3] *Е. Б. Бердников, Г. П. Пронько.* ЯФ. 1991. Т. 54. С. 765.
- [4] *Е. Б. Бердников, Г. П. Пронько.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 3311.
- [5] *A. Bohm, M. Loewe, P. Magnollay, M. Tarlini, R. R. Aldiner, L. C. Biedenharn, H. van Dam.* Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 791; P. 2828.
- [6] *A. Bohm.* Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1203.
- [7] *Е. Б. Бердников, Г. Г. Nanobashvili, Г. П. Pronko.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 2447; P. 2551.
- [8] *A. Bohm, M. Loewe, P. Magnollay.* Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 2304.
- [9] *R. P. Feynman, M. Kislinger, F. Ravndal.* Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 2706.

Перевод с английского Л. О. Чехова.

Поступила в редакцию 27.X.1995 г.,
после доработки 24.IV.1996 г.

Е. Б. Berdnikov, G. G. Nanobashvili, G. P. Pronko

PHOTON RADIATION BY AN EXTENDED RELATIVISTIC OBJECT

The operator of electromagnetic transition of extended relativistic object – straight-line string has been constructed. It is shown that the main difficulties which arise due to noncommutativity of coordinates and velocities of charges in relativistic quantum mechanics may be overcome by special ordering of operators.