Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, О невозможности гравитационного коллапса в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 2, 324–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1046>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:12:54

А. А. Логунов*, М. А. Мествиришвили[†]
**О НЕВОЗМОЖНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО
КОЛЛАПСА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ**

В рамках релятивистской теории гравитации на примере пылевидной материи показано, что гравитационное притяжение не приводит к образованию “черных дыр”. Установлено, что при отсутствии вещества гравитационное поле также отсутствует. Поэтому вакуум не создает гравитационного поля. Обсуждается механизм выделения энергии при аккреции вещества на объекты большой массы.

Ранее задача об отсутствии явления гравитационного коллапса, а следовательно, и отсутствия в природе “черных дыр” — объектов, не имеющих материальных границ и “отрезанных” от внешнего мира, рассматривалась с точки зрения релятивистской теории гравитации (РТГ) в работах [1, 2] на основе анализа статического сферически-симметричного решения путем перехода в сопутствующую систему координат. В настоящей работе для изучения возможности гравитационного коллапса с точки зрения РТГ мы будем следовать методу, который Вайнберг применил к исследованию гравитационного коллапса [3] в рамках общей теории относительности (ОТО), предположив, что плотность вещества не зависит от пространственных координат и является функцией только времени. На примере пылевидной материи (давление равно нулю) он показал наличие гравитационного коллапса с точки зрения ОТО. Впервые явление гравитационного коллапса в теории Эйнштейна было рассмотрено в работе [4]. Далее при проведении расчетов мы будем опираться на работу [5].

Уравнения РТГ запишем в форме [6]

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R + \frac{m^2}{2}\left[\delta_{\mu}^{\nu} + g^{\nu\alpha}\gamma_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (1)$$

$$D_{\mu}\tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

D_{μ} — ковариантная производная в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, m — масса гравитона. Мы выбрали для удобства систему единиц $G = \hbar = c = 1$.

Тензор энергии-импульса вещества имеет вид

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + p)u^{\nu}u_{\mu} - \delta_{\mu}^{\nu}p, \quad u^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}, \quad (3)$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская область; Московский государственный университет, Москва, Россия

[†]Московский государственный университет, Москва, Россия

здесь ρ – плотность вещества, p – давление, ds – интервал риманова пространства. Все рассмотрение в дальнейшем будет проводиться в инерциальной системе в сферических координатах r, Θ, Φ .

Интервал в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4)$$

Эффективную метрику риманова пространства в этих координатах будем искать в форме

$$ds^2 = U(t, r) dt^2 - V(t, r) dr^2 - W(t, r)(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2), \quad (5)$$

здесь

$$g_{00} = U, \quad g_{11} = -V, \quad g_{22} = -W, \quad g_{33} = -W \sin^2 \Theta. \quad (6)$$

Определитель g , составленный из компонент $g_{\mu\nu}$, равен

$$g = -UVW^2 \sin^2 \Theta. \quad (7)$$

Тензорная плотность

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

на основании выражений (6) и (7) имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{00} &= \sqrt{\frac{V}{U}} W \sin \Theta, & \tilde{g}^{11} &= -\sqrt{\frac{U}{V}} W \sin \Theta, \\ \tilde{g}^{22} &= -\sqrt{UV} \sin \Theta, & \tilde{g}^{33} &= -\frac{\sqrt{UV}}{\sin \Theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Символы Кристоффеля пространства Минковского легко вычисляются и равны

$$\begin{aligned} \gamma_{22}^1 &= -r, & \gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \Theta, & \gamma_{12}^2 &= \gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & \gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \Theta. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом выражений (8) и (9) уравнение (2) принимает вид

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta}^\nu \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0 \quad (10)$$

и сводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{V}{U}} W \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{U}{V}} W \right) = 2r \sqrt{UV}. \quad (12)$$

Из уравнения (11) следует

$$\sqrt{V} W = f(r) \sqrt{U}. \quad (13)$$

Используя выражение для коэффициентов связности риманова пространства

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (14)$$

а также формулы (6), найдем компоненты символов Кристоффеля, отличные от нуля:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial t}, & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial r}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial V}{\partial t}, \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial t}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial r}, \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2U} \frac{\partial W}{\partial t}, & \Gamma_{33}^0 &= \sin^2 \Theta \Gamma_{22}^0, \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2V} \frac{\partial W}{\partial r}, & \Gamma_{33}^1 &= \sin^2 \Theta \Gamma_{22}^1, \\
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2W} \frac{\partial W}{\partial t}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2W} \frac{\partial W}{\partial r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, \\
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2W} \frac{\partial W}{\partial t}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2W} \frac{\partial W}{\partial r}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \Theta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Величины $R_{\mu\nu}$ и R , входящие в уравнения (1), выражаются через символы Кристоффеля следующим образом:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma, \tag{16}$$

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} (\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\rho}^\rho) + g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma). \tag{17}$$

Подставляя выражения (6) и (15) в формулы (16) и (17) и используя полученные выражения в уравнениях (1), находим следующую систему уравнений РТГ для определения неизвестных переменных U, V, W, ρ, p, u^ν :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{W} + \frac{1}{4VW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2WV^2} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2UVW} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{4UW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \\
- \frac{1}{VW} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{m^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} - \frac{2r^2}{W} \right) \right] = 8\pi T_0^0,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{W} + \frac{1}{UW} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{1}{2U^2W} \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{4UW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{4VW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 - \\
- \frac{1}{2UVW} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{m^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U} - \frac{2r^2}{W} \right) \right] = 8\pi T_1^1,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[\frac{1}{UW} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{UV} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{VW} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] + \\
+ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{VW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{V^2W} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{VU^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right) \right] + \\
+ \frac{1}{UV^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right) - \frac{1}{WU^2} \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{UW^2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \\
- \frac{1}{UVW} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial t} \right) + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V} \right) \right] = 8\pi T_2^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$- \frac{1}{UW} \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r} + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2UVW} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2U^2W} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial t} = 8\pi T_1^0. \tag{21}$$

Уравнения для T_3^3 имеют тот же вид, что и уравнение (20), а это означает, что

$$T_2^2 = T_3^3.$$

Левые части других уравнений с компонентами T_2^0, T_3^0, T_k^i ($i \neq k$) тождественно равны нулю, и, следовательно, имеют место равенства

$$T_2^0 = T_3^0 = 0, \quad T_k^i = 0 \quad (\text{если } i \neq k). \quad (22)$$

Отсюда непосредственно следует

$$u_2 = u_3 = 0.$$

Из ковариантного закона сохранения, являющегося следствием уравнений (1) и (2),

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0, \quad (23)$$

где ∇_μ — ковариантная производная в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, $\tilde{T}^{\mu\nu}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu},$$

легко получить следующие уравнения:

$$\frac{1}{\rho + p} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \ln(\sqrt{V} W), \quad (24)$$

$$\frac{1}{\rho + p} \frac{\partial \rho}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{U}. \quad (25)$$

Подставляя в уравнение (24) соотношение (13), получим

$$\frac{1}{\rho + p} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \ln \sqrt{U}. \quad (26)$$

Поскольку в нашей задаче мы предполагаем, что плотность ρ и давление p являются функциями только времени, то функция U будет зависеть только от переменной t . С учетом этого обстоятельства уравнение (12) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{\sqrt{V}} \right) = 2r\sqrt{V}. \quad (27)$$

Учитывая в этом уравнении соотношение (13), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(r)}{V} \right] = 2r\sqrt{\frac{V}{U}}. \quad (28)$$

Умножая это уравнение на $\sqrt{f/V}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f}{V} \right]^{3/2} = 3r\sqrt{\frac{f}{U}}. \quad (29)$$

Чтобы обеспечить однородное и изотропное распределение вещества в трехмерном пространстве, мы будем искать решение для неизвестных V , W с разделяющимися переменными r и t . Однородное и изотропное распределение вещества в трехмерном пространстве свидетельствует об однородности и изотропности эффективной римановой трехмерной геометрии. Из уравнения (29) имеем

$$V(t, r) = U^{1/3}(t) \frac{f(r)}{[3 \int r \sqrt{f} dr + \varphi_0]^{2/3}}, \quad (30)$$

здесь φ_0 — произвольная постоянная.

Подставляя выражение (30) в (13), получим

$$W(t, r) = U^{1/3}(t) \sqrt{f(r)} \left[3 \int r \sqrt{f} dr + \varphi_0 \right]^{1/3}. \quad (31)$$

Итак, мы нашли следующее решение с разделяющимися переменными t и r :

$$U(t, r) = U(t), \quad V(t, r) = U^{1/3}(t) V_1(r), \quad W(t, r) = U^{1/3}(t) W_1(r), \quad (32)$$

здесь

$$V_1(r) = f(r) Z^{-2/3}(r), \quad W_1(r) = \sqrt{f(r)} Z^{1/3}(r), \quad (33)$$

$$Z(r) = 3 \int r \sqrt{f} dr + \varphi_0.$$

Подставляя (32) в уравнение (18), получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{W_1} - \frac{1}{V_1 W_1} W_1'' + \frac{1}{4 V_1 W_1^2} (W_1')^2 + \frac{1}{2 W_1 V_1^2} V_1' W_1' - \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2 V_1} + \frac{r^2}{W_1} \right) \right] = \\ & = U^{1/3}(t) \left[-\frac{1}{12 U^3} \dot{U}^2 + 8 \pi \rho(t) - \frac{m^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2 U} \right) \right] = d_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Левая часть этого уравнения является функцией переменной r , тогда как правая часть зависит только от переменной t , т.е. переменные разделяются.

Отсюда вытекают следующие два уравнения:

$$\frac{1}{W_1} - \frac{1}{V_1 W_1} W_1'' + \frac{1}{4 V_1 W_1^2} (W_1')^2 + \frac{1}{2 W_1 V_1^2} V_1' W_1' - \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2 V_1} + \frac{r^2}{W_1} \right) = d_0, \quad (35)$$

$$\frac{1}{12 U^3} \dot{U}^2 - 8 \pi \rho(t) + \frac{m^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2 U} \right) + d_0 U^{-1/3} = 0, \quad (36)$$

здесь и далее

$$V_1' = \frac{dV_1}{dr}, \quad \dot{U} = \frac{dU}{dt}, \quad \ddot{U} = \frac{d^2 U}{dt^2}, \quad V_1'' = \frac{d^2 V_1}{dr^2}.$$

Подставляя (32) в уравнение (19), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W_1} - \frac{1}{4 V_1 W_1^2} (W_1')^2 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2 V_1} - \frac{r^2}{W_1} \right) = \\ & = U^{1/3}(t) \left[-\frac{1}{3 U^2} \ddot{U} + \frac{5}{12 U^3} \dot{U}^2 - 8 \pi p(t) - \frac{m^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2 U} \right) \right] = -d_1, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда следуют уравнения

$$-\frac{1}{W_1} + \frac{1}{4V_1W_1^2}(W_1')^2 - \frac{m^2}{2}\left(\frac{1}{2V_1} - \frac{r^2}{W_1}\right) = d_1, \quad (38)$$

$$\frac{1}{3U^2}\ddot{U}^2 - \frac{5}{12U^3}\dot{U}^2 + 8\pi p(t) + \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2U}\right) - d_1U^{-1/3} = 0. \quad (39)$$

Подставляя (32) в уравнение (20), находим, что переменные в этом уравнении также разделяются, и уравнение (20) сводится к двум уравнениям

$$\frac{1}{3U^2}\ddot{U}^2 - \frac{5}{12U^3}\dot{U}^2 + 8\pi p(t) + \frac{m^2}{2}\left[1 - \frac{1}{2U}\right] = d_2U^{-1/3}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{V_1W_1}W_1'' - \frac{1}{4}\frac{1}{V_1W_1^2}(W_1')^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{V_1^2W_1}V_1'W_1' + \frac{m^2}{4V_1} = d_2. \quad (41)$$

Сравнивая уравнения (39) и (40), устанавливаем равенство постоянных:

$$d_1 = d_2. \quad (42)$$

Разделив левую и правую части уравнения (35) на два и сложив их соответственно с левой и правой частями уравнения (41), получим

$$\frac{1}{2W_1} - \frac{1}{8V_1W_1^2}(W_1')^2 + \frac{m^2}{8V_1} - \frac{m^2r^2}{4W_1} = \frac{d_0}{2} + d_1. \quad (43)$$

Поступив аналогичным образом с уравнениями (38) и (43), найдем следующее соотношение между постоянными:

$$d_0 + 3d_1 = 0. \quad (44)$$

Складывая уравнения (35) и (38) и учитывая (42) и (44), мы получим уравнение (41).

Таким образом, из системы уравнений (35)–(36), (38)–(39) и (40)–(41) независимыми будут только уравнения (35)–(36) и (38)–(39).

Обратимся теперь к уравнению (21). Подставляя (32) в уравнение (21), мы убедимся в том, что левая часть этого уравнения тождественно обращается в нуль. Отсюда вытекает, что

$$T_1^0 = 0, \quad (45)$$

и, следовательно, u_1 также равно нулю.

Условия (22) и (45) обеспечивают однородное и изотропное распределение вещества в трехмерном пространстве.

Перейдем к рассмотрению трехмерной геометрии, определяемой интервалом

$$dl^2 = V_1(r) dr^2 + W_1(r)[d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2]. \quad (46)$$

Метрические коэффициенты, которые мы обозначим через S_{ik} , будут равны

$$S_{11} = V_1(r), \quad S_{22} = W_1(r), \quad S_{33} = W_1(r) \sin^2 \Theta. \quad (47)$$

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2V_1}V_1', & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2V_1}W_1', & \Gamma_{33}^1 &= \sin^2 \Theta \cdot \Gamma_{22}^1, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2W_1}W_1', & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \Theta, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{12}^2.\end{aligned}\quad (48)$$

На основе этих выражений вычислим тензор кривизны Римана–Кристоффеля согласно формуле

$$R_{mnp}^k = \partial_p \Gamma_{mn}^k - \partial_n \Gamma_{mp}^k + \Gamma_{mn}^e \Gamma_{ep}^k - \Gamma_{mp}^e \Gamma_{en}^k. \quad (49)$$

Компоненты тензора кривизны будут равны

$$R_{212}^1 = \frac{1}{2V_1}W_1'' - \frac{1}{4V_1W_1}(W_1')^2 - \frac{1}{4V_1^2}V_1'W_1', \quad (50)$$

$$R_{121}^2 = \frac{1}{2W_1}W_1'' - \frac{1}{2W_1^2}(W_1')^2 - \frac{1}{4V_1W_1}V_1'W_1', \quad (51)$$

$$R_{323}^2 = \sin^2 \Theta \left(-1 + \frac{1}{4V_1W_1}(W_1')^2 \right), \quad (52)$$

$$R_{232}^3 = -1 + \frac{1}{4V_1W_1}(W_1')^2, \quad R_{313}^1 = \sin^2 \Theta \cdot R_{212}^1, \quad R_{131}^3 = R_{121}^2. \quad (53)$$

Учитывая уравнения (35) и (38), компоненты тензора кривизны трехмерного пространства можно представить в форме

$$R_{212}^1 = W_1 \left(d_1 - \frac{m^2}{4V_1} \right), \quad (54)$$

$$R_{121}^2 = V_1 \left(d_1 - \frac{m^2}{4V_1} \right), \quad (55)$$

$$R_{232}^3 = W_1 \left[d_1 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{r^2}{W_1} \right) \right], \quad (56)$$

$$R_{323}^2 = \sin^2 \Theta \cdot R_{232}^3, \quad R_{313}^1 = \sin^2 \Theta \cdot R_{212}^1, \quad R_{131}^3 = R_{121}^2. \quad (57)$$

Отсюда, учитывая (47), найдем

$$R_{1212} = V_1 W_1 \left(d_1 - \frac{m^2}{4V_1} \right), \quad (58)$$

$$R_{1313} = \sin^2 \Theta \cdot R_{1212}, \quad (59)$$

$$R_{2323} = \sin^2 \Theta \cdot W_1^2 \left[d_1 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{r^2}{W_1} \right) \right]. \quad (60)$$

Скалярная кривизна равна

$$k = 6 \left[d_1 - \frac{m^2}{12V_1} - \frac{m^2 r^2}{6W_1} \right]. \quad (61)$$

При однородном и изотропном распределении вещества в пространстве (как это имеет место в нашем случае) эффективное риманово трехмерное пространство также будет изотропным и однородным, а поэтому тензор кривизны имеет общий вид

$$R_{emnp} = \frac{k}{6}(S_{ne}S_{pm} - S_{pe}S_{mn}), \quad (62)$$

здесь k – постоянная.

Отсюда следует

$$R_{1212} = \frac{k}{6}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{12}) = \frac{k}{6}V_1W_1, \quad (63)$$

$$R_{2323} = \frac{k}{6}(S_{22}S_{33} - S_{23}S_{23}) = \frac{k}{6}W_1^2 \sin^2 \Theta. \quad (64)$$

Но эти выражения должны быть совместны с соответствующими выражениями (58) и (60):

$$k = 6 \left(d_1 - \frac{m^2}{4V_1} \right), \quad (65)$$

$$k = 6 \left[d_1 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{r^2}{W_1} \right) \right]. \quad (66)$$

Из выражения (65) следует, что V_1 не зависит от переменной r :

$$V_1 = \frac{m^2}{4d_1 - \frac{2}{3}k}. \quad (67)$$

Из сравнения выражений (65) и (66) следует

$$W_1 = \frac{m^2 r^2}{4d_1 - \frac{2}{3}k}. \quad (68)$$

Поскольку V_1 и W_1 удовлетворяют уравнениям (35) и (38), то после подстановки этих выражений, например, в уравнение (38) найдем

$$k = 0. \quad (69)$$

В силу этого равенства геометрия трехмерного пространства будет евклидовой, в которой квадрат расстояния между бесконечно близкими точками имеет вид

$$dl^2 = a[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (70)$$

Здесь мы положили

$$d_1 = \frac{m^2}{4a}. \quad (71)$$

Риманова геометрия пространства-времени определяется интервалом

$$ds^2 = U(t) dt^2 - U^{1/3}(t)a[dr^2 + r^2(d\Theta^2 + d\Phi^2)]. \quad (72)$$

Если перейти к собственному времени $d\tau$:

$$d\tau = \sqrt{U} dt, \quad (73)$$

и ввести обозначение

$$R^2(\tau) = U^{1/3}, \quad (74)$$

интервал (72) принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - aR^2[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (75)$$

Уравнения (36) и (39) для функции $R(\tau)$ и уравнение (25) для переменной $\rho(\tau)$ в этих обозначениях принимают следующую форму:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\tau) - \frac{\omega}{R^6} \left(1 - \frac{3R^4}{a} + 2R^6\right), \quad (76)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) - 2\omega \left(1 - \frac{1}{R^6}\right), \quad (77)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{d\tau} = -\frac{1}{3(\rho + p/c^2)} \frac{d\rho}{d\tau}, \quad (78)$$

здесь

$$\omega = \frac{1}{12} \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2. \quad (79)$$

В формулах (76)–(78) мы восстановили естественную размерность, вводя постоянные G , $\hbar$, c .

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда пространство заполнено пылевидной материей. Это означает, что во всех формулах будем полагать давление равным нулю.

В этом случае из уравнения (78) находим

$$\rho(\tau) = \frac{b}{R^3}. \quad (80)$$

Физическое решение должно удовлетворять условию причинности

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0, \quad \gamma_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0.$$

В нашем случае с учетом (75) оно принимает вид

$$R^2(R^4 - a) \leq 0.$$

Для соблюдения условия причинности во всей области изменения $R(\tau)$, а также для того чтобы при отсутствии вещества и гравитационного поля эффективная риманова метрика (5) точно перешла в исходную метрику пространства Минковского (4), естественно положить

$$a = R_{\max}^4. \quad (81)$$

На основании (80) имеем

$$b = \rho_{\min} R_{\max}^3. \quad (82)$$

В точке остановки $dR/d\tau = 0$ при максимальной плотности $\rho_{\max}$ из уравнения (76) имеем

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_{\max} \simeq \frac{\omega}{R_{\min}^6}. \quad (83)$$

Учитывая (80) и (82), найдем

$$\rho_{\max} = \frac{\rho_{\min} R_{\max}^3}{R_{\min}^3}. \quad (84)$$

Подставляя это выражение в равенство (83), получим

$$R_{\min}^3 = \frac{3\omega}{8\pi G} \frac{1}{\rho_{\min} R_{\max}^3}. \quad (85)$$

В точке остановки $dR/d\tau = 0$ при минимальной плотности $\rho_{\min}$ из уравнения (76) находим

$$\rho_{\min} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2. \quad (86)$$

Подставляя (86) в выражение (85), найдем

$$R_{\min}^3 = \frac{1}{2R_{\max}^3}. \quad (87)$$

Используя это выражение в формуле (84), получим

$$2R_{\max}^6 = \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \alpha, \quad \rho_{\max} = \alpha\rho_{\min}. \quad (88)$$

Выражение (80) с учетом (82) имеет вид

$$\rho(\tau) = \rho_{\min} \left(\frac{R_{\max}}{R(\tau)} \right)^3. \quad (89)$$

Подставляя это выражение в уравнение (76) и переходя к новой переменной

$$x = \frac{R_{\max}}{R(\tau)}, \quad (90)$$

получим

$$\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{\omega x^2}{R_{\max}^6} (x-1) [(2R_{\max}^6 - x^3)(x^2 + x + 1) - 3x^2]. \quad (91)$$

При нахождении (91) нами взято точное выражение для $\rho_{\min}$, равное

$$\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{R_{\max}^6} \right). \quad (86a)$$

Если принять во внимание неравенство

$$\frac{3}{2} \frac{1}{R_{\max}^6} \ll 1,$$

то уравнение (91) в этом приближении имеет вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\omega x^2}{R_{\max}^6} (x^3 - 1)(\alpha - x^3).$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\tau = 2(24\pi G \rho_{\max})^{1/2} \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^2 J, \quad (92)$$

здесь

$$J = \int_1^y \frac{dx}{x[(\alpha - x^3)(x^3 - 1)]^{1/2}}, \quad (93)$$

$$y = \left(\frac{\rho(\tau)}{\rho_{\min}}\right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}.$$

Интеграл (93) легко вычисляется и равен

$$J(y) = \frac{1}{3\sqrt{\alpha}} \left[\arcsin \frac{(1+\alpha)y^3 - 2\alpha}{(1-\alpha)y^3} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (94)$$

На основании (92) и (94) имеем

$$\rho(\tau) = \frac{2\alpha\rho_{\min}}{(1+\alpha) - (1-\alpha)\cos\lambda\tau}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right). \quad (95)$$

Из выражения (95) очевидно, что плотность вещества всегда ограничена. Время эволюции от минимальной плотности $\rho_{\min}$ до максимальной плотности $\rho_{\max}$ равно

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi\hbar}{mc^2}.$$

Отсюда видно, что полупериод циклического развития определяется фундаментальными постоянными $\hbar$, c и массой гравитона m . Изучая эволюцию однородной и изотропной Вселенной, можно получить следующее ограничение на массу гравитона: $m \leq 10^{-65}$ г. Эта оценка непосредственно следует из наблюдательных данных для постоянной Хаббла H и параметра замедления q . Из выражений (89) и (95) находим

$$R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right]^{1/6} \left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \cos\lambda\tau \right]^{1/3}. \quad (96)$$

Из выражения (96) очевидно, что пылевидная материя после достижения минимального значения R переходит в стадию расширения, поскольку в силу уравнений (77) вторая производная $\ddot{R}$ в этой области строго положительна, что и приводит к гравитационному отталкиванию. Таким образом, согласно РТГ, в противоположность ОТО, гравитационный коллапс невозможен, а следовательно, не могут образоваться и “черные дыры”. Какая бы исходная масса тела ни была, она не может превратиться в процессе эволюции в “черную дыру”, поскольку гравитационное притяжение сменяется гравитационным отталкиванием. Если вещество отсутствует ($\rho = 0$), то $\rho_{\min} = 0$, а следовательно,

согласно выражению (86a) $R_{\max} = 1$. В этом случае, учитывая (81), уравнение (76) можно записать в форме

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\tau}\right)^2 = -\frac{2\omega}{R^6} (R^2 - 1)^2 \left(R^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что $R = 1$ и геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой. Таким образом, согласно РТГ при отсутствии вещества гравитационное поле отсутствует, а следовательно, вакуум не создает гравитационного поля. Вакуумная энергия не эквивалентна космологической постоянной. Космологическая постоянная выражается через массу гравитона m :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2.$$

Рассмотрим уравнение (77) с точки зрения классической механики. Запишем его в форме

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) R + \frac{8\pi G}{3} \rho R - 2\omega \left(R - \frac{1}{R^5}\right). \quad (77a)$$

Уравнения (78) запишем в следующем виде:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = -\frac{R}{3} \frac{d\rho}{dR}. \quad (78a)$$

Подставляя (78a) в (77a), получим

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \frac{d}{dR} \left[\frac{4\pi G}{3} \rho R^2 - \omega \left(R^2 + \frac{1}{2R^4}\right) \right]. \quad (97)$$

Вводя аналог потенциальной энергии

$$V = -\frac{4\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\omega}{2R^4} (1 + 2R^6),$$

уравнение (97) можно записать в форме

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = -\frac{dV}{dR}. \quad (98)$$

Умножая это уравнение на $dR/d\tau$, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V \right] = 0. \quad (99)$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V = E. \quad (100)$$

Это выражение имеет форму закона сохранения. Постоянная E есть интеграл движения. Сравнивая уравнение (100) с уравнением (76) и учитывая условие (81), найдем связь постоянной интегрирования E с величиной $R_{\max}$:

$$E = \frac{1}{8} \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{R_{\max}^4}. \quad (101)$$

Используя выражение (88), установим связь постоянной E с максимальной плотностью $\rho_{\max}$:

$$E = \frac{1}{8} \left[\frac{(mc^2/\hbar)^5}{8\pi G \rho_{\max}} \right]^{2/3}. \quad (102)$$

В данной задаче эволюция материальной системы однозначно определяется только при условии задания значения интеграла движения – максимальной плотности вещества $\rho_{\max}$, которая всегда ограничена. Это требование естественно, поскольку решения дифференциальных уравнений однозначно определяются только при задании соответствующих начальных условий. Таким образом, теория не определяет величину максимальной плотности вещества. В заключение сделаем одно замечание. С точки зрения ОТО объекты больших масс, если при эволюции они не потеряли значительную часть массы, обязательно должны быть “черными дырами”. При сферически-симметричной аккреции вещества на “черную дыру” лишь небольшая часть массы покоя падающего вещества может идти на излучение, поскольку каждая частица вещества падая уносит всю энергию в “черную дыру”. С точки зрения РТГ “черные дыры” в принципе невозможны, а поэтому объекты больших масс, встречающиеся в природе и находящиеся на заключительной стадии эволюции, не являются “черными дырами”. Выделение энергии при аккреции вещества на такие объекты связано с падением вещества на поверхность объекта, т.е. в этом случае действует тот же механизм выделения энергии, что и при аккреции вещества нейтронными звездами. Таким образом для объектов большой массы, находящихся на заключительной стадии эволюции, аккреция вещества обеспечит значительное выделение энергии.

Авторы выражают благодарность С. С. Герштейну за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Власов, А. А. Логунов. ТМФ. 1989. Т. 78. № 3. С. 323–329.
- [2] Ю. М. Лоскутов. ТМФ. 1990. Т. 82. № 2. С. 304–312.
- [3] С. Вайнберг. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. С. 368–371.
- [4] J. R. Oppenheimer, H. Snyder. Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 455.
- [5] А. А. Власов, А. А. Логунов. ТМФ. 1986. Т. 69. № 3. С. 341–347.
- [6] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989; А. А. Логунов. ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 191–206; УФН. 1995. Т. 165. № 2. С. 187–203; А. А. Логунов. Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Дубна: ОИЯИ, 1996.

Поступила в редакцию 5.III.1997 г.

A. A. Logunov, M. A. Mestvirishvili

ON THE POSSIBILITY OF GRAVITATIONAL COLLAPSE IN GENERAL RELATIVITY

By considering an example of a dust matter it is shown that a gravitational attraction does not lead to formation of “black holes” in the Relativistic Theory of Gravitation. It is proved that in the absence of matter the gravitational field is also absent. Therefore the vacuum is not a source of the gravitational field. A mechanism of the energy production in the process of accretion of matter onto large mass objects is discussed.