Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверию, А. Ю. Хренников, Р. Чанчи, Представление гамильтониана квантового поля в p -адическом гильбертовом пространстве, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 3, 355–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:40:34

С. Альбеверьо*, А. Ю. Хренников†, Р. Чианчи‡
**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА
КВАНТОВОГО ПОЛЯ В p -АДИЧЕСКОМ
ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Определены гауссовы меры на p -адических гильбертовых пространствах и построены соответствующие пространства p -адических квадратично интегрируемых функций. В таких пространствах реализованы представления бесконечномерной группы Вейля. Отмечена аналогия с обычным представлением Вейля и выявлено топологическое отличие: параметры p -адической бесконечномерной группы Вейля определены только в некоторых шарах. В p -адическом гильбертовом пространстве построены представления гамильтонианов квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы. Гамильтонианы с сингулярными потенциалами реализованы как ограниченные симметрические операторы в пространствах L_2 относительно p -адических гауссовых мер.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья касается проблемы структуры пространства-времени на расстояниях порядка планковской длины

$$\lambda_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{ см.}$$

Эта проблема широко обсуждалась в литературе (см., например, [1-10] и имеющиеся в этих работах библиографические указания). В частности, в работах [5, 6, 11-15] ставился следующий вопрос: возможно ли описание структуры пространства-времени на указанных расстояниях с помощью вещественных чисел или требуется иное числовое поле? Ключевую роль при решении этого вопроса играет аксиома Архимеда, которой удовлетворяет поле вещественных чисел и не удовлетворяют другие числовые поля. По этой причине другие поля могут оказаться лучше приспособленными для описания микроструктуры пространства-времени. Тем самым обусловлен интерес (по крайней мере, теоретический) к исследованию физических моделей, построенных на неархимедовых

*Mathematical Institute, Bochum University, D-44780, Germany

†Department of Mathematics, University of Växjö, Sweden.

E-mail: Andrei.Khrennikov@rz.ruhr-uni-bochum.de

‡Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Italy

числовых полях [16–20]. Ранее такие поля в физических моделях использовались в работах [21–33].

В данной статье мы исследуем представления квантовых операторов в p -адическом гильбертовом пространстве (при некотором фиксированном простом числе p) [15, 31] (о поле p -адических чисел Q_p см. [18–20] и второй раздел данной статьи). Исследование будем проводить следующим образом. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\partial_{x_j}, x_j)$, $j \in T$, $T \subset \mathbf{N}$, для некоторого оператора квантовой механики или квантовой теории поля. Реализуем это формальное выражение в виде дифференциального оператора с p -адическими переменными x_j в некотором p -адическом гильбертовом пространстве и изучим свойства этого оператора. В [34] мы построили представление однопараметрической группы Вейля в пространстве L_2 относительно гауссова распределения. Это представление существенно отличается от стандартного представления в комплексном гильбертовом пространстве, описанного Вейлем, фон Нейманом и др. (см., например, [35–37]). В частности, операторы координаты $\hat{\mathbf{x}}$ и импульса $\hat{\mathbf{p}}$ ограничены в p -адическом пространстве L_2 .

В данной работе мы рассматриваем системы с бесконечным числом степеней свободы, т.е. p -адические аналоги квантовых полей. Действуя по аналогии с тем, как Фридрихс и Сигал трактовали случай вещественного гильбертова пространства (см., например, [36, 38–40]), мы строим представление группы Вейля относительно гауссовой p -адической меры. Как и для системы с одной степенью свободы [34], параметры этой группы изменяются только в шарах, а не в линейных пространствах, как в стандартном случае. Однако эти шары являются аддитивными группами. Поэтому теория имеет достаточно богатую структуру.

Затем мы исследуем бесконечномерный оператор Лапласа

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mathbf{p}}_j^2, \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathbf{p}}_j = (-i) \left(\frac{d}{dx_j} - \frac{x_j}{2b_j} \right)$$

— операторы импульса в одномерных гауссовых представлениях с произвольными заданными p -адическими числами $b_j \neq 0$. Оператор (1) — ограниченный линейный симметричный оператор в пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$, где ν_B — гауссово распределение на Q_p^∞ с ковариационным оператором $B = \text{diag}(b_j)$ из довольно широкого класса. Например, пусть $B = \text{diag}(b_n)$, $b_n = p^{n-1}$. Тогда Δ_B — линейный ограниченный симметричный оператор в пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Он, однако, не определен в пространстве $L_2(R^\infty, \nu_B)$ квадратично интегрируемых функций относительно гауссовой меры на R^∞ с тем же ковариационным оператором. Этот простой пример показывает, что p -адическое представление может играть роль регуляризации.

Следующий шаг состоит в исследовании гамильтониана свободного поля

$$\hat{\mathbf{H}}_0 = (1/2) [-(\partial_x, \partial_x) + (B^{-1}x, \partial_x)], \quad (2)$$

где $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \dots)$ и $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение, т.е. $(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$. Этот гамильтониан – линейный ограниченный симметричный оператор в $L_2(Q_p^{\infty}, \nu_B)$ при вышеуказанных ограничениях на B (ср. со стандартным случаем [36, 37, 39–45]).

Наконец, мы исследуем гамильтонианы $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}$ с потенциалами $\hat{\mathbf{V}}$ из широкого класса, включающего неограниченные с точки зрения вещественного анализа, но ограниченные в p -адических пространствах потенциалы. Например, мы можем положить

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n x_n^4 \quad (3)$$

или

$$V(x) = \sum_{j_1 \dots j_n=1}^{\infty} c_{j_1 \dots j_n} x_{j_1} \dots x_{j_n} \quad (4)$$

с убывающими p -адическими коэффициентами $c_{j_1 \dots j_n}$ (ср. со стандартным случаем [36, 37, 39–45]).

2. ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ p -АДИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ

Поле вещественных чисел R строится как пополнение поля рациональных чисел Q в метрике $\rho(x, y) = |x - y|$. Поля p -адических чисел Q_p строятся аналогично, но с использованием иных метрик. Для любого простого числа p определим модуль $|\cdot|_p$ следующим образом.

Любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде произведения простых чисел так, что $n = 2^{r_2} 3^{r_3} \dots p^{r_p} \dots$, где $r_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Положим $|n|_p = p^{-r_p}$, $|0|_p = 0$ и $|-n|_p = |n|_p$. Для любого $m \neq 0$ положим $|n/m|_p = |n|_p/|m|_p$. Пополнение Q относительно метрики $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ – это локально компактное поле Q_p . Как известно, $|\cdot|$ и $|\cdot|_p$ – единственные модули на Q [18–20].

Модуль $|\cdot|_p$ удовлетворяет сильному неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. Положим $\mathcal{U}_r(a) = \{x \in Q_p : |x - a|_p \leq r\}$, где $a \in Q_p$, $r = p^n$, $n \in \mathbf{Z}$ и $\mathcal{U}_r \equiv \mathcal{U}_r(0)$. По определению $\mathcal{U}_r(a)$ – это шар радиуса r с центром a . Шары являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Для любого $x \in Q_p$ существует единственное каноническое разложение

$$x = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k, \quad (5)$$

где $a_j = 0, 1, \dots, p - 1$. Ряд (5) сходится в норме $|\cdot|_p$.

Следующее свойство p -адических рядов будет использоваться ниже: ряд $\sum w_n$, $w_n \in Q_p$, сходится тогда и только тогда, когда $|w_n|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для любого натурального числа n имеем $|n|_p \leq 1$. Поэтому последовательность $|n!|_p$ убывает. Более того, справедливы неравенства [18–20]:

$$p^{(n-1)/(1-p)} \leq |n!|_p \leq n p p^{n/(1-p)}. \quad (6)$$

Пусть E — линейное пространство над Q_p . Скалярным произведением в E называется симметричная билинейная форма $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow Q_p$, которая невырождена в том смысле, что для всякого ненулевого $x \in E$ существует элемент $y \in E$ такой, что $(x, y) \neq 0$. Это определение аналогично тому, которое используется в теории вещественных гильбертовых пространств с индефинитной метрикой. Ниже мы увидим, что эта аналогия возникает и в других контекстах.

Пусть $p \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в Q_p . Мы можем рассмотреть квадратичные расширения $Q_p(i)$ поля Q_p с $i = \sqrt{-1}$. По аналогии с комплексными числами положим $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, где $x, y \in Q_p$. Модуль элемента $Q_p(i)$ обозначается символом $|\cdot|_p$ и определяется формулой $|z|_p = \sqrt{|z|^2|_p}$, где $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$. Заметим, что $|z|^2$ принимает значения в Q_p , тогда как $|z|_p$ — вещественное число. Если E — линейное пространство над $Q_p(i)$, то скалярное произведение в E определяется как эрмитова невырожденная билинейная форма $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow Q_p(i)$.

Определение p -адических гильбертовых пространств [15, 31] основано на координатном представлении, аналогичном l_2 . Для последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in Q_p^\infty$, $\lambda_n \neq 0$, положим

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f = (f_n) \in Q_p^\infty : \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n \text{ сходится в } Q_p \right\},$$

тогда

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f = (f_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p} = 0 \right\}.$$

Норма в $\mathcal{H}_\lambda$ определяется равенством $\|f\|_\lambda = \max_n |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p}$. Пространство $\mathcal{H}_\lambda$ — это неархимедово банахово пространство над полем Q_p в смысле [8]. На $\mathcal{H}_\lambda$ задано скалярное произведение $(f, g)_\lambda = \sum f_n g_n \lambda_n$ и длина $\|f\|_\lambda^2 \equiv \sum f_n^2 \lambda_n$. Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\lambda: \mathcal{H}_\lambda \times \mathcal{H}_\lambda \rightarrow Q_p$ удовлетворяет неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$|(f, g)_\lambda|_p \leq \|f\|_\lambda \|g\|_\lambda. \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тройка $(\mathcal{H}_\lambda, (\cdot, \cdot)_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ называется координатным гильбертовым пространством.

Существует значительное отличие $\mathcal{H}_\lambda$ от вещественного или комплексного гильбертова пространства. Топология в $\mathcal{H}_\lambda$ не определяется скалярным произведением. В сущности, на $\mathcal{H}_\lambda$ заданы две структуры: скалярное произведение и норма. Они связаны неравенством (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Невозможно указать p -адический аналог положительной определенности билинейной формы. Например, каждый элемент $\gamma \in Q_p$ можно представить в виде $\gamma = (x, x)_\lambda$ при некотором $x \in \mathcal{H}_\lambda$. Это простое следствие свойств билинейных форм на Q_p [18]. В частности, $\|f\|_\lambda^2 \neq |(f, f)_\lambda|_p$.

Тройки $(E_j, (\cdot, \cdot)_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$, где E_j — неархимедовы банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_j$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_j$, удовлетворяющими (7), называются изоморфными, если пространства E_1 и E_2 алгебраически изоморфны и алгебраический изоморфизм $\mathcal{I}: E_1 \rightarrow E_2$ изометричен и унитарен, т.е. $\|\mathcal{I}x\|_2 = \|x\|_1$, $(\mathcal{I}x, \mathcal{I}y)_2 = (x, y)_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Тройка $(E, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ называется p -адическим гильбертовым пространством, если она изоморфна некоторому координатному пространству $(\mathcal{H}_\lambda, (\cdot, \cdot)_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$.

Отношение изоморфизма разделяет семейство всех p -адических гильбертовых пространств на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности характеризуется определенным координатным представлением $\mathcal{H}_\lambda$. Задача классификации всех сепарабельных p -адических гильбертовых пространств пока не решена.

Гильбертовы пространства над квадратичными расширениями $Q_p(i)$ определяются следующим образом.

При заданной последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in Q_p^\infty$, $\lambda_n \neq 0$, мы полагаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda &= \{f = (f_n) \in Q_p(i)^\infty : \text{ряд } \sum |f_n|^2 \lambda_n \text{ сходится в } Q_p\} = \\ &= \left\{f = (f_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p} = 0\right\}, \\ \|f\|_\lambda &= \max_n |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p}, \\ (f, g)_\lambda &= \sum f_n \bar{g}_n \lambda_n, \quad \|f\|_\lambda^2 = (f, f)_\lambda = \sum |f_n|_p^2 \lambda_n \in Q_p. \end{aligned}$$

Тройка $(\mathcal{H}_\lambda, (\cdot, \cdot)_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ называется p -адическим комплексным координатным пространством. Общее p -адическое комплексное гильбертово пространство $(E, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ — это по определению тройка, изоморфная некоторому p -адическому комплексному координатному гильбертову пространству.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ пространство ограниченных операторов $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ в некотором p -адическом гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Наделенное нормой $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$ пространство $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ становится неархимедовым банаховым пространством, в котором справедливы соотношения $\|A + B\| \leq \max[\|A\|, \|B\|]$ и $\|A + B\| = \max[\|A\|, \|B\|]$ при $\|A\| \neq \|B\|$. Обозначим символом $IS(\mathcal{H})$ группу линейных изометрий пространства $\mathcal{H}$, т.е. множество линейных операторов $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, для которых $\|Ax\|_\lambda = \|x\|_\lambda$ и $A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Оператор $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется унитарным, если $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$ и $U(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Обозначим группу унитарных операторов символом $UN(\mathcal{H})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пока неизвестно, является ли каждый унитарный оператор в p -адическом гильбертовом пространстве изометричным. Поэтому введем обозначение $UI(\mathcal{H}) = IS(\mathcal{H}) \cap UN(\mathcal{H})$. Ограниченный оператор A в p -адическом гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется симметричным, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. p -Адическое гильбертово пространство $\mathcal{H}$ не изоморфно его сопряженному, т.е. $\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}$. Поэтому если A действует в $\mathcal{H}$, то оператор A^* , сопряженный к A , действует в $\mathcal{H}'$, и неясно, что называть самосопряженным оператором. С другой стороны, ниже показано, что некоторые основные операторы p -адической квантовой механики ограничены и симметричны в указанном выше смысле. Поэтому ограниченные симметричные операторы на p -адическом гильбертовом пространстве являются p -адическими

аналогами самосопряженных операторов в вещественных или комплексных гильбертовых пространствах. Если x – собственный вектор ограниченного симметричного оператора A , заданного в p -адическом гильбертовом пространстве над $Q_p(i)$ (т.е. $Ax = \lambda x$ и $(x, x) \neq 0$), то $\lambda \in Q_p$. Эта ситуация аналогична случаю комплексного гильбертова пространства с индефинитной метрикой. Спектральная теория симметричных операторов в p -адических гильбертовых пространствах еще не развита. Однако подобная теория существует для в некотором смысле аналогичного случая гильбертовых пространств с индефинитной метрикой.

Положим $Q_p^\infty = Q_p \times \cdots \times Q_p \times \cdots$. На Q_p^∞ можно определить топологию прямого произведения, но она не будет использоваться в данной работе. Для наших целей наиболее пригодны “шары” $\mathcal{U}_r^\infty(a) = \{x \in Q_p^\infty : |x_j - a_j|_p \leq r_j\}$, $r_j = p^k$, $k \in \mathbf{Z}$. Положим $\mathcal{U}_r^\infty \equiv \mathcal{U}_r^\infty(0)$. Конечно, множества $\mathcal{U}_r^\infty(a)$ – это не шары относительно метрики ρ , соответствующей топологии τ , а лишь ограниченные множества относительно ρ . Заметим, что каждый “шар” $\mathcal{U}_r^\infty$ – это аддитивная подгруппа Q_p^∞ .

Для любых последовательностей $\alpha = \{\alpha_j\}$, $\alpha_j \in Q_p$, и $A = \{A_j\}$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, положим $(\alpha, A) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j A_j$.

Отображение $F: \mathcal{U}_r^\infty \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ со свойствами $F(\alpha + \beta) = F(\alpha)F(\beta)$, $F(0) = I$, $\alpha, \beta \in \mathcal{U}_r^\infty$, где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$, называется однопараметрической группой операторов. Если в этом определении заменить $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ одним из пространств $IS(\mathcal{H})$, $UN(\mathcal{H})$, $UI(\mathcal{H})$, то получится определение однопараметрической группы изометричных, унитарных или изометричных и унитарных операторов, соответственно. Если отображение $F: \mathcal{U}_r^\infty \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ аналитично, то однопараметрическая группа называется аналитической.

Пусть a принадлежит R_+ . Положим $[a]_p^+ = \inf\{\lambda = p^k, k \in \mathbf{Z} : a \leq \lambda\}$, $[a]_p^- = \sup\{\lambda = p^k, k \in \mathbf{Z} : \lambda \leq a\}$. Разумеется, если $a \in \{p^k : k \in \mathbf{Z}\}$, то $a = [a]_p^- = [a]_p^+$. Следующее утверждение вытекает из неравенств (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $A = \{A_j\}$ – последовательность операторов из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отображение $\alpha \rightarrow e^{(\alpha, A)}$, где $\alpha \in \mathcal{U}_r^\infty$, $r = \{r_j\}$, $r_j = p^j / [\|A_j\|]_p^+$, – это аналитическая группа изометричных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B = (\alpha, A)$. Это ограниченный оператор в $\mathcal{H}$, для которого $\|B\| \leq \max_j r_j \|A_j\| \leq 1/p$. Имеем $e^{\alpha A} = I + \sum_{m=1}^\infty B^m/m! = I + \sum_{m=1}^\infty B_m$ и $\|B_m\| < 1$ для любых $m \in \mathbf{N}$, поскольку $p \neq 2$ и, следовательно, $(p^{1/(1-p)}/p) < 1$ (здесь использовано (6)). Итак, $\|e^B x\| = \max(\|x\|, \|B_m x\|) = \|x\|$ (здесь использовано то, что $\|B_m x\| < \|x\|$). Очевидно, что e^B имеет обратный оператор e^{-B} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $A = \{A_j\}$ – последовательность симметричных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Отображение $\alpha \rightarrow e^{i(\alpha, A)}$, где $\alpha \in \mathcal{U}_r^\infty$, $r = \{r_j\}$, $r_j = p^j / [\|A_j\|]_p^+$, – это аналитическая группа изометричных унитарных операторов в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство изометрии доказывается, как и выше. Чтобы доказать унитарность, достаточно выполнить алгебраические преобразования, которые зависят не от числового поля, а только от того, что $i^2 = -1$.

3. ПРОСТРАНСТВО КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГАУССОВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работах [15] и [31] было дано общее определение p -адических гауссовых интегралов. Оно основано на теории распределений. Распределение называется гауссовым, если его преобразование Лапласа имеет вид $\exp\{b(x, x)/2\}$, где $b(x, x)$ – квадратичная функция. В данной статье можно использовать более простой подход, основанный на моментах гауссова распределения.

Пусть b – некоторое отличное от нуля p -адическое число. p -Адическое гауссово распределение ν_b определяется как Q_p -линейный непрерывный функционал на пространстве аналитических функций, для которого

$$M_{2n} = \int_{Q_p} x^{2n} \nu_b(dx) = (2n)! b^n / n! 2^n, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

где $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$, и

$$M_{2n+1} = \int_{Q_p} x^{2n+1} \nu_b(dx) = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

В [15] показано, что эти условия определяют ν_b единственным образом. Интегралы по ν_b можно продолжить на класс $\mathcal{A}$ целых функций $Q_p \rightarrow Q_p$. Рассмотрим целую функцию $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in Q_p$. Тогда по определению

$$\int_{Q_p} g(x) \nu_b(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n.$$

Легко проверить, что ряд в правой части этого равенства сходится в Q_p .

Аналогами многочленов Эрмита являются многочлены

$$H_{n,b}(x) = (-1)^n e^{x^2/2b} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2b}, \quad x \in Q_p. \quad (8)$$

В пространстве $Q_p(i)$ -линейных комбинаций этих многочленов определим скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{Q_p} f(x) \bar{g}(x) \nu_b(dx). \quad (9)$$

Тогда $H_{n,b}$ ортогонален $H_{n',b}$ при $n \neq n'$ и

$$\int_{Q_p} H_{n,b}^2(x) \nu_b(dx) = n! / b^n.$$

Подобно тому как в [15] исследовался случай $b = 1/2$, можно доказать, что многочлены $\{H_{n,b}(x)\}$ образуют базис в пространстве $\mathcal{A}$, и определить $L_2(Q_p, \nu_b)$ как пополнение $\mathcal{A}$ по норме, определяемой вышеупомянутым скалярным произведением. Несколько иначе пространство $L_2(Q_p, \nu_b)$ можно определить как

$$\left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x), f_n \in Q_p(i) : \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 n! / b^n \text{ сходится в } Q_p \right\}.$$

$L_2(Q_p, \nu_b)$ — p -адическое гильбертово пространство, изоморфное $\mathcal{H}_\lambda$ при $\lambda = \{n! / b^n\}$. Легко указать такие пары значений b , при которых пространства $L_2(Q_p, \nu_b)$ не изоморфны, однако задача классификации p -адических пространств L_2 остается пока нерешенной.

Гауссово распределение на Q_p^∞ определяется как произведение распределений $\nu_{b_j}(dx_j)$ на Q_p . Для этого требуется точное определение произведения

$$\nu_B(dx) = \prod_{j=1}^{\infty} \nu_{b_j}(dx_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \quad b_j \in Q_p, \quad (10)$$

где $B = \text{diag}(b_j)$ — диагональная матрица ковариации.

Пусть Λ — совокупность мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, у которых все α_j , кроме конечного их числа, равны нулю. Положим $|\alpha| = \sum \alpha_j$ и $i(\alpha) = \max\{m : \alpha_m \neq 0\}$ для $\alpha \in \Lambda$. Ряд $\sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha$ ($\alpha \in Q_p$) понимается как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n; 1 \leq i(\alpha) < \infty} a_\alpha. \quad (11)$$

Этот ряд называется сильно сходящимся, если выполнены следующие два условия:

- 1) $\lim_{i(\alpha) \rightarrow \infty} |a_\alpha|_p = 0$ при $|\alpha| = k$ и фиксированном $k \in \mathbf{N}_0$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i(\alpha) < \infty; |\alpha|=k} |a_\alpha|_p = 0$.

Все рассматриваемые далее ряды сходятся в сильном смысле.

Обозначим через $\mathcal{P}_c(Q_p^\infty, Q_p)$ пространство цилиндрических многочленов $q: Q_p^\infty \rightarrow Q_p$,

$$q(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \sum_{i(\alpha) \leq M} q_\alpha x^\alpha, \quad q_\alpha \in Q_p, \quad x \in Q_p^\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Линейный функционал $A: \mathcal{P}_c(Q_p^\infty, Q_p) \rightarrow Q_p$ называется распределением на Q_p^∞ .

Пусть $\nu_{b_j}(dt)$ ($b_j, t \in Q_p$) — последовательность гауссовых распределений на Q_p . Определим цилиндрическое гауссово распределение на Q_p^∞ формулой

$$\int_{Q_p^\infty} q(x) \nu_B(dx) = \sum_{\alpha \in \Lambda} q_\alpha \int_{Q_p} x_1^{\alpha_1} \nu_{b_1}(dx_1) \cdots \int_{Q_p} x_n^{\alpha_n} \nu_{b_n}(dx_n) \cdots \quad (12)$$

Это реализация (10) на пространстве $\mathcal{P}_c(Q_p^\infty, Q_p)$. Равенство (12) используется, чтобы продолжить гауссов интеграл на класс целых функций $f: Q_p^\infty \rightarrow Q_p$, $f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha x^\alpha$.

По аналогии с вещественным случаем введем многочлены Эрмита на Q_p^∞ следующим образом:

$$H_{\alpha, B}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{\alpha_j, b_j}(x_j), \quad \alpha \in \Lambda, \quad x \in Q_p^\infty.$$

Теперь мы повторяем предыдущие рассуждения, относившиеся к одномерному случаю, и выводим пространство $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ функций $f: Q_p^\infty \rightarrow Q_p$, которые квадратично интегрируемы относительно гауссовой меры ν_B , тогда

$$\left\{ f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha H_{\alpha, B}(x), f_\alpha \in Q_p(i) : \text{ряд } \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha|^2 \alpha! / B^\alpha \text{ сильно сходится в } Q_p \right\},$$

где $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots$, $B^\alpha = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots$. Скалярное произведение в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ определяется формулой

$$(f, g) = \int_{Q_p^\infty} f(x) \bar{g}(x) \nu_B(dx).$$

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ГРУППЫ ТРАНСЛЯЦИЙ

Положим $T_\beta(f)(x) = f(x + \beta)$, $\beta \in Q_p^\infty$. Мы покажем, что для достаточно малых $\beta \in \mathcal{U}_{s(b)}$ эти операторы изометричны в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Используя этот результат, мы построим некоторое представление группы трансляций в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

Положим $s_j(b_j) = [\sqrt{|b_j|_p}]_p^- p^j$, $s(B) = (s_j(b_j))$ и обозначим через C_n^k биномиальные коэффициенты.

ТЕОРЕМА 4.1. *При любом $\beta \in \mathcal{U}_{s(b)}$ оператор T_β принадлежит $IS(L_2(Q_p^\infty, \nu_B))$ и отображение $T: \beta \in \mathcal{U}_{s(B)} \rightarrow T_\beta \in IS(L_2(Q_p^\infty, \nu_B))$ аналитично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$T_\beta(f)(x) = \left[I + \sum_{m \in \Lambda} \beta^m K_m \right] (f)(x), \quad (13)$$

где операторы K_m ($m \in \Lambda$) определяются равенствами

$$K_m(f) = \frac{1}{b^m} \sum_{l \in \Lambda} C_{m+l}^m f_{m+l} H_{l, b}.$$

Покажем, что K_m отображает $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ в себя. Пусть $f \in L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ и $|l| = k$ фиксированы, тогда

$$\lim_{i(l) \rightarrow \infty} |C_{m+l}^m|_p^2 |f_{m+l}|_p^2 |l!|_p / |b^l|_p = \frac{|B|_p^m}{|m!|_p^2} \lim_{i(l) \rightarrow \infty} \left| \frac{(m+l)!}{l!} \right|_p |f_{m+l}|_p^2 \left| \frac{(m+l)!}{B^{m+l}} \right|_p.$$

Остается только заметить, что $i(m+l) \rightarrow \infty$ при $i(l) \rightarrow \infty$. Те же доводы применимы к $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i(l) < \infty; |l|=k} |C_{m+l}^m|_p^2 |f_{m+l}|_p^2 |l!|/B^l|_p$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|K_m\| \leq 1/\sqrt{|m! B^m|_p}.$$

Докажем теперь, что ряд (13) сильно сходится на $\mathcal{U}_{s(b)}^\infty$. Если $\beta \in \mathcal{U}_{s(b)}^\infty$, то имеем:

- 1) $\lim_{i(m) \rightarrow \infty} |s(B)|_p^m / \sqrt{|B^m m!|_p} = 0$, если $|m| = k$ фиксировано;
- 2) $\max_{|m|=k} |s(B)|_p^m / \sqrt{|B^m m!|_p} \leq (p^{1/2(p-1)}/p)^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

5. p -АДИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГАЛА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ГРУППЫ ВЕЙЛЯ

Определим операторы “координаты” $\hat{\mathbf{x}}_j$ и “импульса” $\hat{\mathbf{p}}_j$ в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ равенствами

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_j f(x) &= x_j f(x), \\ \hat{\mathbf{p}}_j f(x) &= (-i) \left(\frac{d}{dx_j} - (x_j/2b_j) \right) f(x),\end{aligned}$$

где f принадлежит Q_p -линейному пространству $\mathcal{D}$ линейных комбинаций многочленов Эрмита.

Операторы координаты и импульса удовлетворяют на $\mathcal{D}$ каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = iI. \quad (14)$$

Покажем, что эти соотношения можно продолжить на $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Операторы $\{\hat{\mathbf{x}}_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\hat{\mathbf{p}}_j\}_{j=1}^\infty$ ограничены в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ и*

$$\|\hat{\mathbf{x}}_j\| = \sqrt{|b_j|_p}, \quad \|\hat{\mathbf{p}}_j\| = 1/\sqrt{|b_j|_p}. \quad (15)$$

Более того, $\hat{\mathbf{x}}_j$ и $\hat{\mathbf{p}}_j$ симметричны и удовлетворяют условию (14) на $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично тому, которое приведено в [34] для одномерного случая, и поэтому опускается.

Вычислим $[\hat{\mathbf{x}}_j]_p^+$ и $[\hat{\mathbf{p}}_j]_p^+$ ($j \in \mathbf{N}$). Если $|b_j|_p = p^{2k+1}$, то $\|\hat{\mathbf{x}}_j\| = p^{k+1/2}$, $[\hat{\mathbf{x}}_j]_p^+ = p^{k+1}$, $\|\hat{\mathbf{p}}_j\| = p^{-k-1/2}$ и $[\hat{\mathbf{p}}_j]_p^+ = p^{-k}$. Если $|b_j|_p = p^{2k}$, то $[\hat{\mathbf{x}}_j]_p^+ = \|\hat{\mathbf{x}}_j\| = p^k$ и $[\hat{\mathbf{p}}_j]_p^+ = \|\hat{\mathbf{p}}_j\| = p^k$.

Положим $R(B) = (R_j(b_j))$, $R_j(b_j) = p^j/[\hat{\mathbf{x}}_j]_p^+$ и $r(B) = (r_j(b_j))$, $r_j(b_j) = p^j/[\hat{\mathbf{p}}_j]_p^+$. Пользуясь предложениями 2.1, 2.2 и теоремой 5.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. *Отображения $\alpha \in \mathcal{U}_{R(b)}^\infty \rightarrow U(\alpha) = e^{i(\alpha, \hat{\mathbf{x}})}$ и $\beta \in \mathcal{U}_{r(b)}^\infty \rightarrow V(\beta) = e^{i(\beta, \hat{\mathbf{p}})}$ образуют аналитические однопараметрические группы унитарных изометричных операторов в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям в форме Вейля на пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$:*

$$U(\alpha)V(\beta) = e^{-i(\alpha, \beta)}V(\beta)U(\alpha). \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничения на области изменения параметров α и β происходят от множителя $e^{-i(\alpha, \beta)}$.

6. p -АДИЧЕСКИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Рассмотрим оператор Лапласа (1) в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Оператор Δ_B ограничен тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|_p = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим Δ_B в равномерной операторной топологии на $\mathcal{L}(L_2(Q_p^\infty, \nu_B))$ конечномерных операторов Лапласа $\Delta_{B,N} = \sum_{j=1}^N \widehat{\mathbf{p}}_j^2$. Этот предел существует, т.к.

$$\|\Delta_{B,N} - \Delta_{B,M}\| \leq \max_{M+1 \leq k \leq N} \|\widehat{\mathbf{p}}_k\|^2 = \max_{M \leq k \leq N} (1/|b_k|_p) \rightarrow 0, \quad M \leq N, \quad N, M \rightarrow \infty.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{x_j}{b_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{x_j^2}{4b_j^2} + \frac{1}{2b_j} \right) = \\ &= -(\partial_x, \partial_x) + (B^{-1}x, \partial_x) - \frac{1}{4}(B^{-1}x, B^{-1}x) + \frac{1}{2} \text{Tr } B^{-1}, \end{aligned}$$

имеем $\Delta_B 1 = -(1/4)(B^{-1}x, B^{-1}x) + (1/2) \text{Tr } B^{-1}$. Однако функция 1 не принадлежит $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$, если $\lim_{j \rightarrow \infty} |b_j|_p \neq \infty$.

Справедлива оценка $\|\Delta_B\| \leq \max_{1 \leq j < \infty} |b_j|_p^{-1}$. Легко проверить, что норма в действительности равна указанной границе. В самом деле, поскольку $\max_{1 \leq j < \infty} |b_j|_p^{-1} = |b_m|_p^{-1}$, достаточно рассмотреть только одномерный случай, тогда $\widehat{\mathbf{p}}^2 H_{k,b}(x) = k(k-1)b^{-2} H_{k-2,b}(x)$ и $\|\widehat{\mathbf{p}}^2 H_{k,b}\| = |k(k-1)|_p / |b|_p^2 \|H_{k-2,b}\|$. Если k и $k-1$ не делятся на p (это возможно, т.к. $p \neq 2$), то $\|\widehat{\mathbf{p}}^2 H_{k,b}\| / \|H_{k,b}\| = |b|_p^{-1}$ и, следовательно, $\|\widehat{\mathbf{p}}^2\| = |b|_p^{-1}$. Таким образом, $\|\Delta_B\| = \max_{1 \leq j < \infty} |b_j|_p^{-1}$.

ПРИМЕР 6.1. Пусть $b_n = 1/p^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\text{Tr } B^{-1} = (p-1)^{-1}$ и

$$\Delta_B = -\frac{1}{2}(\partial_x, \partial_x) + \frac{1}{2}(B^{-1}x, \partial_x) - \frac{1}{8}(B^{-1}x, B^{-1}x) + \frac{1}{4}(p-1)^{-1}.$$

7. p -АДИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ ДЛЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Рассмотрим свободный гамильтониан (2) в пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Если последовательность $\{|b_n|_p\}$ ограничена снизу, т.е.*

$$|b_n|_p \geq \delta \tag{17}$$

для некоторого $\delta > 0$, то свободный гамильтониан $\widehat{\mathbf{H}}_0$ ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\hat{\mathbf{H}}_{0,N} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{x_j}{b_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Докажем, что предел $g = \hat{\mathbf{H}}_0 f = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{H}}_{0,N} f$ существует для любого $f \in L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Имеем $f(x) = u_L + w_L$, где

$$u_L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{1 \leq i(\alpha) \leq L; |\alpha|=k} f_\alpha H_{\alpha,B}(x),$$

$$w_L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{L+1 \leq i(\alpha) < \infty; |\alpha|=k} f_\alpha H_{\alpha,B}(x).$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|\alpha|=k} |f_\alpha|_p^2 |\alpha|! / B^\alpha|_p = 0$ для любого $\epsilon > 0$, существует такое натуральное число m , что

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{L+1 \leq i(\alpha) < \infty; |\alpha|=k} f_\alpha H_{\alpha,B}(x) \right\|^2 \leq \max_{m+1 \leq k < \infty, |\alpha|=k} |f_\alpha|_p^2 \left| \frac{\alpha!}{b^\alpha} \right|_p < \epsilon.$$

Заметим, что эти неравенства равномерны по L . Кроме того, $\lim_{i(\alpha) \rightarrow \infty; |\alpha|=k} |f_\alpha|_p^2 \times |\alpha|! / B^\alpha|_p = 0$ для любого $k = 0, 1, \dots, m$. Поэтому существует натуральное число $N = N_\epsilon$ такое, что

$$\left\| \sum_{k=0}^m \sum_{N+1 \leq i(\alpha) < \infty, |\alpha|=k} f_\alpha H_{\alpha,B}(x) \right\|^2 \leq \max_{m+1 \leq k < \infty} |f_\alpha|_p^2 \left| \frac{\alpha!}{B^\alpha} \right|_p < \epsilon.$$

Таким образом, $\|w_N\| < \epsilon$.

Используя теорему 6.1, получаем

$$\|\hat{\mathbf{H}}_{0,N}\| \leq \max_{1 \leq j \leq N} [\|\partial_{x_j}^2\|, \|\hat{\mathbf{x}}_j\| \|\partial_{x_j}\| |b_j|_p^{-1}] = \max_{1 \leq j \leq N} |b_j|_p^{-1}$$

и $\|(\hat{\mathbf{H}}_{0,M_2} - \hat{\mathbf{H}}_{0,M_1})f\| \leq \|f\| \max_{M_1+1 \leq j \leq M_2} 1/|b_j|_p$. Следовательно, $\|(\hat{\mathbf{H}}_{0,M_2} - \hat{\mathbf{H}}_{0,M_1})w_N\| \leq \epsilon/\delta$ для N , соответствующего ϵ . Однако если $M_1, M_2 > N$, то $(\hat{\mathbf{H}}_{0,M_2} - \hat{\mathbf{H}}_{0,M_1})u_N = 0$ и $\|(\hat{\mathbf{H}}_{0,M_2} - \hat{\mathbf{H}}_{0,M_1})f\| \leq \epsilon$. Итак, существует некоторый линейный ограниченный оператор $\hat{\mathbf{H}}_0$, определенный как сильный предел конечномерных гамильтонианов $\hat{\mathbf{H}}_{0,N}$. Для нормы этого оператора справедлива оценка $\|\hat{\mathbf{H}}_0\| \leq \max_{1 \leq j < \infty} 1/|b_j|_p$. Более того, подобно тому как выше была получена оценка для нормы Δ_B , нетрудно проверить, что $\|\hat{\mathbf{H}}_0\| = \max_{1 \leq j < \infty} 1/|b_j|_p$.

Итак, свободный гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}_0$ существует при более слабых ограничениях на b_j , чем оператор Лапласа Δ_B . В частности, $\hat{\mathbf{H}}_0$ можно определить в пространстве L_2 , соответствующем $B = I$. В нем оператор Δ_I не определен.

В то время как Δ_B – предел конечномерных дифференциальных операторов в равномерной операторной топологии, оператор $\hat{\mathbf{H}}_0$ – предел конечномерных дифференциальных операторов в сильной операторной топологии.

Рассмотрим теперь гамильтонианы с потенциалами $V(x)$, $x \in Q_p^\infty$, т.е.

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}, \quad (18)$$

где $\hat{\mathbf{V}} = V(\hat{\mathbf{x}})$. Предположим, что условие (17) выполняется. Тогда $\hat{\mathbf{H}}_0$ – ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Следовательно, достаточно изучить оператор $\hat{\mathbf{V}}$.

Рассмотрим пример $V(x) = \sum_{j=1}^\infty c_j x_j^2$. Используя теорему 5.1, получаем, что если $|c_j|_p |b_j|_p \rightarrow 0$, то $\hat{\mathbf{V}}$ – ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ и $\|\hat{\mathbf{V}}\| \leq \max_{1 \leq j < \infty} |c_j|_p |b_j|_p$. В частности, если $B = I$, то $\hat{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^\infty p^j \hat{\mathbf{x}}_j^2$ – ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_I)$. Более общий случай характеризует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть потенциал $V(x)$, $x \in Q_p^\infty$, аналитичен в “шаре” $\mathcal{U}_r^\infty$, где

$$r_j = \left[\sqrt{|b_j|_p} \right]_p^+, \quad j \in \mathbf{N}. \quad (19)$$

Тогда $\hat{\mathbf{V}}$ – ограниченный оператор в пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha x^\alpha$ и $\|V\|_r = \max_{\alpha \in \Lambda} |V_\alpha|_p r^\alpha$, то $\|\hat{\mathbf{V}}\| \leq \|V\|_r$.

Если выполняются условия (17) и (19), то гамильтониан взаимодействия $\hat{\mathbf{H}}$ – линейный ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$. Например, пусть $B = I$. Тогда оператор

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{j_1 \dots j_n=1}^\infty p^{j_1 + \dots + j_n} x_{j_1} \dots x_{j_n}$$

можно определить в $L_2(Q_p^\infty, \nu_I)$. В данном случае $\|\hat{\mathbf{H}}\| = \|\hat{\mathbf{H}}_0\| = 1$, поскольку возмущение мало в p -адическом смысле: $\|\hat{\mathbf{V}}\| < 1$.

8. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Исследуем динамику, порожденную гамильтонианом (18). Для этого рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}} \psi, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad (20)$$

здесь $t \in Q_p$. Эта задача Коши представляет в операторной форме задачу Коши для бесконечномерного дифференциального оператора в частных производных

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{x_j}{b_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + V(x) \right] \psi(t, x),$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Используя свойства однопараметрических групп унитарных и изометричных операторов в p -адических гильбертовых пространствах [34] и теоремы 7.1 и 7.2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть потенциал $V(x)$, $x \in Q_p^\infty$, аналитичен в $\mathcal{U}_r^\infty$, как в теореме 7.2. Тогда отображение $t \rightarrow U(t) = \exp\{-it\hat{\mathbf{H}}\}$, $t \in \mathcal{U}_\lambda^\infty$, $\lambda = (p[\|\hat{\mathbf{H}}\|_p^+]^{-1})$, есть однопараметрическая группа унитарных изометричных операторов в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$.

Функция $\psi(t) = U(t)\psi_0$ – решение задачи Коши (20). Это решение единственно в классе функций, аналитичных по t . В настоящее время нам неизвестно что-либо о единственности решения задачи (20) в классе гладких функций t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть потенциал $V(x)$, $x \in Q_p^\infty$, аналитичен в $\mathcal{U}_r^\infty$, как в теореме 7.2, и $\|V\|_r < \alpha = \max(1/|b_j|_p)$, где b_j удовлетворяет (17). Тогда в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ справедливы неравенства

$$\sup_{t \in \mathcal{U}_{\alpha/p}^\infty} \|\exp\{-it\hat{\mathbf{H}}_0\} - \exp\{-it\hat{\mathbf{H}}\}\| \leq \frac{\|\hat{\mathbf{V}}\|}{\|\hat{\mathbf{H}}_0\|}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sigma(t) \equiv \|\exp\{-it\hat{\mathbf{H}}_0\} - \exp\{-it\hat{\mathbf{H}}\}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} A_{j_1} \dots A_{j_n} \right\|,$$

где $A_j = \hat{\mathbf{H}}_0$ или $\hat{\mathbf{V}}$, кроме того,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\leq \max_{n=1,2,\dots} \left(\frac{p^{1/(p-1)}}{p\alpha} \right)^n \max_{j_1, \dots, j_n} \|A_{j_1} \dots A_{j_n}\| = \\ &= \max_{n=1,2,\dots} \left(\frac{p^{1/(p-1)}}{p} \right)^n \max_{k=1,\dots,n} \frac{\|\hat{\mathbf{V}}\|^k \|\hat{\mathbf{H}}_0\|^{n-k}}{\alpha^n} \leq \frac{\|\hat{\mathbf{V}}\|}{\|\hat{\mathbf{H}}_0\|}. \end{aligned}$$

Итак, влияние относительно малых возмущений свободного гамильтониана на квантовую динамику тоже относительно мало. Квантовые траектории возмущенного движения проходят недалеко от траекторий свободного движения. Заметим, что малые p -адические возмущения представляются очень большими со стандартной точки зрения. Например, если $B = I$ и, следовательно, $\|\hat{\mathbf{H}}_0\| = 1$, то возмущение $\hat{\mathbf{V}} = p^n I$ очень мало при больших n и его влияние на динамику несущественно с p -адической точки зрения.

В p -адическом анализе не существует принципиального различия в методах трактовки проблем в пространстве Минковского и в евклидовом пространстве, поскольку $\hat{\mathbf{H}}$ –

ограниченный оператор. Все предыдущие результаты справедливы и в отношении соответствующей евклидовой динамики. Уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = -\hat{\mathbf{H}}\phi(t, x)$$

определяет однопараметрическую группу изометричных, но не унитарных операторов $t \rightarrow V(t) \in \mathcal{U}_\lambda = \exp\{t\hat{\mathbf{H}}\}$. Более того, евклидова версия неравенства (21) справедлива при условиях предложения 8.1 и имеет вид

$$\sup_{t \in \mathcal{U}_{\alpha/p}^\infty} \|\exp\{-t\hat{\mathbf{H}}_0\} - \exp\{-t\hat{\mathbf{H}}\}\| \leq \frac{\|\hat{\mathbf{V}}\|}{\|\hat{\mathbf{H}}_0\|}.$$

Итак, евклидова динамика тоже устойчива относительно возмущений, которые относительно малы в p -адическом смысле.

Рассмотрим свободную евклидову динамику $V_0(t) = \exp\{-t\hat{\mathbf{H}}_0\}$. Естественно назвать эту операторную группу в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$ p -адической группой Орнштейна–Уленбека. Соответствующие “вероятности” переходов не являются ограниченными p -адическими мерами. Эта конструкция ближе к квантовым стохастическим процессам, чем к обычным стохастическим процессам, поскольку в ней траекторные процессы заменяются операторными процессами [46] (см. [47], где обсуждается некоторый p -адический аналог квантовых случайных процессов).

Таким же образом мы можем исследовать дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_B \phi.$$

Оно определяет однопараметрическую группу изометричных неунитарных операторов в $L_2(Q_p^\infty, \nu_B)$: $t \in \mathcal{U}_\gamma \rightarrow W(t) = \exp\{(1/2)t\Delta_B\}$, $\gamma = (p \max(1/|b_n|_p))^{-1}$. Мы называем эту группу p -адической группой винеровского процесса. Эта группа аналогична квантовому стохастическому процессу [46].

9. p -АДИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТониАНА КВАНТОВОГО БОЗОННОГО ПОЛЯ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОБРЕЗАНИЕМ

Чтобы найти p -адическое представление бозонных квантово-полевых гамильтонианов с потенциалами полиномиального типа, мы рассмотрим сначала поле в ящике $[0, 2\pi L] \times \cdots \times [0, 2\pi L]$. Начнем с бозонного поля в вещественном пространстве. Мы ограничимся одномерным случаем, поскольку в нем проявляется все, что свойственно p -адичности.

Пусть $\phi(x)$ – бозонное поле на $[0, 2\pi L]$ с периодическими граничными условиями $\phi(0) = \phi(2\pi L)$. Удобно выбрать $L \in \mathbb{N}$. Соответствующая гауссова мера имеет вид

$$\nu_{B_L}(d\phi) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi L} \phi(x) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + m^2\right) \phi(x) dx\right\} \prod_x d\phi(x),$$

где m – положительная постоянная. Мы предположим, что $m \in Q$. Представим $\phi(x)$ в виде ряда Фурье

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nx}{L} + b_n \sin \frac{nx}{L} \right). \quad (22)$$

В переменных $\phi_0 = a_0$, $\phi_1 = a_1$, $\phi_2 = b_1, \dots$ мера ν_{B_L} имеет вид

$$\nu_{B_L}(d\phi) = \prod_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\phi_n^2}{2b_{nL}} \right\} \frac{d\phi_n}{\sqrt{2\pi b_{nL}}},$$

где $b_{nL} = ([(n+1)/2]^2 / L^2 + m^2)^{-1}$ и $[a]$ – целая часть a .

Мы перенесем это представление в p -адический анализ и рассмотрим реализацию гамильтониана бозонного поля в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$, где $B_L = \text{diag}(b_{nL})$. Условие (17) выполняется: $1/|b_{nL}|_p \leq \max(|m|_p^2, 1/|L|_p^2)$. Следовательно, свободный гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}_0$ – ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$. Это утверждение справедливо при любом значении p , но норма $\hat{\mathbf{H}}_0$ зависит от p .

Вернемся теперь к вещественному случаю и рассмотрим потенциал

$$V(\phi) = \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi L} \phi^m(x) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используя ряд (22) в комплексной форме

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{inx/L}, \quad \bar{\psi}_n = \psi_{-n},$$

получаем

$$V(\phi) = \sum_{j_1 + \dots + j_m = 0} \psi_{j_1} \dots \psi_{j_m}.$$

Воспользуемся этим представлением для p -адической реализации и примем, что

$$\hat{\mathbf{V}} = V(\hat{\phi}) = \sum_{j_1 + \dots + j_m = 0} \hat{\psi}_{j_1} \dots \hat{\psi}_{j_m}, \quad (23)$$

где $\hat{\phi}_j$ – ограниченные операторы в p -адическом гильбертовом пространстве $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$. Однако условие аналитичности в $\mathcal{U}_r^\infty$, фигурирующее в теореме 7.2, не выполняется, и мы пока не знаем, ограничен ли оператор (23) в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$. Известно только, что ряд (23) не сходится в операторной норме. Мы надеемся, что $\hat{\mathbf{V}}$ окажется ограниченным в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$ после надлежащей перенормировки. Тогда будет достаточно исследовать предел $L \rightarrow \infty$, т.е. проблему, уже решенную в стандартном подходе в случае пространства-времени размерности 2 и 3 и специального вида V [14, 32–36, 38–40, 43, 48]. Мы надеемся вернуться к этой проблеме в следующей статье.

Какие потенциалы могут быть реализованы как ограниченные операторы в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$? Мы покажем, что потенциалы типа полиномов Вика со специальными коэффициентами реализуются как ограниченные операторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Допустим, что коэффициенты полинома Вика степени l*

$$: P(\hat{\phi}) := \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_n < \infty, k_1 + \dots + k_n = l} c_{j_1 \dots j_n} : \hat{\phi}_{j_1}^{k_1} : \dots : \hat{\phi}_{j_n}^{k_n} : \quad (24)$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{|j| \rightarrow \infty} |c_j|_p \left[(j_1 + 1)/2 \right]^2 L^{-2} + m^2 \Big|_p^{-k_1/2} \dots \left[(j_n + 1)/2 \right]^2 / L^{-2} + m^2 \Big|_p^{-k_n/2} = 0. \quad (25)$$

Тогда этот полином ограничен в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разумеется, можно выбрать рациональные коэффициенты c_j так, что получится то же формальное выражение для V , что и в обычной квантовой теории поля.

Если числа L и m таковы, что при всех n выражение $n^2/L^2 + m^2$ не делится на p , то условие (25) принимает форму

$$\lim_{|j| \rightarrow \infty} |c_j|_p = 0, \quad (26)$$

т.е., например, $c_j = p^{|j|}$. Но это возможно только при $m \neq 0$. Если $m = 0$, то коэффициенты c_j должны стремиться к нулю быстрее, чтобы компенсировать рост $|L|_p^2/n|_p^2$. Следовательно, расходимости более сильны в случае $m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9.1. Достаточно оценить $\| : \hat{\phi}_k^n : \|$ в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$. Имеем

$$: \hat{\phi}_k^n := \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j b_k^j n! \hat{\phi}_k^{n-2j}}{(n-2j)! j! 2^j}.$$

Используя это выражение, теорему 5.1 и оценку (6), получаем, что

$$\| : \hat{\phi}_k^n : \| \leq |b_k|_p^{n/2}. \quad (27)$$

Отсюда следует (25).

Мы можем рассмотреть также некоторые аналитические функции от многочленов Вика, например экспоненциальный потенциал

$$\widehat{\mathbf{V}}_\lambda =: \exp\{\lambda \hat{\phi}_k^n\} := \exp\{\lambda : \hat{\phi}_k^n : \} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (: \hat{\phi}_k^n :)^j. \quad (28)$$

Если $|\lambda|_p \leq \left[(k+1)/2 \right] + m^2 \Big|_p^{n/2}/p$, то этот потенциал – изометричный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$.

Пусть $m = 0$. Если $[(k+1)/2]$ не делится на p , то справедливо неравенство $|\lambda|_p \leq 1/p$ (например, $\lambda = p$). Если $[(k+1)/2]$ делится на p^l , то $|\lambda|_p \leq 1/p^{l+1}$. Не-сложно исследовать произведения экспонент (28) вида

$$V(\hat{\phi}_{k_1}, \dots, \hat{\phi}_{k_s})_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = \exp\{\lambda_1 : \hat{\phi}_{k_1}^{n_1} : \} \dots \exp\{\lambda_s : \hat{\phi}_{k_s}^{n_s} : \}, \quad (29)$$

где $k_1 < \dots < k_s$. Если числа $|\lambda_j|_p$ достаточно малы, то эти операторы изометричны.

Следующий шаг состоит в рассмотрении рядов вида

$$\hat{\mathbf{V}} = \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_s < \infty} c_j V(\hat{\phi}_{j_1}, \dots, \hat{\phi}_{j_s})_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}. \quad (30)$$

Поскольку нормы экспоненциальных операторов равны 1, условия стремления коэффициентов в (30) к нулю достаточно для того, чтобы ряд (26) был ограниченным симметричным оператором.

Аналогично можно исследовать тригонометрические потенциалы

$$\hat{\mathbf{V}}_\lambda =: \sin \lambda \hat{\phi}_k^n : \quad \text{или} \quad : \cos \lambda \hat{\phi}_k^n :. \quad (31)$$

Если λ удовлетворяет тем же условиям, что и в экспоненциальном случае, то эти операторы ограничены. Более того, $: \cos \lambda \hat{\phi}_k^n :$ — изометричный оператор. Аналогично можно рассмотреть тригонометрические многочлены от конечного числа операторов (31).

p -Адитивский анализ позволяет также реализовать в виде ограниченных операторов весьма быстро растущие потенциалы. Например, операторы

$$\hat{\mathbf{V}}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = \exp\{\lambda_1 \exp\{\lambda_2 \dots \exp\{\lambda_s : \hat{\phi}_{k_s}^{n_s} : \} \dots \}\} \quad (32)$$

изометричны в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$ для достаточно малых $|\lambda_j|_p$.

Пользуясь тем, что гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}_0$ ограничен, получаем, что $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}$, где $\hat{\mathbf{V}}$ имеет вид (24), (29) или (32), — ограниченный оператор в $L_2(Q_p^\infty, \nu_{B_L})$.

Список литературы

- [1] *H. S. Snyder*. Phys. Rev. 1947. V. 7. P. 38.
- [2] *A. Schild*. Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 414.
- [3] *E. J. Hellund, K. Tanaka*. Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 192.
- [4] *Д. И. Блохинцев*. Пространство и время в микрокосме. М.: Наука, 1982.
- [5] *Yu. Manin*. Lect. Notes in Math. Quantum Field Theory. 1985. V. 1111. P. 59.
- [6] *I. V. Volovich*. Number theory as the ultimate physical theory. Preprint TH.4781/87, 1987.
- [7] *D. Amati*. On space-time at small distances. In: Sakharov Memorial Lectures. Eds L. V. Keldysh and V. Ya. Fainberg. New York: Nova Science P. Inc., 1992.
- [8] *J. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos*. A Liouville string approach to microscopic time in cosmology. Preprint CERN-TH 7000/93.
- [9] *A. Ashtekar*. Quantum gravity: a mathematical physics perspective. Preprint CGPG-93/12-2.
- [10] *S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts*. Commun. Math. Phys. 1995. V. 172. P. 187.
- [11] *E. Beltrametti, G. Cassinelli*. Found. Phys. 1972. V. 2. P. 1.
- [12] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*. *p*-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [13] *Yu. Manin*. Reflections on arithmetical physics. In: Conformal Invariance and String Theory. Eds P. Dita and V. Georgescu. Boston: Acad. Press, 1989. P. 293.
- [14] *С. Альберверо, Ю. Фенстад, Р. Хоег-Крон, Т. Линдстрем*. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1988.
- [15] *A. Yu. Khrennikov*. *p*-Adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic, 1994.
- [16] *A. Robinson*. Nonstandard analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1966.
- [17] *S. Albeverio*. Nonstandard analysis in mathematical physics. In: Nonstandard Analysis and its applications. LMS Student Text 10. Ed. N. J. Cutland. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 182.
- [18] *K. Mahler*. Introduction to *p*-adic numbers and their functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [19] *W. Sikkhof*. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
- [20] *A. van Rooij*. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker Inc., 1974.
- [21] *S. Albeverio, J.-L. Wu*. Nonstandard flat integral representation of the free Euclidean Field and a large deviation bound for the exponential interaction. Preprint SFB 237, No 246, Bochum 1995.
- [22] *M. Capinski, N. J. Cutland*. Non standard methods for stochastic fluid dynamics. Singapore: World Scientific Publ., 1995.
- [23] *I. V. Volovich*. Class. Quantum Gravit. 1987. V. 4. P. L83.
- [24] *P. G. O. Freund, M. Olson*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 186.
- [25] *P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191.
- [26] *I. Ya. Aref'eva, B. Dragovic, I. V. Volovich*. Phys. Lett. B. 1988. V. 200. P. 512.
- [27] *I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich*. Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 4341.
- [28] *S. Albeverio, W. Karwowski*. Stoch. Proc. Appl. 1994. V. 53. P. 1.
- [29] *A. Yu. Khrennikov*. Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 119.
- [30] *R. Cianci, A. Yu. Khrennikov*. Int. J. Theor. Phys. 1994. V. 18. P. 1217.
- [31] *А. Ю. Хренников*. УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 79.
- [32] *V. S. Varadarajan*. Quantization of semisimple groups and some applications. Preprint № 127. Department of Mathematics, University of Los Angeles, 1995.
- [33] *V. S. Varadarajan*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 319.
- [34] *S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov*. Representation of the Weyl group in spaces of square integrable functions with respect to *p*-adic valued Gaussian distributions. Preprint, Inst. Math., Bochum University, SFB-237, № 263, 1995.

- [35] *H. Weyl*. The theory of groups and quantum mechanics. New-York: Dover, 1931.
- [36] *Дж. Глимм, А. Джаффе*. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.
- [37] *S. Albeverio, R. Höegh-Krohn*. Quasi invariant measures, symmetric diffusion processes and quantum fields. In: Proc. of Int. Colloquim on Mathematical Methods of Quantum Field Theory. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 248. Editions CNRS, 1976. P. 11.
- [38] *J. C. Baez, I. E. Segal, Z. F. Zhou*. Introduction to algebraic and constructive quantum field theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
- [39] *Б. Саймон*. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
- [40] *J. Glimm, A. Jaffe*. Boson quantum field models. In: Mathematics in Contemporary Physics. Proc. Instructional Conf., London, 1972. Ed. R. F. Streater. N. Y.: Academic Press, 1974. P. 77.
- [41] *S. Albeverio, R. Höegh-Krohn*. Quantum fields and fields with values in groups. In: Stochastic Analysis and Applications. Ed. M. Pinsky, M. Dekker. New-York: Academic Press, 1984. P. 1.
- [42] *S. Albeverio, Ph. Blanchard, Ph. Combe, R. Höegh-Krohn, M. Sirugue*. Commun. Math. Phys. 1983. V. 90. P. 329.
- [43] *S. Albeverio, M. Röckner*. Prob. Theory Relat. Fields. 1991. V. 89. P. 347.
- [44] *А. Ю. Хренников*. ТМФ. 1986. Т. 66. № 3. С. 339.
- [45] *T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff, L. Streit*. White Noise. Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [46] *K. R. Parthasarathy*. An introduction to quantum stochastic calculus. Basel: Birkhauser, 1992.
- [47] *A. Yu. Khrennikov, Zhiyuan Huang*. Quantum Probability and Related Topics. 1994. V. 9. P. 273.
- [48] *Дж. фон Нейман*. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 5.II.1997 г.

S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, R. Cianci
A REPRESENTATION OF QUANTUM FIELD
HAMILTONIAN IN A p -ADIC HILBERT SPACE

Gaussian measures on infinite-dimensional p -adic spaces are introduced and the corresponding L_2 -spaces of p -adic valued square integrable functions are constructed. Representations of the infinite-dimensional Weyl group are realized in p -adic L_2 -spaces. There is a formal analogy with the usual Segal representation. But there is also a large topological difference: parameters of the p -adic infinite-dimensional Weyl group are defined only on some balls (these balls are additive subgroups). p -Adic Hilbert space representations of quantum Hamiltonians for systems with an infinite number of degrees of freedom are constructed. Many Hamiltonians with potentials which are too singular to exist as functions over reals are realized as bounded symmetric operators in L_2 -spaces with respect to a p -adic Gaussian measure.