Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вакуленко, П. В. Гордон, Распространение и рассеяние кинков в неоднородной нелинейной среде, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 3, 384–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1050>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:10:45

С. А. Вакуленко*, П. В. Гордон*

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ КИНКОВ В НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена модель рассеяния кинков в неоднородной нелинейной среде. Показано существование периодически и хаотически осциллирующих по времени связанных состояний кинков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение нелинейных волн – один из основных эффектов в диссипативных средах. Он наблюдается как в физике, так и в химии, биологии и экологии.

Впервые такие волны были открыты в работе [1], и с тех пор их изучение стало одной из центральных проблем, которой посвящено множество исследований, например [2–6]. Когда среда описывается скалярным параметром порядка ψ , следовательно, одним нелинейным параболическим уравнением, почти все уже известно. В этом случае волны в однородной одномерной среде имеют вид кинков $\psi(x - vt)$, где v – скорость [7, 8].

Теория распространения и рассеяния таких волн в неоднородных средах также хорошо развита. Для описания движения их фронтов был разработан асимптотический подход [2, 4].

Значительно сложнее обстоит дело, когда параметр порядка – вектор, т.е. мы имеем дело с системой нелинейных уравнений параболического типа. Известно, что при некоторых ограничениях на вид нелинейности (случай так называемых монотонных систем) кинки имеют вид бегущих волн [9]. Можно показать, что в общем случае это не так: волны вида $\psi(x - vt)$ могут не существовать [4, 10, 11]. Кроме того, для немонотонных систем может иметь место ряд новых физических эффектов, отсутствующих в случае одного уравнения или монотонной системы [4, 10, 11]. Некоторые из них были предсказаны в [4, 10], однако там не было найдено систем *явного* и *простого* вида, которые описывают эти явления.

Цель настоящей работы – построить такие модели и описать новые эффекты, в частности:

I. Существование даже в однородной среде связанных состояний кинков с периодически и хаотически осциллирующей структурой, которые могут двигаться как целое с переменной скоростью.

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail:
vakul@microm.ipme.ru; gordon@mech.ipme.ru

II. Смену типа осцилляций в таких состояниях при прохождении волной неоднородности среды.

III. Возможный распад связанного состояния на отдельные волны (кинки) при прохождении волной неоднородности среды или, наоборот, образование связанного состояния из первоначально независимых фронтов.

Отметим, что некоторые эффекты взаимодействия кинков здесь напоминают аналогичные эффекты, возникающие в уравнении синус-Гордон, где возможно образование бризера – периодически осциллирующего связанного состояния двух солитонов. В нашем случае, однако, возможны и хаотические осцилляции.

Исследуемая модель имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + g(u_i) + \epsilon f_i(\mathbf{u}, x), \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbf{R}$, параметр порядка $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ состоит из n компонент и ϵ – малый параметр, $f_i, g \in C^3$.

В простейшем случае

$$d_i = 1, \quad g(u) = 2(u - u^3), \quad (1.2)$$

однако вся схема анализа может быть применена для (1.1) с нелинейностями g более общего вида и для некоторых других уравнений, которые могут возникать в гидродинамике, теории плазмы и других областях. Например, слагаемое $g(u_i)$ может быть заменено выражением вида $u_i \partial u_i / \partial x$; f_i могут содержать первые производные от $\mathbf{u}$ и т.д.

Тем не менее ради простоты формул предполагаем всюду ниже, что выполнено (1.2).

В отличие от [10, 11] возмущения f_i , описывающие взаимодействие между компонентами u_i , имеют простую форму: это линейные или квадратичные функции u_i с коэффициентами, зависящими от x .

Кроме того, мы кратко опишем сравнительно новый подход к изучению движения и рассеяния таких волн, который можно было бы назвать нелинейным аналогом метода Ритца–Галеркина, и результаты численных экспериментов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы излагаем результаты работ [10, 11], в разделе 3 исследуем простейшую модель, описывающую периодический эффект I в случае однородной среды. В разделе 4 приводим систему, описывающую эффекты I, II для случая неоднородной среды. В разделе 5 даем пример образования хаотических связанных состояний кинков. Далее в разделе 6 мы приводим пример системы, описывающей эффект III. Последняя часть работы содержит результаты численных экспериментов, которые подтверждают аналитические выводы и показывают, что происходит при немалых ϵ .

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ (1.1) И ЕЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В этом разделе мы кратко изложим метод и результаты, детально представленные в [10, 11]. Этот метод позволяет описать поведение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП) с помощью значительно более простой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Получаемая система ОДУ описывает эволюцию координат кинков.

Будем искать решение системы (1.1) в следующем виде:

$$u_i(x, t) = U_i(x - q_i(t)) + v_i(x, t), \quad \mathbf{U}(x, \mathbf{q}) = (U_1, \dots, U_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \quad (2.1)$$

где вектор-функция $\mathbf{U}$ – волновое решение невозмущенной системы (1.1) ($\epsilon = 0$). В частности, для рассматриваемого в данной работе типа нелинейности (1.2) имеем

$$U_i(x) = \text{th}(x - q_i), \quad q_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Пусть, далее, начальные данные для уравнения (1.1) имеют форму (2.1), где функции $v_i(x, t)$ в начальный момент времени ($t = 0$) удовлетворяют оценке

$$\|v_i(\cdot, t)\| < C\epsilon^\kappa, \quad \kappa > 0. \quad (2.3)$$

$\|\cdot\|$ есть L_2 -норма в $\mathbf{R}$, C – некоторая константа. С помощью условия (2.3) нетрудно доказать глобальную разрешимость, $C^{2,1}$ -гладкость и единственность решения начальной задачи (1.1).

Метод [10, 11] (см. также [4]) во многом аналогичен подходу [12, 13] (развитому применительно к другим ситуациям) и кратко может быть описан следующим образом.

Сделаем замену: от переменной $u(x, t)$ перейдем к переменным $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in L_2(\mathbf{R})$. Переменные q_i однозначно определяются следующим условием:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}^{-2}(x - q_i) v(x, t) dx = \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial q_i}, v_i \right\rangle = 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R})$.

Это условие имеет простой смысл. Мы аппроксимируем решение $u(x, t)$ максимально точно в L_2 -норме с помощью невозмущенных фронтов (2.2), подбирая в каждый момент времени величины q_i – координаты (фазы) этих фронтов. Функции же v_i описывают искажение i -го фронта за счет возмущения ϵf_i .

Итак, весь фронт в целом представляет собой набор кинков и в первом приближении описывается вектор-функцией $\mathbf{U}(x, \mathbf{q})$, зависящей от x и $\mathbf{q}$.

Оказывается, вышеуказанная замена корректно определена при достаточно малых ϵ в любой малой окрестности $V(C)$, заданной неравенством (2.3). Более того, посредством простых априорных оценок можно доказать, что решение не покидает окрестности $V(C_1)$, где $C_1 = 2C$.

Это позволяет доказать следующее утверждение [10].

УТВЕРЖДЕНИЕ: 1) *существует $c > 0$ такое, что при $t > c|\ln \epsilon|$ и достаточно малых ϵ в (2.3) можно положить показатель $\kappa = 1$, т.е. на больших временах искажение фронта имеет порядок ϵ ;*

2) *при этом для таких времен выполняются следующие уравнения для $q_i(\tau)$:*

$$\dot{q}_i = \tilde{h}_i(v, q, \epsilon), \quad \tilde{h}_i = h_i(q) + \gamma_i(v, q, \epsilon), \quad (2.4)$$

где $|\gamma_i| < C\gamma\epsilon$, $t > C|\ln \epsilon|$, а для главных членов правых частей $h_i(q)$ верны формулы

$$h_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\mathbf{U}(x, \mathbf{q}), x) \text{ch}^{-2}(x - q_i) dx. \quad (2.5)$$

(В (2.4) и далее точкой обозначается дифференцирование по “медленному времени” $\tau = \frac{3}{4}\epsilon t$).

Заметим, что утверждение 1 иллюстрирует важный эффект взаимодействия нелинейности и диффузии. Мы знаем, что диффузия для линейных проблем обычно приводит к “размыванию” решений. В нелинейном случае она приводит к стабилизации формы фронта волны аналогично тому, как взаимодействие нелинейности и дисперсии для уравнения Кортевега–де Фриза приводит к образованию солитона. Отметим также, что даже немалые начальные искажения фронта $v(x, 0)$ в конце концов исчезают, приводя лишь к сдвигу фазы кинка [11, 14].

Таким образом, при малых ϵ после отбрасывания поправочных членов γ_i в (2.4) задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\dot{q}_i = h_i(\mathbf{q}), \quad (2.6)$$

где h_i определяются из выражений (2.5).

Когда система (1.1) описывает распространение волн в однородной среде (f_i зависит только от $\mathbf{u}$), система (2.6) допускает дальнейшее упрощение, позволяющее понизить ее порядок на единицу. Эта редукция основана на трансляционной инвариантности (1.1), поэтому правые части h_k в (2.6) зависят только от относительных разностей координат $q_i - q_j$.

Введем новые координаты $Q_i = q_i - q_n$, $i = 1, \dots, n-1$, и вычтем из i -го уравнения системы (2.6) (где $i < n-1$) уравнение с номером n . Тогда уравнения (2.6) принимают вид

$$\dot{Q}_i = H_i(\mathbf{Q}), \quad \dot{q}_n = h_n(\mathbf{Q}), \quad (2.7)$$

где $H_i = h_i - h_n$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1})$ и $i = 1, \dots, n-1$.

Переменные Q_i задают относительное расположение кинков. После того как система (2.7) будет решена, можно определить эволюцию координаты центра масс системы кинков $q_c = n^{-1}(q_1 + q_2 + \dots + q_n)$.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ КИНКОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В данном разделе мы приводим простой пример, описывающий некоторые неожиданные эффекты движения волн в однородной среде. Рассмотрим систему (1.1) при $n = 3$ и

$$f_1 = -u_3 + \mu, \quad f_2 = u_3 + \mu, \quad f_3 = (u_1 - u_2) + \mu, \quad (3.1)$$

где μ — не зависящий от ϵ параметр. Будем искать решение в форме (2.1). Уравнения (2.6) для координат кинков принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \langle U_3, U_{1x} \rangle - \mu \langle 1, U_{1x} \rangle, \\ \dot{q}_2 &= -\langle U_3, U_{2x} \rangle - \mu \langle 1, U_{2x} \rangle, \\ \dot{q}_3 &= \langle U_2, U_{3x} \rangle - \langle U_1, U_{3x} \rangle - \mu \langle 1, U_{3x} \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя очевидные равенства $\langle U_j, U_{3x} \rangle = -\langle U_3, U_{jx} \rangle$, $\langle 1, U_{jx} \rangle = 2$, перепишем систему (3.2) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \langle U_3, U_{1x} \rangle - 2\mu, & \dot{q}_2 &= -\langle U_3, U_{2x} \rangle - 2\mu, \\ \dot{q}_3 &= \langle U_3, U_{1x} \rangle - \langle U_3, U_{2x} \rangle - 2\mu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Исследуем сначала движение первого и второго кинков относительно третьего. С этой целью, следуя методу, описанному в разделе 2, введем новые координаты $Q_1 = q_1 - q_3$, $Q_2 = q_2 - q_3$. Теперь уравнения (2.7) могут быть записаны в виде

$$\dot{Q}_1 = \langle U_3, U_{2x} \rangle, \quad \dot{Q}_2 = -\langle U_3, U_{1x} \rangle, \quad (3.4)$$

где, как показывают некоторые расчеты, $\langle U_3, U_{1x} \rangle = F(\alpha)$, $\langle U_3, U_{2x} \rangle = F(\beta)$, $\alpha = \text{th } Q_1$, $\beta = \text{th } Q_2$, а функция F имеет вид

$$F(\alpha) = (1 - \alpha^2) \int_{-1}^1 \frac{v dv}{(1 - \alpha v)^2} = \frac{2}{\alpha} - \frac{2(1 - \alpha^2)Q_1}{\alpha^2}. \quad (3.5)$$

Таким образом, динамика относительных координат Q_1 , Q_2 описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{Q}_1 = F(\text{th } Q_2), \quad \dot{Q}_2 = -F(\text{th } Q_1). \quad (3.6)$$

Система (3.6) является консервативной, гамильтоновой, и ее энергия определяется соотношением

$$E = Q_1 \text{th}^{-1} Q_1 + Q_2 \text{th}^{-1} Q_2. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует (в силу ограниченности E), что все решения (3.6) всегда периодические. Выражая q_1 , q_2 , q_3 через Q_1 , Q_2 с помощью (3.5) и интегрируя по времени, приходим к формулам

$$q_1 = -Q_2 - 2\mu\tau, \quad q_2 = -Q_1 - 2\mu\tau, \quad q_3 = -Q_1 - Q_2 - 2\mu\tau. \quad (3.8)$$

Последнее уравнение системы (3.8) получено подстановкой (3.4) в третье уравнение (3.3) и последующим интегрированием.

Из (3.8) находим уравнение движения центра масс кинков

$$\frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3) = -\frac{2}{3}(Q_1 + Q_2) - \mu\frac{3}{2}\epsilon t. \quad (3.9)$$

Следовательно, движение кинков в системе (3.1) осуществляется так: центр масс движется с постоянной средней скоростью, на которую накладываются периодические колебания, при этом кинки также взаимно осциллируют относительно центра масс.

Этот эффект кажется удивительным: ведь исходная нелинейно-диссипативная среда однородна. Однородность среды проявляется в том, что скорость центра масс, усредненная по периоду осцилляций, всегда постоянна и равна $\bar{V} = \frac{3}{2}\epsilon\mu$. При $\mu = 0$ возникает связанное состояние из периодически осциллирующих кинков, которые вместе образуют стоячую волну ($\bar{V} = 0$). Возможность данного эффекта связана с тем, что в отличие от многих нелинейных волновых уравнений (и от задач рассеяния многих частиц)

данная модель описывает “активную” нелинейно-диссипативную среду. Невозможно, следовательно, говорить здесь о законе сохранения полного импульса и даже вообще об импульсе. Отсутствие ограничения на скорость центра масс, связанного с законом сохранения, и приводит к появлению обнаруженного эффекта.

Возникает, однако, вопрос, почему этот эффект не появляется для параболических уравнений второго порядка, которые также описывают аналогичные диссипативные среды. Дело в том, что в этом случае есть другое априорное ограничение на поведение решений. Для уравнения (1.1) (т.е. когда $n = 1$) бóльшим начальным данным соответствуют бóльшие решения. Данное свойство, хорошо известное как принцип сравнения решений [5, 15], является сильным динамическим ограничением, которое запрещает появление нетривиальных волновых решений.

4. ОБРАЗОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖУЩИХСЯ КИНКОВ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Эффекты, полученные в разделе 3, в случае однородной среды могут возникать только в системах трех и более уравнений. В этом разделе приводится пример возникновения периодических движений фронтов многофазных волн в системе двух уравнений, что становится возможным за счет неоднородности среды. С помощью системы (2.6) мы опишем движение кинков в окрестности локализованной неоднородности. Будет показано, что эти уравнения допускают только периодические решения.

Рассмотрим систему (1.1) с возмущениями f_i следующего вида:

$$f_1 = \rho(x)u_2, \quad f_2 = -\rho(x)u_1, \quad (4.1)$$

где $\rho(x)$ — некоторая функция. Решение этой системы будем искать в форме (2.1). Уравнения (2.6) примут вид

$$\dot{q}_1 = -\langle \rho U_2, U_{1x} \rangle, \quad \dot{q}_2 = \langle \rho U_1, U_{2x} \rangle. \quad (4.2)$$

Считая, что неоднородность $\rho(x)$ сильно локализована (например, гауссовский пик малой ширины d , близкий к δ -функции), приходим к следующим выражениям для правых частей системы (4.2):

$$\langle \rho U_2, U_{1x} \rangle = (U_2 U_{1x})|_{x=0} + O(d), \quad \langle \rho U_1, U_{2x} \rangle = (U_1 U_{2x})|_{x=0} + O(d). \quad (4.3)$$

В итоге, пренебрегая членами $O(d)$, видим, что динамика координат кинков будет описываться двумя ОДУ

$$\dot{q}_1 = \beta(1 - \alpha^2), \quad \dot{q}_2 = -\alpha(1 - \beta^2), \quad (4.4)$$

где $\alpha = \text{th } q_1$, $\beta = \text{th } q_2$. Эти уравнения удобно переписать следующим образом:

$$\dot{\alpha} = \beta(1 - \alpha^2)^2, \quad \dot{\beta} = -\alpha(1 - \beta^2)^2, \quad (4.5)$$

откуда ясно, что они имеют интеграл энергии $E = (1 - \alpha^2)^{-1} + (1 - \beta^2)^{-1}$. Покажем, что система (4.5) гамильтонова. С этой целью вводим вспомогательную функцию

$$\phi(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} = \frac{\alpha}{2(1 - \alpha^2)} + \frac{Q_1}{2} \quad (4.6)$$

и новые переменные ϕ и ψ , где $\psi(\beta) = \phi(\beta)$. Обозначая $\alpha = \alpha(\phi)$, $\beta = \alpha(\psi)$, получаем относительно ϕ , ψ систему уравнений вида

$$\dot{\phi} = \beta(\psi), \quad \dot{\psi} = -\alpha(\phi). \quad (4.7)$$

Гамильтониан этой системы определен равенством

$$H(\psi, \phi) = A(\psi) + A(\phi), \quad A(\psi) = \int \beta(\psi) d\psi. \quad (4.8)$$

В силу ограниченности энергии E заключаем, что система (1.1) имеет решения с периодически осциллирующими фронтами кинков. Поведение решений совершенно аналогично поведению решений, описанному в предыдущем разделе, за исключением того, что нет никакого поступательного движения центра масс: кинки “привязаны” к дефекту.

Другая модель с периодическим движением и нетривиальными эффектами рассеяния может быть получена исходя из результатов предыдущего раздела, если мы рассмотрим нелинейности $\rho(x)f_i$, где f_i имеют вид (3.1), а функция $\rho \geq 0$ отлична от нуля на некотором интервале длины L . Периодические колебания наблюдаются только тогда, когда кинки движутся сквозь неоднородность.

В обоих случаях периодические колебания сохраняются в течение времени τ порядка ϵ^{-1} , после чего, как показывают численные расчеты и другие соображения (см. ниже раздел 7), колебания затухают. Это связано с малыми поправочными членами γ_i в (2.4), которые вносят малую диссипацию в (4.5). Результаты следующего раздела позволяют построить модель, где периодическое движение не затухает никогда.

5. ХАОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТОВ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Этот раздел будет посвящен модели, в которой могут возникать хаотические (по времени) и незатухающие периодические осцилляции фронтов волн. Поскольку вопрос о существовании хаоса даже для систем ОДУ является весьма непростым, мы поступим следующим образом. Здесь будет построена модель системы, которая сведется (с помощью результатов раздела 2) к системе Лоренца [16, 17], для которой существуют хаотические режимы.

Рассмотрим систему (1.1) при $n = 3$ и с возмущениями

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma \rho(x)(u_2 - u_1), \\ f_2 &= \rho(x)(\lambda^{-1}u_1u_3 + ru_1 - u_2), \\ f_3 &= -\rho(x)(\lambda^{-1}u_1u_2 + bu_3), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где λ – малый параметр, причем $\lambda \gg \epsilon$; σ, r, b – некоторые параметры. Будем искать решение системы (1.1) в виде (2.1) (при ограничениях (2.2), (2.3) на начальные данные). В результате из (2.6) получаем уравнения, описывающие эволюцию координат кинков,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \sigma(\langle \rho U_1, U_{1x} \rangle - \langle \rho U_2, U_{1x} \rangle), \\ \dot{q}_2 &= -\lambda^{-1} \langle \rho U_1 U_3, U_{2x} \rangle - r \langle \rho U_1, U_{2x} \rangle + \langle \rho U_2, U_{2x} \rangle, \\ \dot{q}_3 &= \lambda^{-1} \langle \rho U_1 U_2, U_{3x} \rangle + b \langle \rho U_3, U_{3x} \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

При тех же предположениях о $\rho(x)$, что и в разделе 4, приходим к следующей системе уравнений, описывающей динамику фронтов кинков:

$$\dot{q}_1 = \sigma(\beta - \alpha)(1 - \alpha^2), \quad \dot{q}_2 = (r\alpha - \beta - \lambda^{-1}\alpha\gamma)(1 - \beta^2), \quad \dot{q}_3 = (\lambda^{-1}\alpha\beta - b\gamma)(1 - \gamma^2), \quad (5.3)$$

где $\alpha = \text{th } q_1$, $\beta = \text{th } q_2$, $\gamma = \text{th } q_3$. Из-за сложности системы (5.3) мы изучим поведение ее решений только в малой окрестности нуля $\mathbf{q} = 0$ размером $O(\lambda)$. Мы собираемся показать, что данные решения не покидают эту окрестность и их поведение внутри нее с точностью до малых поправок определяется системой Лоренца.

Введем новые переменные $Q_i = \lambda^{-1}q_i$. Тогда с точностью до $O(\lambda^2)$ уравнения (5.3) принимают вид

$$\dot{Q}_1 = \sigma(Q_2 - Q_1), \quad \dot{Q}_2 = rQ_1 - Q_2 - Q_1Q_3, \quad \dot{Q}_3 = Q_1Q_2 - bQ_3. \quad (5.4)$$

Уравнения (5.4) совпадают с уравнениями системы Лоренца, для которой при определенном выборе параметров σ, r, b существуют хаотические решения.

Чтобы оправдать переход от (5.3) к (5.4), необходимы некоторые дополнительные рассуждения. Во-первых, мы должны найти такую окрестность нуля $D \subset \mathbf{R}^3$, при которой если в начальный момент $\mathbf{Q}$ лежит в D , то и во все последующие моменты это так. Тогда Q_i всегда будут оставаться ограниченными, и, следовательно, всегда можно (для таких начальных данных) перейти от (5.3) к (5.4). Такая инвариантная область D существует благодаря диссипативности системы Лоренца и имеет вид

$$D = \{(Q_1, Q_2, Q_3) | Q_1^2 + Q_2^2 + (Q_3 - \sigma - r)^2 \leq c^2\}, \quad (5.5)$$

где постоянная c должна быть достаточно велика [18].

Во-вторых, если мы желаем иметь строгое доказательство существования хаоса, необходимо также показать, что малые отброшенные члены $O(\lambda^2)$ и γ_i не вносят существенных изменений в поведение решений. Это весьма тонкая и трудная задача. Однако в последнее время появился ряд работ, где разработан специальный метод, позволяющий доказывать существование хаотических режимов для УЧП [19–23]. Такие доказательства содержат ряд дополнительных математических деталей, которые делают их довольно длинными.

В данной работе мы опускаем детальные рассуждения. Решающее обстоятельство, позволяющее добиться успеха, заключается в следующем. Согласно [16] система Лоренца обладает некоторыми свойствами структурной устойчивости. Именно, с помощью сечения Пуанкаре с ней стандартным образом можно связать некоторое отображение. Это отображение меняется при малом возмущении, но сохраняет хаотические свойства, поскольку оно может быть включено в структурно-устойчивый двухпараметрический класс хаотических отображений [16].

Отметим, что, поскольку в модели Лоренца также возможны грубые (структурно-устойчивые) периодические циклы, одновременно мы получаем пример системы, где в отличие от примеров, приведенных в разделах 3, 4, периодическое движение сохраняется неограниченно долго.

6. РАССЕЯНИЕ КИНКОВ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ГРАНИЦЫ СРЕД С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим модель рассеяния волн при переходе границы двух различных сред. Пусть в системе (1.1) функции f_i определены выражениями

$$f_1 = -2 - \eta(x)u_2, \quad f_2 = -2, \quad (6.1)$$

где $\eta(x)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $x > 0$. Уравнения (2.6) при возмущениях (6.1) имеют вид

$$\dot{q}_1 = 2\langle 1, U_{1x} \rangle + \langle \eta U_2, U_{1x} \rangle, \quad \dot{q}_2 = 2\langle 1, U_{2x} \rangle. \quad (6.2)$$

После некоторых несложных вычислений система (6.2) преобразуется к следующей:

$$\dot{q}_1 = 4 + F(\alpha, \delta), \quad \dot{q}_2 = 4, \quad (6.3)$$

где $\alpha = \text{th}(q_1)$, $\delta = \text{th}(q_1 - q_2)$;

$$F(\alpha, \delta) = \frac{1 + \alpha}{\delta} + \frac{1 - \delta^2}{\delta^2} \ln \left(\frac{1 - \alpha\delta}{1 + \delta} \right), \quad \delta \neq 0, \quad F(\alpha, 0) = \frac{1 - \alpha^2}{2}. \quad (6.4)$$

Поскольку $|F(\alpha, \delta)| < 2$, то ясно, что обе волны движутся в положительном направлении, причем $q_2 = 4\tau + q_2(0)$, $2 < \dot{q}_1 < 6$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнений (6.3) с начальными данными $q_1(0) = q_2(0) \ll -1$. Тогда, как видно из выражения (6.4), динамика кинков такова: сначала волны движутся вместе с почти одинаковой скоростью, поскольку F мало при больших отрицательных q_1 . Рассмотрим динамику относительного расстояния $Q = q_1 - q_2$ между кинками при больших положительных q_1 (кинки всегда проникают в эту область согласно нашей оценке их скоростей). В этом случае из (6.4) следует

$$\dot{Q} = \frac{2}{\text{th } Q} \left(1 - \frac{Q}{\text{ch } Q \text{ sh } Q} \right).$$

Из этого уравнения вытекает, что $Q(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, кинки рассеиваются. Расстояние между ними увеличивается неограниченно, и при больших временах мы получаем два независимых кинка, движущихся с различными скоростями. Таким образом, данная модель описывает эффект распада связанного состояния кинков при изменении свойств среды.

7. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Прямые численные расчеты исходной системы (1.1) полностью подтверждают результаты разделов 3, 4 и 6 (система из раздела 5 нами не рассматривалась из-за отсутствия достаточно мощного компьютера) и, кроме того, обнаруживают следующую любопытную закономерность. При численном исследовании системы в разделе 4, когда ϵ не мало, пространственная структура фронта нарушается и временные осцилляции становятся затухающими. Кинки сближаются к устойчивому положению равновесия

$q_1 = q_2 = 0$. При этом время затухания тем меньше, чем больше параметр ϵ . Это может быть объяснено следующими соображениями.

Фазовый портрет систем (2.6), рассмотренных в разделах 3, 4, состоит из набора замкнутых кривых, топологически эквивалентных окружностям, окружающим точку равновесия $q_1 = q_2 = 0$. Как показывают компьютерные вычисления, эта точка равновесия, соответствующая стационарному решению $u_i = \text{th } x$, $i = 1, 2$, всегда устойчива независимо от выбора параметра ϵ . Данный факт может быть объяснен и аналитически с помощью исследования квадратичной формы линеаризованного оператора и известных результатов [14, 15].

Таким образом, отброшенные поправочные члены γ_i в (2.6) являются, как и следовало ожидать, диссипативными. Это и приводит к медленному затуханию (за время порядка $O(\epsilon^{-2})$) периодического режима в системах, приведенных в разделах 3, 4.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа показывает, что даже в самых простых моделях с полиномиальными нелинейностями не выше кубической возможно сложное взаимодействие нелинейных волн. Однако в данной одномерной модели размерность аттрактора системы ОДУ (2.6), определяющей поведение координат кинков, ограничена сверху числом компонент n . По-видимому, в двумерных двухкомпонентных системах с такими же простыми нелинейностями взаимодействие уединенных волн может породить неограниченно сложное поведение.

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, Г. И. Петровский, Н. С. Пискунов. Бюлл. МГУ. Сер. А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1.
- [2] В. П. Маслов, К. А. Волосов, В. Г. Данилов. Математические проблемы тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
- [3] Y. Kuramoto. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
- [4] И. А. Молотков, С. А. Вакуленко. Сосредоточенные нелинейные волны.. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [5] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [6] Дж. Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
- [7] А. И. Вольперт. Волновые решения параболических уравнений. Препринт института химической физики АН СССР. Черноголовка, 1983.
- [8] В. А. Вольперт. Некоторые вопросы устойчивости бегущих волн. Препринт института химической физики АН СССР. Черноголовка, 1980.
- [9] В. А. Вольперт, А. И. Вольперт. Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Т. 145. Новосибирск: Сиб. отд. ин-та математики АН СССР, 1990. С. 49.
- [10] С. А. Вакуленко. ЖВМ и МФ. 1991. Т. 31. № 5. С. 735.
- [11] S. A. Vakulenko. Nonlinear Analysis TMA. 1992. V. 19. P. 1033.
- [12] G. A. Fusco. Geometric approach to the dynamics of $u_t = \epsilon^2 u + f(u)$. In: Problems involving change of type. Lect. Notes in Phys. V. 359. Berlin-Heidelberg: Springer, 1990. P. 53-73.
- [13] J. Carr, R. Pego. Very slow phase separation in one dimension. In: PDEs and continuum models of phase transition. Lect. Notes in Phys. V. 344. Eds M. Rasele et al. Berlin-Heidelberg: Springer, 1989. P. 216.

- [14] *P. C. Fife, J. B. Macleod.* Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 65. P. 335.
- [15] *Д. Хенри.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [16] *Д. В. Аносов, С. Х. Арансон и др.* Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991.
- [17] *В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников.* Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1985.
- [18] *Э. Хайпер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990.
- [19] *P. Polacik.* Ann. Scuole Norm Pisa. 1991. V. 17. P. 83.
- [20] *B. Fiedler, P. Polacik.* Proc. Roy. Soc. of Edinburgh. 1990. V. 115. P. 167.
- [21] *S. A. Vakulenko.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 316. Ser. I. P. 1015.
- [22] *S. A. Vakulenko.* J. Phys A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 2335.
- [23] *S. A. Vakulenko.* Ann. Inst. Henri Poincare, Phys. Theor. 1997 (to appear).

Поступила в редакцию 24.III.1997 г.

S. A. Vakulenko, P. V. Gordon
PROPAGATION AND SCATTERING OF KINKS
IN INHOMOGENEOUS NONLINEAR MEDIA

The model of the kink scattering in inhomogeneous nonlinear media is considered. The existence of time periodically and chaotically oscillating kink bound states is shown.