Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, А. В. Рунов, Ренормгруппа в теории двумерной турбулентности: неустойчивость неподвижной точки относительно слабой анизотропии, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 3, 417–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:09:09

Н. В. Антонов*, А. В. Рунов†

РЕНОРМГРУППА В ТЕОРИИ
ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ:
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ
ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБОЙ АНИЗОТРОПИИ

Статистическая модель развитой турбулентности в пространстве размерности $d = 2$ рассматривается с помощью метода ренормализационной группы в приближении слабой анизотропии. Показано, что соответствующая неподвижная точка уравнений ренормгруппы не является инфракрасно-устойчивой, что означает неприменимость приближения слабой анизотропии для описания двумерной турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод ренормализационной группы (РГ) был с успехом применен в теории развитой гидродинамической турбулентности для обоснования инфракрасной (ИК-) масштабной инвариантности (скейлинга) и расчета различных универсальных величин (критические размерности простых и составных полей, амплитудные множители в скейлинговых законах и т.д.) [1].

В большинстве работ рассматривались модели изотропной однородной турбулентности (об исключениях см. ниже). Однако, поскольку любая реальная система в той или иной степени анизотропна, необходимым условием применимости таких моделей является устойчивость получаемого скейлингового режима, т.е. соответствующей неподвижной точки уравнений РГ относительно влияния слабой анизотропии. Метод РГ является эффективным средством в исследовании и этого вопроса. Как показано в [2, 3], в случае трехмерной турбулентности такая устойчивость действительно имеет место, что, однако, не является общим правилом. Например, в магнитогидродинамической турбулентности ее нет [4].

Указанием на возможную неприменимость изотропного приближения в двумерном случае является результат работы [3], где рассматривалась d -мерная задача в произвольной размерности пространства $d > 2$ и было показано, что устойчивость изотропной неподвижной точки теряется при $d < d_c \simeq 2.68$. Такой же результат получается

*Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт физики, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: antonov@phim.niif.spb.su

†Физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия

и в случае, если анизотропия не считается слабой [5]. Однако, как подчеркивали сами авторы, этот результат не может считаться окончательным, т.к. непосредственно к случаю $d = 2$ их анализ неприменим из-за дополнительных ультрафиолетовых (УФ-) расходимостей, возникающих в корреляционных функциях (функциях Грина) при $d = 2$ и не учитывавшихся в [3, 5].

Анизотропная задача непосредственно в двумерии рассматривалась в работе [6] на основе стохастического уравнения для скалярного “потенциала потока” (stream function). При этом дополнительные УФ-расходимости сокращались с помощью мультипликативной ренормировки нелокального вклада случайной силы подобно тому, как это делалось ранее в работе [7] при анализе изотропной турбулентности вблизи двумерия. Такое сокращение действительно возможно в однопетлевом приближении, но в высших порядках теории возмущений оно неизбежно окажется невозможным, т.к. будет нарушено одно из основных требований теории УФ-ренормировки – локальность контрчленов [8]. Кроме того, в [6] учитывались не все генерируемые контрчлены и использовалась ошибочная “ИК-ренормгруппа” (см. ее обсуждение в [1]). Все это не позволяет считать достоверным полученный в [6] результат – устойчивость относительно слабой анизотропии.

Корректный РГ-анализ двумерной изотропной задачи был выполнен в [9]. Он основан на рассмотрении “расширенной” модели с дополнительным локальным членом в действии, коэффициент при котором является новым (“генерируемым”) зарядом. Ренормировка этого члена и обеспечивает устранение дополнительных УФ-расходимостей. Отметим, что получаемые таким способом результаты сильно отличаются от результатов работы [7].

Другой особенностью двумерного случая является неоднозначность в выборе инерционного интервала, связанная с наличием дополнительных интегралов движения (энстрофии и всех ее степеней [10]). С точки зрения РГ-анализа это вопрос выбора физического значения параметра разложения ϵ , который, строго говоря, не может быть решен в рамках самого метода РГ (значение $\epsilon = 2$ соответствует режиму накачки энергии, $\epsilon = 3$ – режиму накачки энстрофии). Для нас существенно, что процедура построения ϵ -разложения и характер устойчивости неподвижной точки не зависят от выбора физического значения.

В данной работе подход [9] обобщается на случай двумерной статистической модели развитой турбулентности со слабой анизотропией, рассмотренной для случая $d > 2$ в [2, 3]. “Расширенная” модель, включающая все генерируемые процедурой УФ-ренормировки члены, содержит 8 зарядов. Основным результатом работы являются доказательства неустойчивости изотропной двумерной неподвижной точки РГ в расширенном пространстве зарядов и как следствие непригодность приближения изотропной или слабоанизотропной турбулентности к двумерной задаче.

2. МОДЕЛЬ. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА И УФ-РАСХОДИМОСТИ

В статистической теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [1]

$$\nabla_t \varphi_i = \nu_0 \partial^2 \varphi_i - \partial_i p + f_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + (\varphi \partial), \quad (1)$$

где φ_i – поперечное поле пульсаций скорости ($\partial\varphi = 0$ – условие несжимаемости), ν_0 – кинематический коэффициент вязкости, p и f_i – давление и поперечная случайная сила на единицу массы. Сила f_i считается гауссово-распределенной с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle f_i(x, t) f_j(x', t') \rangle = (2\pi)^{-d} \delta(t - t') \int d\mathbf{k} \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} D_{ij}^f(\mathbf{k}). \quad (2)$$

В изотропном случае функция $D_{ij}^f(\mathbf{k})$ может быть записана в виде

$$D_{ij}^f(\mathbf{k}) = D_0 k^{4-d-2\epsilon} P_{ij}(\mathbf{k}), \quad (3)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $\epsilon > 0$ – безразмерный параметр модели, его “логарифмическое” значение есть $\epsilon = 0$, режиму накачки энергии соответствует значение $\epsilon = 2$, а энтропии – значение $\epsilon = 3$. Амплитуда D_0 имеет размерность мощности накачки соответствующей величины на единицу массы.

Стохастической задаче (1) с коррелятором (2) отвечает квантово-полевая модель удвоенного набора полей $\Phi = \{\varphi, \varphi'\}$ с функционалом действия [1]

$$S(\Phi) = \varphi' D^f \varphi' / 2 + \varphi' [-\nabla_t \varphi + \nu_0 \partial^2 \varphi]. \quad (4)$$

Необходимые суммирования по векторным индексам полей и интегрирования по их аргументам в (4) и аналогичных формулах в дальнейшем подразумеваются, вклад случайной силы записан символически. Сказанное означает, что средние по распределению случайной силы f_i равны соответствующим функциональным средним с весом $\exp\{S(\Phi)\}$:

$$\langle \dots \rangle_f = \int \mathcal{D}\Phi \dots \exp\{S(\Phi)\}.$$

Функциональная формулировка позволяет применить к данной задаче стандартную квантово-полевую теорию УФ-ренормировки и технику РГ.

При $d > 2$ УФ-расходимости (полюсы по ϵ) в модели (4), (2) присутствуют лишь в 1-неприводимой функции Грина $\langle \varphi' \varphi \rangle$. Для их устранения достаточно добавить к действию контрчлен вида $\varphi' \partial^2 \varphi$, что эквивалентно введению единственной константы ренормировки при соответствующем члене действия. Особенностью модели (4), (2) при $d = 2$ является присутствие дополнительных УФ-расходимостей в 1-неприводимой функции $\langle \varphi' \varphi' \rangle$. Для их устранения необходимо ввести локальный контрчлен $\varphi' \partial^2 \varphi'$, который нельзя воспроизвести ренормировкой слагаемых действия (4). Устранение этих расходимостей путем ренормировки вклада случайной силы $\varphi' k^{4-d-2\epsilon} \varphi'$, предлагавшееся в [7], нарушает одно из основных требований теории ренормировки – условие обязательной локальности контрчленов [8], и потому ошибочно.

Следуя [9], рассмотрим “расширенное” действие

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} g_{10} \nu_0^3 k^{2-2\Delta-2\epsilon} \varphi' \varphi' + \frac{1}{2} g_{20} \nu_0^3 k^2 \varphi' \varphi' + \varphi' [-\nabla_t \varphi - \nu_0 k^2 \varphi]. \quad (5)$$

Здесь $\Delta \equiv d - 2$, $g_{10} \equiv D_0/\nu_0^3$ – заряд, соответствующий процедуре ренормировки при $d > 2$, g_{20} – новый “генерируемый” заряд, его реальное значение равно нулю. Действие (5) записано в импульсном представлении, при этом $\partial \rightarrow i\mathbf{k}$. В такой модели контрчлен $\varphi' \partial^2 \varphi'$ может быть учтен ренормировкой дополнительного заряда g_{20} . При этом параметр Δ играет роль добавочного регуляризатора: УФ-расходимости имеют вид полюсов по ϵ , Δ и их линейным комбинациям. Модель логарифмична при $\epsilon = \Delta = 0$, когда оба заряда g_{10} и g_{20} безразмерны.

Выполненный в [9] анализ показал, что, помимо тривиальной неподвижной точки с $g_{1*} = g_{2*} = 0$, ИК-устойчивой в области $\epsilon < 0$, $\Delta > 0$, РГ-уравнения модели (5) имеют две нетривиальные точки: “тепловую” –

$$g_{1*} = 0, \quad g_{2*} = -32\pi\Delta, \quad (6)$$

устойчивую при $\Delta < 0$, $2\epsilon + 3\Delta < 0$, и “колмогоровскую” –

$$g_{1*} = \frac{64\pi}{9} \frac{\epsilon(3\Delta + 2\epsilon)}{\epsilon + \Delta}, \quad g_{2*} = \frac{64\pi}{9} \frac{\epsilon^2}{\epsilon + \Delta}, \quad (7)$$

устойчивую при $\epsilon > 0$, $2\epsilon + 3\Delta > 0$. В интересующей нас сейчас области $\epsilon > 0$, $\Delta = 0$ устойчива лишь последняя. Ей соответствует колмогоровский спектр $E(k) \sim k^{-5/3}$ в режиме накачки энергии ($\epsilon = 2$) и $E(k) \sim k^{-3}$ в режиме накачки энтропии ($\epsilon = 3$). Отметим также, что другая точка (6) отвечает чисто локальной модели ($g_{10} = 0$), изучавшейся в [11] в связи с проблемой “длинных хвостов” и обоснованием уравнений гидродинамики при $d \leq 2$.

Обобщение модели (5) на случай слабой анизотропии может быть проведено, как и в трехмерном случае, путем введения в коррелятор случайной силы (2) единичного вектора $\mathbf{n}$, задающего выделенное направление. При этом функция $D_{ij}^f(\mathbf{k})$ в (2) может быть выбрана в виде [2, 3]

$$D_{ij}^f(\mathbf{k}) = D_0 k^{4-d-2\epsilon} \left[\left(1 + \rho_1 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) P_{ij}(\mathbf{k}) + \rho_2 \tilde{n}_i(\mathbf{k}) \tilde{n}_j(\mathbf{k}) \right]. \quad (8)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 – предполагаемые малыми параметры анизотропии (все вычисления проводятся в линейном приближении по $\rho_{1,2}$), $\tilde{n}_i(\mathbf{k}) \equiv P_{ij}(\mathbf{k}) n_j$ – построенный по $\mathbf{n}$ поперечный вектор.

Стандартный анализ показывает, что при наличии выделенного направления $\mathbf{n}$ и любом $d > 2$ для полного устранения УФ-расходимостей, кроме $\varphi' \partial^2 \varphi$, требуются новые контрчлены вида $\varphi'(\mathbf{n}\partial)^2 \varphi$, $(\mathbf{n}\varphi') \partial^2 (\mathbf{n}\varphi)$, $(\mathbf{n}\varphi')(\mathbf{n}\partial)^2 (\mathbf{n}\varphi)$ [3]. В особом случае $d = 2$ к ним добавляются, помимо изотропного $\varphi' \partial^2 \varphi'$ [9], новые, анизотропные контрчлены $\varphi'(\mathbf{n}\partial)^2 \varphi'$, $(\mathbf{n}\varphi') \partial^2 (\mathbf{n}\varphi')$, $(\mathbf{n}\varphi')(\mathbf{n}\partial)^2 (\mathbf{n}\varphi')$.

Отметим, что члены $(\mathbf{n}\varphi')(\mathbf{n}\partial)^2 (\mathbf{n}\varphi)$ и $(\mathbf{n}\varphi')(\mathbf{n}\partial)^2 (\mathbf{n}\varphi')$, имеющие более высокий порядок по $\mathbf{n}$, тем не менее не могут быть отброшены, как это делалось в [2, 6], т.к. для анализа устойчивости необходимо рассматривать все допустимые по симметрии структуры [3].

Отметим также, что непосредственно в двумерии не все эти структуры независимы. Действительно, с точностью до полных производных, которые в функционале действия выпадают после интегрирования по $\mathbf{x}$, имеем $(\mathbf{n}\varphi') \partial^2 (\mathbf{n}\varphi) = \varphi' \partial^2 \varphi - \varphi'(\mathbf{n}\partial)^2 \varphi$,

$(\mathbf{n}\varphi')\partial^2(\mathbf{n}\varphi') = \varphi'\partial^2\varphi' - \varphi'(\mathbf{n}\partial)^2\varphi'$. Это легко проверить, перейдя к скалярным потенциалам θ, θ' по формулам $\varphi_i = \varepsilon_{ik}\partial_k\theta$, $\varphi'_i = \varepsilon_{ik}\partial_k\theta'$, где ε_{ik} — полностью антисимметричный тензор второго ранга, и используя тождество $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{sp} = \delta_{is}\delta_{kp} - \delta_{ip}\delta_{ks}$. Но мы будем рассматривать задачу в размерности $d = 2 + \Delta$, обеспечив тем самым размерную регуляризацию новых УФ-расходимостей, и должны поэтому считать все эти структуры независимыми. При этом ренормированные функции Грина при $\Delta = 0$ будут фактически зависеть от четырех ренормированных зарядов u_1, u_2, u_4, u_5 (см. ниже) посредством некоторых двух функций, явный вид которых для нас несуществен.

Все содержащие $\mathbf{n}$ контрчлены, очевидно, не могут быть получены ренормировкой параметров действия (5). Поэтому для обеспечения мультипликативной ренормируемости нужно с самого начала включить в действие все необходимые вклады, обезразмеренные коэффициенты при которых будут играть роль новых зарядов. Несмотря на то что затравочные значения этих зарядов, как и заряда g_{20} , в конце вычислений полагаются равными нулю (таким образом обеспечивается согласование с исходной моделью (1)), их ренормированные значения оказываются отличными от нуля (ср. [9, 3]). В результате приходим к модели со следующим функционалом действия, записанным в импульсно-частотном представлении, когда $\partial \rightarrow i\mathbf{k}$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$:

$$\begin{aligned}
 S(\Phi) = & \frac{1}{2}\varphi'_i \left[g_{10}\nu_0^3 k^2 - 2\Delta - 2\epsilon \left(\left(1 + \rho_1 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) P_{ij} + \rho_2 \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) + \right. \\
 & + g_{20}\nu_0^3 k^2 \left(\left(1 + u_{40} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) P_{ij} + \left(u_{50} + u_{60} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) \Big] \varphi'_j + \\
 & + \varphi'_i \left[(i\omega - \nu_0 k^2) P_{ij} - \nu_0 k^2 \left(u_{10} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} P_{ij} + \left(u_{20} + u_{30} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) \right] \varphi_j + \\
 & + \frac{1}{2}\varphi'_i \varphi_j \varphi_q V_{ijq}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Действию (9) отвечает стандартная квантово-полевая теория возмущений и фейнмановская диаграммная техника. Затравочные пропагаторы $\langle \Phi\Phi \rangle_0$ получаются обращением матрицы свободной части действия и в линейном по ρ_i, u_{i0} приближении даются выражениями (перечеркнутый конец линий соответствует полю φ')

$$\begin{aligned}
 \text{---} & \equiv \langle \varphi_i \varphi_j \rangle_0 = \frac{g_{10}\nu_0^2}{2} k^{-2\Delta-2\epsilon} [G_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}) e^{-\nu_0 k^2 |t|} - G_{ij}^{(3)}(\mathbf{k}) \nu_0 k^2 |t| e^{-\nu_0 k^2 |t|}] + \\
 & + \frac{g_{20}\nu_0^2}{2} [G_{ij}^{(2)}(\mathbf{k}) e^{-\nu_0 k^2 |t|} - G_{ij}^{(3)}(\mathbf{k}) \nu_0 k^2 |t| e^{-\nu_0 k^2 |t|}], \\
 \text{---+} & \equiv \langle \varphi_i \varphi'_j \rangle_0 = \Theta(t) [P_{ij}(\mathbf{k}) e^{-\nu_0 k^2 t} - G_{ij}^{(3)}(\mathbf{k}) \nu_0 k^2 t e^{-\nu_0 k^2 t}], \\
 \text{+---} & \equiv \langle \varphi'_i \varphi'_s \rangle_0 = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}) &= P_{ij}(\mathbf{k}) \left(1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} (\rho_1 - u_{10}) \right) + \tilde{n}_i(\mathbf{k}) \tilde{n}_j(\mathbf{k}) \left(\rho_2 - u_{20} - u_{30} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right), \\
 G_{ij}^{(2)}(\mathbf{k}) &= P_{ij}(\mathbf{k}) \left(1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} (u_{40} - u_{10}) \right) + \\
 &\quad + \tilde{n}_i(\mathbf{k}) \tilde{n}_j(\mathbf{k}) \left(u_{50} - u_{20} + (u_{60} - u_{30}) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right), \\
 G_{ij}^{(3)}(\mathbf{k}) &= P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} u_{10} + \tilde{n}_i(\mathbf{k}) \tilde{n}_j(\mathbf{k}) \left(u_{20} + u_{30} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Взаимодействию соответствует вершина $-\varphi'_i(\varphi \partial) \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi'_i \varphi_j \varphi_q V_{ijq}$ с вершинным множителем

$$\begin{array}{c} + \diagup \end{array} \equiv V_{ijq} = ik_j \delta_{iq} + ik_q \delta_{ij}, \quad (12)$$

где $\mathbf{k}$ – импульс, входящий в вершину через поле φ' .

3. РГ-ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Стандартный анализ УФ-расходимостей в “расширенной” модели (9), детали которого мы для краткости опускаем (см., например, [1]), показывает, что “поверхностные” УФ-расходимости имеются лишь в 1-неприводимых функциях Грина $\langle \varphi \varphi' \rangle$ и $\langle \varphi' \varphi' \rangle$ и все необходимые для их устранения контрчлены совпадают по форме с членами действия (9). Следовательно, модель (9) является мультипликативно ренормируемой. Соответствующее ренормированное действие имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_R(\Phi) &= \frac{1}{2} \varphi'_i \left[g_1 \nu^3 \mu^2 \epsilon k^{2-2\Delta-2\epsilon} \left(\left(1 + \rho_1 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) P_{ij} + \rho_2 \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) + \right. \\
 &\quad + g_2 \nu^3 \mu^{-2\Delta} k^2 \left(\left(Z_0 + Z_4 u_4 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) P_{ij} + \left(Z_5 u_5 + Z_6 u_6 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) \Big] \varphi'_j + \\
 &\quad + \varphi'_i \left[(i\omega - Z_\nu \nu k^2) P_{ij} - \nu k^2 \left(Z_1 u_1 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} P_{ij} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(Z_2 u_2 + Z_3 u_3 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} \right) \tilde{n}_i \tilde{n}_j \right) \right] \varphi_j + \frac{1}{2} \varphi'_i \varphi_j \varphi_q V_{ijq} \quad (13)
 \end{aligned}$$

(напомним, что $\Delta \equiv d - 2$). Здесь g_i, u_i, ν – ренормированные аналоги затравочных параметров g_{0i}, u_{0i}, ν_0 , ренормировочная масса μ – дополнительный произвольный параметр ренормированной теории в схеме минимальных вычитаний, Z_i – константы ренормировки, зависящие от полностью безразмерных величин – ренормированных зарядов g_i, u_i , параметров анизотропии $\rho_{1,2}$ и регуляризаторов ϵ, Δ . Ренормированное действие (13) получается из исходного (9) с помощью следующей ренормировки параметров:

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad u_{i0} = u_i Z_{u_i}, \quad g_{10} = g_1 \mu^{2\epsilon} Z_{g_1}, \quad g_{20} = g_2 \mu^{-2\Delta} Z_{g_2}. \quad (14)$$

Константы ренормировки в (13) и (14) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_{g_2} Z_\nu^3, \\ Z_i &= Z_\nu Z_{u_i} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, \\ Z_i &= Z_{g_2} Z_\nu^3 Z_{u_i} \quad \text{для } i = 4, 5, 6, \\ Z_{g_1} &= Z_\nu^{-3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее равенство в (15) является следствием отсутствия ренормировки нелокального вклада с g_{10} в (9).

В однопетлевом приближении УФ-расходимости появляются в виде полюсов по ϵ , Δ и $\Delta + 2\epsilon$ в диаграммах и . Расходящиеся части этих диаграмм имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\text{Feynman diagram} \right]_{\text{р.ч.}}(k) &= \frac{\nu}{16\pi} [\delta_{ij} k^2 A_\nu + \delta_{ij} (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 A_1 + n_i n_j k^2 A_2 + n_i n_j (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 A_3], \\ \left[\text{Feynman diagram} \right]_{\text{р.ч.}}(k) &= \frac{\nu^3}{16\pi} [\delta_{ij} k^2 A_0 + \delta_{ij} (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 A_4 + n_i n_j k^2 A_5 + n_i n_j (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 A_6]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для коэффициентов A_i в (16) справедливо представление

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{g_1 a_i^\epsilon}{\epsilon} - \frac{g_2 a_i^\Delta}{\Delta}, \quad i = \nu, 1, 2, 3, \\ A_i &= \frac{g_1^2 a_i^{\epsilon\Delta}}{\Delta + 2\epsilon} + \frac{g_1 g_2 a_i^\epsilon}{\epsilon} - \frac{g_2^2 a_i^\Delta}{\Delta}, \quad i = 0, 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (17)$$

в котором величины $a_i^{\epsilon\Delta}$, a_i^ϵ и a_i^Δ являются функциями только зарядов g_i , u_k и параметров анизотропии $\rho_{1,2}$. Явные выражения для них приведены в приложении. Слагаемые, пропорциональные $k_i k_j$, не дают вклада в контрчлены в силу поперечности полей и поэтому в (16) опущены. В схеме минимальных вычитаний в контрчлены входят только расходящиеся части диаграмм, что приводит к следующим выражениям для констант ренормировки:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= 1 + \frac{1}{16\pi} A_\nu, \\ Z_0 &= 1 - \frac{1}{32\pi g_2} A_0, \\ Z_i &= 1 + \frac{1}{16\pi u_i} A_i \quad \text{для } i = 1, 2, 3, \\ Z_i &= 1 - \frac{1}{32\pi g_2 u_i} A_i \quad \text{для } i = 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (18)$$

Для каждой константы ренормировки Z_i определяется соответствующая аномальная размерность $\gamma_i \equiv \tilde{D}_\mu \ln Z_i$, а для каждого заряда g_i , u_i — соответствующая β -функция: $\beta_{g_i} \equiv \tilde{D}_\mu g_i$, $\beta_{u_i} \equiv \tilde{D}_\mu u_i$, где $\tilde{D}_\mu$ обозначает операцию $\mu \partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах g_{i0} , u_{i0} , ν_0 . С помощью определений и равенств (15) β -функции следующим образом выражаются через аномальные размерности:

$$\beta_{g_1} = -g_1(2\epsilon + \gamma_{g_1}), \quad \beta_{g_2} = g_2(2\Delta - \gamma_{g_2}), \quad \beta_{u_i} = -u_i \gamma_{u_i}. \quad (19)$$

В свою очередь, в силу УФ-конечности аномальных размерностей в схеме минимальных вычитаний для них получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\gamma_{g_1} &= \frac{3}{16\pi} g_1 a_\nu^\epsilon + \frac{3}{16\pi} g_2 a_\nu^\Delta, \\
\gamma_{g_2} &= \frac{1}{32\pi} \left[g_1 (a_0^\epsilon + 6a_\nu^\epsilon) + g_2 (a_0^\Delta + 6a_\nu^\Delta) + \frac{g_1^2}{g_2} a_0^{\epsilon\Delta} \right], \\
\gamma_{u_i} &= \frac{g_1}{16\pi} \left(a_\nu^\epsilon - \frac{a_i^\epsilon}{u_i} \right) + \frac{g_2}{16\pi} \left(a_\nu^\Delta - \frac{a_i^\Delta}{u_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \\
\gamma_{u_i} &= \frac{g_1}{32\pi} \left(\frac{a_i^\epsilon}{u_i} - a_0^\epsilon \right) + \frac{g_2}{32\pi} \left(\frac{a_i^\Delta}{u_i} - a_0^\Delta \right) + \frac{g_1^2}{32\pi g_2} \left(\frac{a_i^{\epsilon\Delta}}{u_i} - a_0^{\epsilon\Delta} \right), \quad i = 4, 5, 6.
\end{aligned} \tag{20}$$

Подстановка явных выражений для $a_i^{\epsilon\Delta}$, a_i^ϵ и a_i^Δ (см. приложение) в (20) приводит к следующему однопетлевому результату для β -функций:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_1} &= -2\epsilon g_1 + \frac{3g_1}{32\pi} \left[g_1 \left(1 + \rho_1 - \frac{13}{6}u_1 - \frac{1}{3}u_2 \right) + g_2 \left(1 - \frac{13}{6}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + u_4 \right) \right], \\
\beta_{g_2} &= 2\Delta g_2 - \frac{g_1^2}{32\pi} \left[1 + \frac{7}{3}\rho_1 + \frac{2}{3}\rho_2 - \frac{7}{2}u_1 - u_2 \right] + \\
&\quad + \frac{g_1 g_2}{32\pi} \left[1 + \frac{2}{3}\rho_1 - \frac{2}{3}\rho_2 + \frac{1}{2}u_1 + u_2 - \frac{7}{3}u_4 - \frac{2}{3}u_5 \right] + \\
&\quad + \frac{g_2^2}{16\pi} \left[1 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_4 - \frac{1}{3}u_5 \right], \\
\beta_{u_1} &= \frac{(g_1 + g_2)}{64\pi} \frac{(2u_1 + u_2)}{3}, \\
\beta_{u_2} &= \frac{1}{32\pi} \left[g_1 \left(\rho_1 - \rho_2 - \frac{5}{3}u_1 + \frac{13}{12}u_2 \right) - g_2 \left(\frac{5}{3}u_1 - \frac{13}{12}u_2 - u_4 + u_5 \right) \right], \\
\beta_{u_3} &= -\frac{g_1 u_3}{32\pi} - \frac{g_2 (2u_3 - 3u_6)}{64\pi}, \\
\beta_{u_4} &= \frac{(g_1 + g_2)}{32\pi g_2} \left[g_1 \left(\frac{4}{3}\rho_1 - \frac{1}{3}\rho_2 - 2u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_4 \right) - \right. \\
&\quad \left. - g_2 \left(2u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{7}{3}u_4 + \frac{1}{3}u_5 \right) \right], \\
\beta_{u_5} &= \frac{(g_1 + g_2)}{32\pi g_2} \left[g_1 \left(\frac{4}{3}\rho_1 - \frac{1}{3}\rho_2 - 2u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_5 \right) - \right. \\
&\quad \left. - g_2 \left(2u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{4}{3}u_4 - \frac{2}{3}u_5 \right) \right], \\
\beta_{u_6} &= \frac{(g_1 + g_2)}{64\pi g_2} [g_1 (2u_6 - 3u_3) + g_2 (4u_6 - 3u_3)].
\end{aligned} \tag{21}$$

Вклады, пропорциональные u_3 , u_6 , во всех β -функциях, кроме самих $\beta_{u_{3,6}}$, несущественны (см. ниже) и потому в (21) опущены.

Неподвижная точка РГ определяется системой восьми уравнений

$$\beta_{g_i}(g_{i*}, u_{i*}) = 0, \quad i = 1, 2; \quad \beta_{u_i}(g_{i*}, u_{i*}) = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \tag{22}$$

а ее ИК-устойчивость — знаком вещественной части собственных значений 8×8 -матрицы

$$\omega_{ij} = \left. \frac{\partial \beta_{g_i}}{\partial g_j} \right|_{g_i = g_{i*}}, \quad (23)$$

в данном случае g_i обозначает полный набор зарядов $g_1, g_2, u_1 - u_6$.

В приближении слабой анизотропии значения g_{k*} в функциях β_{u_i} достаточно учесть в “изотропном” приближении (6), (7). Тогда из условия $\beta_{u_{3,6}} = 0$ получаем $u_{3*} = u_{6*} = 0$ — точный результат в линейном по $\rho_{1,2}$ приближении. Он и позволяет опустить пропорциональные u_3, u_6 вклады в остальных β -функциях, но учет самих $\beta_{u_{3,6}}$ необходим для анализа устойчивости неподвижной точки. Пренебрежение ими было ошибкой работ [2, 4, 6], как отмечалось затем в [3]. Теперь из условий $\beta_{u_i} = 0$ для $i = 1, 2, 4, 5$ находим оставшиеся значения u_{i*} . Все они имеют порядок $O(\rho_{1,2})$. Наконец, из условий $\beta_{g_{1,2}} = 0$ находим поправки порядка $O(\rho_{1,2})$ к “изотропным” выражениям (6), (7).

В силу линейности β -функций (21) по параметрам анизотропии $\rho_{1,2}$ неустойчивость неподвижной точки, если она имеет место, проявляется уже при сколь угодно малых значениях $\rho_{1,2}$. Поэтому при анализе устойчивости можно положить в (23) $\rho_{1,2} = 0$. Матрица (23) в этом случае имеет блочно-треугольную структуру, следовательно, набор ее собственных значений состоит из собственных значений диагональных блоков. Первый блок образован элементами $\partial_{g_i} \beta_{g_j}$ с $g_i = \{g_1, g_2\}$ и совпадает с изотропной 2×2 -матрицей ω [9]. Тем самым устойчивость относительно слабой анизотропии оказывается дополнительным независимым условием. Два других блока соответствуют анизотропным зарядам $g_i = \{u_3, u_6\}$ (2×2 -блок) и $g_i = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ (4×4 -блок), причем последний после перехода к новым переменным $v_4 = u_4 - u_5$, $v_5 = u_4 + u_5$ также распадается на блоки: 2×2 -блок зарядов $g_i = \{u_1, u_2\}$ и два 1×1 -блока зарядов $g_i = \{v_4, v_5\}$.

Расчет показывает, что “тепловая” точка (6) остается ИК-устойчивой и в присутствии анизотропии: все собственные числа, связанные с дополнительными анизотропными зарядами, для нее пропорциональны $-\Delta$ и положительны во всей области устойчивости изотропной точки ($\Delta < 0$, $2\epsilon + 3\Delta < 0$).

Для интересующей нас сейчас “колмогоровской” точки (7) соответствующий “изотропным” зарядам $g_i = \{g_1, g_2\}$ блок матрицы ω имеет следующие собственные значения [9]:

$$\Delta + \frac{4}{3}\epsilon \pm \frac{1}{3}\sqrt{9\Delta^2 - 12\epsilon\Delta - 8\epsilon^2}. \quad (24)$$

Собственные значения блоков, связанных с “анизотропными” зарядами u_1, u_2, u_4, u_5 , в этой точке равны

$$\frac{4}{3}\epsilon, \quad \frac{1}{3}\epsilon, \quad 2\Delta + \frac{8}{3}\epsilon, \quad 2\Delta + 2\epsilon. \quad (25)$$

Наконец, собственные значения блока “малых” анизотропных зарядов u_3, u_6 имеют вид

$$\Delta + \epsilon \pm \frac{1}{3}\sqrt{9\Delta^2 + 30\epsilon\Delta + 16\epsilon^2}. \quad (26)$$

Нетрудно убедиться, что одно из значений (26) отрицательно при любых $\epsilon > 0$, $\Delta \geq 0$. Таким образом, точка (7) не является ИК-устойчивой при сколь угодно малых $\rho_{1,2}$. Это говорит о неприменимости приближения изотропной или слабоанизотропной турбулентности для модели (4), (2) в двумерном случае, т.к. малые анизотропные возмущения будут неограниченно возрастать в ИК-асимптотическом пределе.

Авторы выражают благодарность Л. Ц. Аджемяну за ряд полезных обсуждений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 95-0-5.1-30).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем явные выражения для коэффициентов $a_i^{\epsilon\Delta}$, a_i^ϵ и a_i^Δ в расходящихся частях однопетлевых диаграмм (16), (17):

$$\begin{aligned}
a_0^{\epsilon\Delta} &= \frac{1}{2} - \frac{7}{4}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{9}{32}u_3 + \frac{7}{6}\rho_1 + \frac{1}{3}\rho_2, \\
a_{4,5}^{\epsilon\Delta} &= u_1 - \frac{1}{4}u_2 - \frac{2}{3}\rho_1 + \frac{1}{6}\rho_2, \\
a_6^{\epsilon\Delta} &= \frac{3}{4}u_3, \\
a_0^\epsilon &= 1 - \frac{7}{2}u_1 - u_2 - \frac{9}{16}u_3 + \frac{7}{6}u_4 + \frac{1}{3}u_5 + \frac{3}{16}u_6 + \frac{7}{6}\rho_1 + \frac{1}{3}\rho_2, \\
a_{4,5}^\epsilon &= 2u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{2}{3}u_4 + \frac{1}{6}u_5 - \frac{2}{3}\rho_1 + \frac{1}{6}\rho_2, \\
a_6^\epsilon &= \frac{3}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_6, \\
a_0^\Delta &= \frac{1}{2} - \frac{7}{4}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{9}{32}u_3 + \frac{7}{6}u_4 + \frac{1}{3}u_5 + \frac{3}{16}u_6, \\
a_{4,5}^\Delta &= u_1 - \frac{1}{4}u_2 - \frac{2}{3}u_4 + \frac{1}{6}u_5, \\
a_6^\Delta &= \frac{3}{4}u_3 - \frac{1}{2}u_6, \\
a_\nu^\epsilon &= -\frac{1}{4} + \frac{13}{24}u_1 + \frac{1}{12}u_2 + \frac{1}{16}u_3 - \frac{1}{4}\rho_1, \\
a_1^\epsilon &= -\frac{1}{6}u_1 + \frac{1}{24}u_2 + \frac{1}{16}u_3, \\
a_2^\epsilon &= -\frac{5}{12}u_1 + \frac{7}{24}u_2 + \frac{1}{16}u_3 + \frac{1}{4}\rho_1 - \frac{1}{4}\rho_2, \\
a_3^\epsilon &= -\frac{1}{2}u_3, \\
a_\nu^\Delta &= -\frac{1}{4} + \frac{13}{24}u_1 + \frac{1}{12}u_2 + \frac{1}{16}u_3 - \frac{1}{4}u_4 - \frac{1}{64}u_6, \\
a_1^\Delta &= -\frac{1}{6}u_1 + \frac{1}{24}u_2 + \frac{1}{16}u_3 - \frac{1}{16}u_6, \\
a_2^\Delta &= -\frac{5}{12}u_1 + \frac{7}{24}u_2 + \frac{1}{16}u_3 + \frac{1}{4}u_4 - \frac{1}{4}u_5 - \frac{1}{16}u_6, \\
a_3^\Delta &= \frac{3}{8}u_6 - \frac{1}{2}u_3.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев. УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1257–1284.
- [2] R. Rubinstein, J. M. Barton. Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2987.
- [3] Т. Л. Ким, А. В. Сердюков. ТМФ. 1995. Т. 105. С. 412.
- [4] L. Ts. Adzhemyan, M. Hnatich, D. Horvath, M. Stehlik. Int. J. Mod. Phys. B. 1995. V. 9. P. 3401.
- [5] J. Buša, M. Hnatich, J. Honkonen, D. Horvath. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 381.
- [6] P. Olla. Int. J. Mod. Phys. B. 1994. V. 8. P. 581.
- [7] D. Ronis. Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 3322.
- [8] Дж. Коллинз. Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [9] J. Honkonen, M. Yu. Nalimov. Z. Phys. B. 1996. B. 99. S. 297.
- [10] R. Kraichnan. Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1417.
- [11] D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen. Phys. Rev. A. 1977. V. 16. P. 732.

Поступила в редакцию 24.XII.1996 г.

N. V. Antonov, A. V. Runov
RENORMALIZATION GROUP IN THE THEORY
OF THE TWO-DIMENSIONAL TURBULENCE:
INSTABILITY OF THE FIXED POINT
WITH RESPECT TO WEAK ANISOTROPY

Statistical model of the fully developed turbulence in the two-dimensional space is considered by means of the renormalization group method in the weak anisotropy approximation. It is shown that the corresponding fixed point of the renormalization group equations is not infrared stable, hence the weak anisotropy approximation is not valid for the description of the two-dimensional turbulence.