Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Метод классической r -матрицы и суперинтегрируемые системы,
ТМФ, 1997, том 112, номер 3, 428–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:57:17

А. В. Цыганов*

МЕТОД КЛАССИЧЕСКОЙ r -МАТРИЦЫ И СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Рассматриваются суперинтегрируемые или вырожденные системы в рамках метода классической r -матрицы. Предложенная схема построения суперинтегрируемых гамильтонианов натурального вида с полиномиальными потенциалами использует внешние автоморфизмы алгебр петель и позволяет получать новые вырожденные системы из геодезических потоков на римановых пространствах постоянной кривизны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Набор гладких функций $I_1, I_2, \dots, I_n$ на симплектическом многообразии M , $\dim M = 2n$, с заданной пуассоновой структурой называется полным и инволютивным, если функции $I_1, \dots, I_n$ функционально независимы на совместной поверхности уровня

$$M_\alpha = \{x \in M : I_k(x) = \alpha_k, k = 1, \dots, n\}$$

и все их попарные скобки Пуассона тождественно равны нулю:

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j \leq n. \quad (1.1)$$

Динамическая система с гамильтонианом H на многообразии M называется вполне интегрируемой, если существует полный и инволютивный набор интегралов движения $I_1, \dots, I_n$ для данного гамильтониана H [1]. Напомним, что функции $I_1, \dots, I_n$ являются интегралами движения, если их скобки Пуассона с гамильтонианом H равны нулю: $\{H, I_j\} = 0, j \leq n$.

Суперинтегрируемой или вырожденной системой с гамильтонианом H на многообразии M , $\dim M = 2n$, будем называть динамическую систему, обладающую более чем n независимыми интегралами движения $\{I_j\}_{j=1}^k, k > n$, причем n из них можно выбрать в инволюции (1.1) [1–3]. Полный набор интегралов движения $\{I_j\}_{j=1}^k$ генерирует конечномерную алгебру симметрий гамильтониана H , которая является полиномиальной ассоциативной алгеброй [3–5]. Основными примерами подобных n -мерных систем со “скрытой” симметрией являются движение по геодезическим, изотропный осциллятор [1, 5], задача Кеплера [5, 3] и системы типа Калоджеро–Мозера с рациональными потенциалами [6].

* Научно-исследовательский институт физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.niif.spb.su

В данной статье изучаются конечномерные суперинтегрируемые системы на орбитах коприсоединенного представления групп Ли. Пусть $\mathfrak{g}^*$ — пространство, дуальное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, снабженное обычной скобкой Ли–Пуассона [1]. Напомним, что скобка Ли–Пуассона в $\mathfrak{g}^*$ определяется условием, что для линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, т.е. для элементов алгебры $\mathfrak{g}$, она совпадает со скобкой Ли в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом $H \in \mathfrak{g}^*$, задаваемую уравнением

$$\dot{x} = \{H, x\} = -(\text{ad}_{\nabla H}^*) \cdot x, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad (1.2)$$

где $\nabla H \in \mathfrak{g}$ — градиент гамильтониана H и ad^* — оператор коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если на алгебре $\mathfrak{g}$ существует невырожденная, инвариантная относительно присоединенного представления билинейная форма, позволяющая отождествить $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ и ad с ad^* , то уравнения движения принимают вид

$$\dot{x} = \{H, x\} = -(\text{ad}_{\nabla H}) \cdot x, \quad x \in \mathfrak{g}. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) (или (1.3)) задают динамику в пространстве $\mathfrak{g}^*$ (соответственно в пространстве $\mathfrak{g}$). Во всех последующих рассмотрениях пространство $\mathfrak{g}^*$ отождествляется с $\mathfrak{g}$ и коприсоединенное представление отождествляется с присоединенным.

Пуассонова структура на фазовом пространстве $\mathfrak{g}$, вообще говоря, вырождена. Ее аннулятор совпадает с алгеброй функций Казимира $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$, состоящих из функций $\tau_j(x)$ таких, что

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}} \cdot \tau_j(x) = 0, \quad \tau_j(x) \in \mathbf{I}(\mathfrak{g}). \quad (1.4)$$

Функции из $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ являются инвариантами коприсоединенного (присоединенного) представления и обладают тем свойством, что $\{\tau_j(x), h(x)\} = 0$ для произвольной функции $h(x)$. Ограничение скобки Ли–Пуассона на орбиты $\tau_j(x) = \alpha_j$ этого действия невырождено, так что фазовое пространство отождествляется с пуассоновым подмногообразием в $\mathfrak{g}^*$, которое является орбитой коприсоединенного представления (или же объединением ряда таких орбит).

В настоящее время известно несколько методов построения инволютивных наборов функций на дуальном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. обзоры [7, 5, 8]). Во многих интересных случаях получающиеся при этом гамильтоновы системы оказываются вполне интегрируемыми. Однако все эти методы, например метод сдвига аргумента, схема Адлера–Костанта, метод гамильтоновой редукции и метод классической r -матрицы, предназначены, в первую очередь, для построения инволютивных семейств интегралов движения.

Настоящая работа посвящена алгебраической схеме построения суперинтегрируемых гамильтонианов H и семейства из более чем n интегралов движения, только часть из которых находится в инволюции, в рамках метода классической r -матрицы. При этом вопросы замкнутости классических траекторий и делимости переменных в соответствующем уравнении Гамильтона–Якоби не затрагиваются. Второй целью данной работы является построение новых примеров суперинтегрируемых систем натурального вида на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с рациональными потенциалами.

2. МЕТОД КЛАССИЧЕСКОЙ r -МАТРИЦЫ

В этом разделе мы напомним необходимые элементы теоретико-групповой схемы классической r -матрицы, которые далее будут использованы при построении суперинтегрируемых систем. Все необходимые детали могут быть найдены в [7, 8].

Классической r -матрицей называется линейный оператор $R \in \text{End } \mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}$ такой, что скобка

$$[X, Y]_R = \frac{1}{2}([RX, Y] + [X, RY]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (2.1)$$

удовлетворяет тождеству Якоби и, следовательно, задает вторую структуру алгебры Ли в пространстве $\mathfrak{g}$. Эта структура порождает в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ вторую скобку Ли–Пуассона, которую мы будем называть r -скобкой. Мотивировкой введения двух скобок Ли–Пуассона служит следующий результат. Пусть $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ – кольцо функций Казимира стандартной пуассоновой структуры в $\mathfrak{g}^*$, т.е. кольцо инвариантов ее коприсоединенного представления. Оказывается, что функции из $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ находятся в инволюции относительно r -скобки на $\mathfrak{g}^*$ [8]. Уравнения движения для элемента $L \in \mathfrak{g}^*$, задаваемые функцией $\tau \in \mathbf{I}(\mathfrak{g})$ с помощью r -скобки, имеют вид

$$\frac{dL}{dt} = -(\text{ad}_A^*)_g \cdot L, \quad A = \frac{1}{2}R(d\tau(L)), \quad (2.2)$$

где ad_g^* обозначает коприсоединенное действие в $\mathfrak{g}^*$ относительно исходной скобки Ли. Если в алгебре $\mathfrak{g}$ существует невырожденная инвариантная билинейная форма, то уравнения (2.2) принимают коммутаторный лагранжев вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, A]. \quad (2.3)$$

В методе классической r -матрицы, тесно связанном со схемой Адлера–Костанта, при построении интегрируемых уравнений в $\mathfrak{g}^*$ обычно выделяют три этапа [8]:

- построение r -матриц, задающих на $\mathfrak{g}$ структуру двойной алгебры Ли;
- нахождение ад-инвариантных функций алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. функций Казимира;
- описание конечномерных орбит для r -скобки.

Очевидно, что суперинтегрируемые системы являются частным случаем вполне интегрируемых систем и поэтому их естественно рассматривать в рамках стандартной схемы. Так как для любой r -матрицы функции из $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ находятся в инволюции относительно r -скобки и порождают только инволютивные семейства интегралов движения, то мы не будем рассматривать первый этап, связанный с поиском r -матриц. Нам необходимо найти в рамках следующих этапов механизм появления особенных гамильтонианов, обладающих дополнительными интегралами, которые не коммутируют относительно скобки Пуассона между собой.

Следуя работе [9], рассмотрим подробнее метод построения ад-инвариантных функций на $\mathfrak{g}$ (или $\mathfrak{g}^*$), которые являются центральными для стандартной скобки Ли–Пуассона. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, а $T(\mathfrak{g})$ – тензорная алгебра над $\mathfrak{g}$:

$$T = T^0 \oplus T^1 \oplus T^2 \oplus \dots, \quad T^m = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g} \quad (m \text{ раз}) \quad (2.4)$$

и J – двусторонний идеал, порожденный элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ассоциативная алгебра $U(\mathfrak{g}) = T/J$ называется универсальной обертывающей алгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Алгебра $U(\mathfrak{g})$ фильтрована подпространствами $U_m(\mathfrak{g})$ ($m = 0, 1, \dots$), где (для каждого фиксированного m) $U_m(\mathfrak{g})$ – линейная оболочка одночленов

$$x_0 = 1, \quad x_{i_1 i_2 \dots i_k} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad k \leq m. \quad (2.5)$$

В результате разложения $T(\mathfrak{g}) = J \oplus S(\mathfrak{g})$ алгебра $U(\mathfrak{g})$ как векторное пространство изоморфна симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})$ (теорема Биркгофа–Витта). Отображение $w: S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ определяется как линейное отображение, переводящее одночлены (2.5) в полиномы,

$$w(x_1 x_2 \dots x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} P_{\pi} x_1 x_2 \dots x_m = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(m)}, \quad (2.6)$$

где P_{π} – оператор перестановки индексов, отвечающий некоторой произвольной схеме Юнга π . Отображение w называется отображением симметризации и является изоморфизмом $S(\mathfrak{g})$ на $U(\mathfrak{g})$.

Присоединенное представление $D = \text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ в алгебре $\mathfrak{g}$ однозначно продолжается до дифференцирования каждой из алгебр $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$. Отображение симметризации сплетает присоединенные представления в $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$. Заметим, что подпространства $U_m(\mathfrak{g})$ инвариантны относительно присоединенного представления в $U(\mathfrak{g})$:

$$D'(U_m(\mathfrak{g})) \subset U_m(\mathfrak{g}). \quad (2.7)$$

Из этого следует, например, что для полиномиальных интегралов движения $\{I_j\}_{j=1}^k$ алгебра симметрий гамильтониана является подалгеброй $U_m(\mathfrak{g})$ при некотором m .

Кольцо функций Казимира $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ – центр алгебры $U(\mathfrak{g})$, т.е. совпадает с множеством всех $\tau \in U(\mathfrak{g})$, перестановочных с каждым элементом $x \in U(\mathfrak{g})$ (1.4). Отображение симметризации (2.6) сводит описание $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ к описанию ad -инвариантов в коммутативной алгебре $S(\mathfrak{g})$ [9].

В методе классической r -матрицы наиболее интересные примеры лагранжевых уравнений – уравнения со спектральным параметром – связаны с аффинными алгебрами Ли (алгебрами петель) $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ [7, 8, 10].

Алгебра $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ может быть реализована в терминах “подстилающей” простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [11], как алгебра полиномов Лорана переменной λ с коэффициентами в $\mathfrak{g}$,

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda) = \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] = \left\{ x(\lambda) = \sum_i x \lambda^i, \quad x \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Коммутатор в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ задается формулой $[x \lambda^i, y \lambda^j] = [x, y] \lambda^{i+j}$.

Обычно при построении ad -инвариантов алгебры петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ используют следующий гомоморфизм алгебр [11]:

$$U(\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)) \rightarrow \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes U(\mathfrak{g}).$$

В этом случае кольцо ад-инвариантов алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ определяется по правилу

$$\tau_{j,\phi} = \text{Res}_{\lambda=0} \phi(\lambda) \cdot \tau_j(x(\lambda)), \quad \tau_j(x) \in \mathbf{I}(\mathfrak{g}), \quad \phi(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}], \quad (2.8)$$

где $\phi(\lambda)$ – функция спектрального параметра λ , а $\tau_j(x)$ – ад-инварианты алгебры $\mathfrak{g}$ [8].

Для построения суперинтегрируемых систем мы будем использовать другое определение обертывающей алгебры для алгебры петель. Введем аналог тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ (2.4) по правилу

$$\begin{aligned} T(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots) &= T^0 \oplus T^1 \oplus T^2 \oplus \dots, \\ T^m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu) &= \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda) \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \nu) \quad (m \text{ раз}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

и каноническую фильтрацию соответствующей алгебры $U(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots)$ подпространствами $U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$. Эти подпространства определяются как линейная оболочка рядов Лорана от m независимых переменных (спектральных параметров) с коэффициентами в $U_m(\mathfrak{g})$ (2.5):

$$x_{i_1 i_2 \dots i_k}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k} \lambda^{j_1} \mu^{j_2} \dots \nu^{j_k}, \quad k \leq m, \quad x_{i_1 i_2 \dots i_k} \in U_m(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим стандартные вложения элементов $L(\lambda)$ из алгебры петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ в ассоциативные подалгебры $U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$ с единицей

$$L_j(\lambda_j) = \text{id}_1 \otimes \dots \otimes \text{id}_{j-1} \otimes L(\lambda_j) \otimes \text{id}_{j+1} \otimes \dots \otimes \text{id}_m \in U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu). \quad (2.10)$$

Нам также понадобятся произведения этих вложений

$$L_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(k)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{n=1}^k L_{j_n}(\lambda_{j_n}), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.11)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \dots, \quad \lambda_m = \nu,$$

$$L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = L(\lambda) \otimes L(\mu) \otimes \dots \otimes L(\nu) \quad (m \text{ раз}). \quad (2.12)$$

Индексы j_n в (2.10) и (2.11) указывают, в какой из компонент тензорного произведения (2.9) элемент $L(\lambda_j)$ действует нетривиально. Скобки Ли–Пуассона для элементов из алгебр $U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$ определяются скобками в “подстилающих” алгебрах $U_m(\mathfrak{g})$.

Как обычно, отождествим $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ и запишем линейные r -скобки (2.1) в тензорном виде [7, 10]

$$\begin{aligned} \{L_1(\lambda), L_2(\mu)\} &= [r_{12}(\lambda, \mu), L_1(\lambda)] - [r_{21}(\lambda, \mu), L_2(\mu)], \\ r_{21}(\lambda, \mu) &= P_{12} r_{12}(\lambda, \mu) P_{12}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где P_{12} – оператор перестановки в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda) \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ и $r_{ij}(\lambda, \mu)$ – ядра соответствующих операторов R и R^* в (2.1). Мы не будем пока выписывать эти ядра в явном виде, заметим лишь, что для скрученных аффинных алгебр соответствующие r -скобки имеют тот же самый вид [7, 8, 10].

Для полиномиальных элементов $L_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(k)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ формулы для скобок Пуассона уже не столь элегантны, как (2.13), хотя и представимы в виде “обобщенной” r -матричной алгебры. Например, выпишем несколько первых скобок:

$$\{L_{12}(\lambda, \mu), L_3(\nu)\} = [r_{13}(\lambda, \nu) + r_{23}(\mu, \nu), L_{12}(\lambda, \mu)] - [r_{31}(\lambda, \nu), L_{23}(\mu, \nu)] - [r_{23}(\mu, \nu), L_{13}(\lambda, \nu)], \quad (2.14)$$

где $r_{ij}(\lambda_i, \lambda_j)$ — r -матрицы, действующие нетривиально в соответствующих подпространствах в $T(\mathfrak{g}, \lambda, \dots)$ (2.9), и

$$\{L_{12}(\lambda, \mu), L_{34}(\nu, \eta)\} = [r^{(1)}(\lambda, \mu, \nu, \eta), L_1(\lambda)] + [r^{(2)}(\lambda, \mu, \nu, \eta), L_2(\mu)] - [r^{(3)}(\lambda, \mu, \nu, \eta), L_3(\nu)] - [r^{(4)}(\lambda, \mu, \nu, \eta), L_4(\eta)], \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} r^{(1)}(\lambda, \mu, \nu, \eta) &= \tilde{r}(\lambda, \mu, \nu, \eta) + P_{34}\tilde{r}(\lambda, \mu, \eta, \nu)P_{34}, \\ r^{(2)}(\lambda, \mu, \nu, \eta) &= P_{12}r^{(1)}(\mu, \lambda, \nu, \eta)P_{12}, \\ r^{(3)}(\lambda, \mu, \nu, \eta) &= P_{13}[\tilde{r}(\lambda, \mu, \nu, \eta) + P_{12}\tilde{r}(\mu, \lambda, \nu, \eta)P_{12}]P_{13}, \\ r^{(4)}(\lambda, \mu, \nu, \eta) &= P_{34}r^{(3)}(\lambda, \mu, \eta, \nu)P_{34}, \\ \tilde{r}(\lambda, \mu, \nu, \eta) &= r_{13}(\lambda, \nu)L_{24}(\mu, \eta). \end{aligned}$$

Здесь P_{ij} — операторы парных перестановок в тензорном произведении $T_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$ (2.9). Заметим, что “обобщенные” r -матрицы в (2.15) зависят от динамических переменных.

Инволютивные семейства интегралов движения вполне интегрируемых систем полностью определяются ад-инвариантами (2.8) и линейной r -скобкой (2.13) [7, 8]. Суперинтегрируемые системы имеют большее количество интегралов, только часть из которых находится в инволюции. Для изучения этих систем нам потребуется рассмотреть ад-инварианты алгебры $U(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots)$, используя аналог отображения симметризации (2.6) и более сложные полиномиальные вложения $L_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(k)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ (2.11), (2.12).

3. ВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ НА АЛГЕБРЕ $sl(n, \mathbb{C})$

Скобки Пуассона для заданных интегрируемых моделей представляют собой реализацию r -скобок (2.13) для конкретного матричного представления данной алгебры $\mathfrak{g}$, причем пространство представления играет роль вспомогательного пространства [7]. Рассмотрим сначала рациональные r -матрицы, ограничившись для простоты случаем алгебры $sl(n, \mathbb{C})$ в фундаментальном представлении.

Элемент $L(\lambda)$ алгебры петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \lambda)$ представляет собой $n \times n$ -матрицу во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^n$, матричные элементы которой являются рациональными функциями переменной λ . Выберем обычный базис ад-инвариантных функций для алгебры $sl(n, \mathbb{C})$:

$$\tau_k(\lambda) = \tau_k(L(\lambda)) = \frac{1}{k} \operatorname{tr} L^k(\lambda), \quad k \leq n. \quad (3.1)$$

Семейство интегралов движения в инволюции порождается функциями $\tau_k(\lambda)$

$$I_{i,k}(L) = \Phi_\lambda^{(i)}(\tau_k(\lambda)), \quad (3.2)$$

где $\Phi_\lambda^{(i)}$ – набор линейных функционалов, задающий семейство независимых интегралов движения. Например, пусть

$$\Phi_\lambda^{(i)}(z) = \text{Res}|_{\lambda=0}(\phi_i(\lambda) \cdot z), \quad \phi(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}], \quad (3.3)$$

где $\phi_i(\lambda)$ – функции только переменной λ [7, 8]. При этом интегралы $I_{i,k}$ (3.2) являются полиномами порядка k на алгебре $\mathfrak{g}$, так что $I_{i,k} \in U_k(\mathfrak{g})$.

Уравнение Лакса (2.2) относительно гамильтониана $I_{i,k}$ имеет вид

$$\frac{dL(\mu)}{dt} = \{I_{i,k}, L(\mu)\} = [L(\mu), A_{i,k}(\mu)]. \quad (3.4)$$

Матрица $A_{i,k}(\mu)$ задается r -матрицей по формуле (2.2)

$$A_{i,k}(\mu) = \Phi_\lambda^{(i)} \text{tr}_1[r_{21}(\lambda, \mu) L_1^{k-1}(\lambda)], \quad (3.5)$$

где tr_1 – след по первому вспомогательному пространству в $V^{(2)}$ (3.6).

Для описания вложений (2.11) элемента алгебры петель $L(\lambda)$ в подалгебры $U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$ введем расширенное вспомогательное пространство

$$V^{(m)} = \bigotimes_{i=1}^m V_i = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m, \quad V_i \simeq \mathbb{C}^n. \quad (3.6)$$

Элементы $L_j(\lambda_j)$ (2.10) и $L_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(k)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ (2.11) из подалгебр $U_m(\mathfrak{g}, \lambda, \mu, \dots, \nu)$ представляют собой $n^m \times n^m$ -матрицы, действующие в пространстве $V^{(m)}$, для построения которых используется обычное внешнее произведение матриц

$$L_j(\lambda_j) = I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes L(\lambda_j) \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_m, \\ L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = \prod_{j=1}^m L_j(\lambda_j), \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \dots, \quad \lambda_m = \nu, \quad (3.7)$$

где I – единичная $n \times n$ -матрица. Индекс j в (3.7) указывает, в каком из подпространств V_{j_n} полного пространства $V^{(m)}$ матрица $L(\lambda_j)$ действует нетривиально.

Уравнения движения для матриц $L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ имеют также коммутаторный лаксов вид

$$\frac{d}{dt} L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = [L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu), A^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)], \quad (3.8)$$

где вторая матрица

$$A^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = \sum_{j=1}^m A_j(\lambda_j), \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \dots, \quad \lambda_m = \nu, \quad (3.9)$$

является суммой матриц $A_j(\lambda_j)$, действующих в расширенном вспомогательном пространстве $V^{(m)}$. Как и прежде, алгебраические инварианты матриц $L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ порождают инволютивное семейство интегралов движения.

Для построения специальных суперинтегрируемых гамильтонианов рассмотрим аналог отображения симметризации w (2.6). Введем семейство матриц $L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ по правилу

$$L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = P_\pi L^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = P_\pi L_1(\lambda) L_2(\mu) \dots L_m(\nu), \quad (3.10)$$

где P_π — матрица перестановки в $V^{(m)}$ (3.6), определяемая равенствами

$$P_\pi(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_m) = x_{\pi(1)} \otimes x_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(m)} \quad (3.11)$$

для любых векторов x_j из $\mathbb{C}^n$ и

$$P_\pi \cdot A_1 B_2 \dots D_m = A_{\pi(1)} B_{\pi(2)} \dots D_{\pi(m)} \cdot P_\pi, \quad P_\pi^2 = I \quad (3.12)$$

для любых $n \times n$ -матриц $A, B, \dots, D$, вложенных в пространство $V^{(m)}$ по правилу (3.7). При этом перестановка индексов в (3.11) и (3.12) отвечает некоторой схеме Юнга π [12].

Динамика матриц $L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ задается уравнением

$$\frac{d}{dt} L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = L^{(m, \pi)} A^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) - A^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) L^{(m, \pi)}, \quad (3.13)$$

где матрица $A^{(m)}$ определена формулой (3.9), а матрица $A^{(m, \pi)}$ отличается от нее перестановкой спектральных параметров, задаваемой схемой Юнга π :

$$A^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = P_\pi A^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) P_\pi = \sum_{j=1}^m A_j(\lambda_{\pi(j)}), \quad (3.14)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \dots, \quad \lambda_m = \nu.$$

Уравнение (3.13) приобретает коммутаторный лаксов вид в том и только том случае, если

$$A^{(m)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = A^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu) \iff A(\lambda_j) = A(\lambda_{\pi(j)}). \quad (3.15)$$

При выполнении этого условия семейство интегралов движения порождается функциями

$$\begin{aligned} s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu) &= \frac{1}{m} \operatorname{tr}_{(m)} L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu), \\ \frac{d}{dt} s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\operatorname{tr}_{(m)}$ обозначает матричный след в расширенном вспомогательном пространстве $V^{(m)}$.

Очевидно, что условие (3.15) выполняется для любого из гамильтонианов $I_{i, k}$ (3.2), если все спектральные параметры равны между собой:

$$\lambda = \lambda_j = \lambda_{\pi(j)}, \quad j = 1, \dots, n \quad \forall \pi. \quad (3.17)$$

В этом случае функции

$$s_m(\lambda) = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_{(m)} L^{(m,\pi)}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_{(m)} P_\pi L(\lambda) \otimes L(\lambda) \otimes \dots \otimes L(\lambda) \quad (3.18)$$

образуют другой, отличный от (3.1), базис ад-инвариантных функций, построенный по внешним степеням матрицы $L(\lambda)$. Симметрические функции $s_m(\lambda)$ выражаются через симметрические функции $\tau_m(\lambda)$ по формулам Ньютона [12] и, как и прежде, порождают только инволютивные семейства интегралов движения.

Кроме этого, условие (3.15) выполняется для специальных суперинтегрируемых гамильтонианов H , которым отвечают независимые от спектрального параметра лагранжевы матрицы $A_{i,m}(\mu)$ в уравнении (3.4)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} A_{i,m}(\mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_\lambda^{(i)} \operatorname{tr}_1 [r_{21}(\lambda, \mu) L_1^{m-1}(\lambda)] = 0.$$

Заметим, что матрица $A_{i,m}(\mu)$ зависит от спектрального параметра μ только через r -матрицу и поэтому постоянная в спектральном смысле матрица $A_{i,m}(\mu)$ и соответствующий гамильтониан связаны с сингулярными точками r -матрицы.

Для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ в фундаментальном представлении стандартная рациональная r -матрица имеет вид

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{P_{12}}{\lambda - \mu}, \quad (3.19)$$

где P_{12} — оператор перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Если мы рассматриваем выделенный гамильтониан H , определяемый по правилу (3.2), (3.3) с линейным функционалом вида

$$\Phi_\lambda(z) = -\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (\phi(\lambda) \cdot z), \quad (3.20)$$

где $\phi(\lambda)$ — функция только переменной λ , то вторая матрица в уравнении Лакса (3.4)

$$A = \operatorname{tr}_1 [P_{12} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) L_1^{m-1}(\lambda)] \quad (3.21)$$

не зависит от спектрального параметра.

Более того, если один из инвариантных полиномов $\tau_j(\lambda)$ (3.1) имеет нетривиальный на фазовом пространстве вычет в точке $\lambda = \infty$:

$$H = -\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} \phi(\lambda) \tau_m(\lambda) \quad (3.22)$$

(который в этом случае выбирается нами как суперинтегрируемый гамильтониан), то соответствующая матрица A (3.21) не равна нулю и не зависит от спектрального параметра. В этом случае сингулярная точка $\lambda = \infty$ рациональной r -матрицы (3.19) рассматривается нами как точка, порождающая суперинтегрируемую или вырожденную гамильтонову систему. Полный набор интегралов движения генерируется функциями

$$s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu) = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_{(m)} L^{(m,\pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu), \quad (3.23)$$

которые находятся в инволюции с гамильтонианом

$$\{H, s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu)\} = 0.$$

Заметим, что функции s_m^{π} могут не коммутировать между собой относительно скобки Пуассона

$$\{s_m^{\pi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), s_k^{\pi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)\} \neq 0, \quad (3.24)$$

и поэтому эти функции могут порождать неинволютивные семейства интегралов движения. Все скобки для функции s_m^{π} и соответствующих интегралов движения легко восстанавливаются по полиномиальным скобкам Пуассона вида (2.14), (2.15) для матриц $L^{(m)}$.

Как обычно, уравнения движения линеаризуются на многообразии Якоби алгебраической кривой, определенной уравнением

$$C(z, \lambda) = \det(zI + L(\lambda)) = 0. \quad (3.25)$$

Полный набор интегралов движения задается набором алгебраических поверхностей

$$C(z, \lambda, \mu, \dots, \nu) = \det(zI + L^{(m, \pi)}(\lambda, \mu, \dots, \nu)) = 0, \quad m \leq n, \quad \forall \pi. \quad (3.26)$$

Рассмотрим теперь тригонометрические и эллиптические r -матрицы, связанные со скрученными аффинными алгебрами [13, 7, 8], такие, что

$$\begin{aligned} r_{12}(\lambda, \mu) &= r_{12}(\lambda - \mu) = -r_{21}(\mu - \lambda), \\ r_{12}(\lambda - \mu) &= \frac{P_{12}}{\lambda - \mu} + O(1), \quad P_{12}x \otimes y = y \otimes x. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Все эти матрицы имеют полюс по λ в точке $\lambda = \mu$. В своей области определения рациональная r -матрица (3.19) имеет правильную точку $\lambda = \infty$, причем ненулевой вычет в этой точке не зависит от второго спектрального параметра μ , с чем, как мы видели, связано появление вырожденных гамильтонианов. Для тригонометрических и эллиптических матриц можно также предложить подобную конструкцию суперинтегрируемых систем.

Нетрудно видеть, что уравнения Лакса (3.4) и r -скобки (2.13) ковариантны относительно преобразований подобия

$$L \rightarrow U^{-1}LU, \quad A \rightarrow U^{-1}AU, \quad r_{ij} \rightarrow U_1^{-1}U_2^{-1}r_{ij}U_1U_2, \quad (3.28)$$

где мы будем ограничиваться постоянными на фазовом пространстве матрицами U . Преобразование подобия (3.28) позволяет ввести дополнительные полюсы в r -матрицы при условии, что матрица U в (3.28) зависит от спектрального параметра. В этом случае преобразование (3.28) действует на производящие функции $s_m^{\pi}(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ по правилу

$$s_m^{\pi}(\lambda, \mu, \dots, \nu) \rightarrow s_m^{\pi}(\lambda, \mu, \dots, \nu) = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_{(m)} [Z_{\pi} L(\lambda) \otimes L(\mu) \otimes \dots \otimes L(\nu)], \quad (3.29)$$

где обычный оператор перестановки P_{π} в (3.18) заменяется матрицей

$$Z_{\pi} = [U(\lambda) \otimes U(\mu) \otimes \dots \otimes U(\nu)]^{-1} \cdot P_{\pi} \cdot U(\lambda) \otimes U(\mu) \otimes \dots \otimes U(\nu). \quad (3.30)$$

Заметим, что для эквивалентных спектральных параметров симметрические функции $s_m(\lambda)$ (3.18) не изменяются при преобразовании подобия (3.28).

В качестве примера рассмотрим эллиптическую r -матрицу для алгебры $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(sl(2), \sigma)$. Чтобы сохранить преемственность обозначений с работой [14], мы будем использовать тета-функции Якоби модуля $k \in (0, 1)$. Решетку с периодами $2K$ и $2iK'$, где K и K' – полные эллиптические интегралы, соответствующие модулю k , будем обозначать Γ . Зададим сначала стандартную r -матрицу [7, 14]

$$r(\lambda - \mu) = \sum_{k=1}^3 w_k(\lambda - \mu) \sigma_k \otimes \sigma_k, \quad (3.31)$$

где σ_k – матрицы Паули и

$$w_1(\lambda) = \frac{\Theta'_{11}(0, k) \Theta_{10}(\lambda, k)}{\Theta_{10}(0, k) \Theta_{11}(\lambda, k)}, \quad w_2(\lambda) = \frac{\Theta'_{11}(0, k) \Theta_{00}(\lambda, k)}{\Theta_{00}(0, k) \Theta_{11}(\lambda, k)}, \quad w_3(\lambda) = \frac{\Theta'_{11}(0, k) \Theta_{01}(\lambda, k)}{\Theta_{01}(0, k) \Theta_{11}(\lambda, k)}.$$

Функция $r(\lambda - \mu)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ и имеет простые полюсы при $\lambda = \mu \pmod{\Gamma}$. В работе [14] для разделения переменных в модели, связанной с квадратичной r -матричной алгеброй, было предложено преобразование подобия

$$\rho(\lambda, \mu) = U_{12}^{-1}(\lambda, \mu, \lambda_\infty) r(\lambda - \mu) U_{12}(\lambda, \mu, \lambda_\infty), \\ U_{12}(\lambda, \mu, \lambda_\infty) = U_1(\lambda - \lambda_\infty + K) U_2(\mu - \lambda_\infty + K)$$

с матрицей $U(\lambda)$ вида

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} \Theta_{01} & \Theta_{00} \\ -\Theta_{00} & -\Theta_{01} \end{pmatrix} (\xi, \tilde{k}), \quad \lambda = \frac{2\xi}{1+k}, \quad \tilde{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad (3.32)$$

где λ_∞ – произвольная точка в фундаментальной области $\mathbb{C}/\Gamma$. Более точно,

$$\rho(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^3 w_j(\lambda - \mu, k) \sigma_j \otimes \sigma_j + \\ + [w_3(\mu - \lambda_\infty, k) - w_3(\lambda - \lambda_\infty, k) + w_0] \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \\ + iw(\mu - \lambda_\infty, k) \sigma_3 \otimes \sigma_2 - iw(\lambda - \lambda_\infty, k) \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ w(\lambda, k) \equiv w_1(\lambda, k) = w_2(\lambda, k) = \frac{\Theta'_{11} \Theta_{10}(\lambda, k)}{\Theta_{10} \Theta_{11}(\lambda, k)}, \quad w_3(\lambda) = \frac{\Theta'_{11}(\lambda, k)}{\Theta_{11}(\lambda, k)}, \quad (3.33)$$

а w_0 – некая константа, точное значение которой для нас несущественно. Полюсы функции $\rho(\lambda, \mu)$ по переменной λ находятся в точках

$$\lambda = \mu \pmod{\Gamma}, \quad \text{Res}|_{\lambda=\mu} \rho(\lambda, \mu) = P_{12},$$

возникающих из r -матрицы (3.31), и в точках

$$\lambda = \lambda_\infty \pmod{\Gamma}, \quad \text{Res}|_{\lambda=\lambda_\infty} \rho(\lambda, \mu) = Z = (\sigma_3 + \sigma_- + \sigma_+) \otimes \sigma_3, \quad (3.34)$$

являющихся точками вырождения матрицы $U(\lambda)$ из (3.32) [14].

Итак, мы ввели в r -матрицу дополнительные полюсы, которые не зависят от второго спектрального параметра, и теперь можем рассмотреть орбиты новой r -матрицы $\rho(\lambda, \mu)$. Если найдется орбита $L(\lambda)$ такая, что матрица

$$A = \text{tr}_1 \left[Z \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\infty} \phi(\lambda) L(\lambda) \right] \neq 0,$$

где матрица Z определена в (3.34), не зависит от спектрального параметра и не равна нулю, то соответствующий гамильтониан

$$H = \text{Res} \Big|_{\lambda=\lambda_\infty} \text{tr} [\phi(\lambda) L^2(\lambda)]$$

является суперинтегрируемым.

Таким образом, мы подошли к третьему этапу в методе классической r -матрицы, т.е. к построению конечномерных орбит r -матрицы, имеющих интересные механические интерпретации.

4. ПРИМЕРЫ

В качестве первого примера рассмотрим магнетик Годена [15]. Определим фазовое пространство системы как объединение M орбит коприсоединенного действия алгебры $sl(N)^*$. Динамические переменные $X_{ij}^{(m)}$ ($m = 1, \dots, M$, $i, j = 1, \dots, N$) на этом пространстве удовлетворяют следующим скобкам Ли–Пуассона:

$$\{X_{ij}^{(m)}, X_{kl}^{(n)}\} = \delta_{mn} (X_{il}^{(m)} \delta_{jk} - X_{kj}^{(m)} \delta_{il}). \quad (4.1)$$

Необходимые орбиты выделяются набором уравнений

$$t_k^{(m)} = k^{-1} \text{tr} (X^{(m)})^k \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (4.2)$$

Скобки Ли–Пуассона (4.1) не вырождены на пуассоновом подмногообразии (4.2) размерности $n = MN(N-1)/2$ для случая орбит общего положения, когда все $t_k^{(m)}$ различны.

Выделяя некоторый постоянный элемент $Z \in sl(N)$, введем матрицу Лакса $L(\lambda)$ из $\mathcal{L}(sl(N), \lambda)$:

$$L(\lambda) = Z + \sum_{m=1}^M \frac{X^{(m)}}{\lambda - \delta_m}, \quad (4.3)$$

где $\{\delta_m\}_{m=1}^M$ – набор произвольных постоянных. Матрица $L(\lambda)$ (4.3) удовлетворяет скобкам Пуассона (2.13) с рациональной r -матрицей (3.19) [7, 8]. Базисные функции $\tau_k(\lambda)$ (3.1) являются мероморфными функциями переменной λ :

$$\tau_k(\lambda) = \xi_k + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^k \frac{I_{m,k}^j}{(\lambda - \delta_m)^j},$$

где $\xi_k = k^{-1} \text{tr} Z^k$ и $I_{m,k}^k = t_k^{(m)}$ – фиксированные постоянные. Оставшиеся вычеты $I_{m,k}^j$ образуют инволютивное семейство из $n = MN(N-1)/2$ независимых интегралов

движения. В этом семействе можно выделить специальное подмножество суперинтегрируемых гамильтонианов

$$H^{(k)} = -\text{Res}\big|_{\lambda=\infty} \tau_k(\lambda) = \sum_{m=1}^M \text{Res}\big|_{\lambda=\delta_m} \tau_k(\lambda),$$

связанных с сингулярной точкой $\lambda = \infty$ в рациональной r -матрице (3.19). Гамильтонианы $H^{(k)}$ не вырождены, и соответствующие вторые лаксовы матрицы определяются выделенной в (4.3) матрицей Z :

$$A^{(k)} = Z^{k-1}.$$

Используя производящие функции $s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ из (3.23), определим дополнительные интегралы движения по правилу

$$I_{m,k}^\pi = \text{Res } s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu), \quad (4.4)$$

где Res обозначает вычет фиксированного порядка $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, $k_j \leq K_j$, по всем переменным $\lambda, \mu, \dots, \nu$ в различных точках дивизора полюсов функции $s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu)$:

$$D = \{(\delta_j, K_j), j = 1, \dots, M, (\infty, 1)\}.$$

Механическая интерпретация гамильтонианов $H^{(k)}$ довольно проста. Сами гамильтонианы – аналоги квадрата момента импульса, а дополнительные интегралы – различные проекции момента, которые не коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона.

В качестве второго примера рассмотрим интегрируемые системы натурального вида на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с гамильтонианом

$$H = T + V = \sum a_{ij} p_i p_j + V(q_1, \dots, q_n), \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

где $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ – канонические координаты.

Как известно, существует изоморфизм между магнетиком Годена на алгебре $sl(2)$ и интегрируемыми системами, описывающими движение по геодезическим на римановых пространствах постоянной кривизны [16]. Для построения других интегрируемых систем с гамильтонианами вида (4.5) при $V \neq 0$ можно применить алгебраическую процедуру “одевания”, предложенную в [17–19]. Гамильтониан свободного движения (при $V = 0$ в (4.5)) является суперинтегрируемым, поэтому мы рассмотрим одевающие преобразования, сохраняющие свойство суперинтегрируемости. Заметим, что другие известные n -мерные суперинтегрируемые системы – задача Кеплера и системы типа Калоджеро–Мозера – также могут быть получены из геодезических потоков [20, 5].

Введем 2×2 -матрицу Лакса

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}(\lambda). \quad (4.6)$$

Пусть матрица $L(\lambda)$ удовлетворяет скобкам Пуассона (2.13) с обычной рациональной r -матрицей (3.19):

$$r_{12}(\lambda - \mu) = \frac{P_{12}}{\lambda - \mu}, \quad P_{12} = \frac{1}{2} \left(I + \sum \sigma_j \otimes \sigma_j \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где σ_j – матрицы Паули [7]. Для матрицы $L(\lambda)$ обычная производящая функция интегралов движения [12] имеет вид

$$s_2(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [PL(\lambda) \otimes L(\lambda)] = \det L(\lambda) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} L^2(\lambda) = -\frac{1}{2} \tau_2(\lambda),$$

а дополнительная производящая функция $s_2^\pi(\lambda, \mu)$ равна

$$s_2(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [PL(\lambda) \otimes L(\mu)] = h(\lambda)h(\mu) + \frac{e(\lambda)f(\mu) + f(\lambda)e(\mu)}{2}. \quad (4.7)$$

Следуя работам [17–19], введем семейство лаксовых пар по правилу

$$\begin{aligned} L'(\lambda) &= L(\lambda) - \sigma_- \cdot [\phi(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_{MN}, \\ A'(\lambda) &= A - \sigma_- \cdot [\phi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_{MN}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В этом определении $\phi(\lambda)$ – произвольная функция спектрального параметра и $[z]_{MN}$ – проекция элемента z на конечномерные ad_R^* -инвариантные пуассоновы подпространства рациональной r -матрицы [18, 19]. Например, мы можем использовать линейные комбинации лорановских проекций

$$[z]_{MN} = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k \lambda^k \right]_{MN} \equiv \sum_{k=-M}^N z_k \lambda^k \quad (4.9)$$

или тейлоровских проекций при $M = 0$. Отображение (4.8) является проекцией внешнего автоморфизма пространства бесконечномерных представлений алгебры $\mathcal{L}(sl(2), \lambda)$ [19] и тесно связано со стационарными потоками нелинейных эволюционных уравнений типа уравнений Кортевега–де Вриза [18]. Соответствующие r -матрицы при отображении (4.8) становятся динамическими:

$$r_{12}(\lambda, \mu) \rightarrow r'_{12} = r_{12} - \frac{([\phi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_{MN} - [\phi(\mu)e^{-2}(\mu)]_{MN})}{(\lambda - \mu)} \cdot \sigma_- \otimes \sigma_-. \quad (4.10)$$

Уравнения движения по геодезическим в $\mathbb{R}^{2n}$ имеют вид уравнений Ньютона. Мы используем это при определении пуассонова отображения $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{L}(sl(2))$, т.е. при построении соответствующего представления алгебры $sl(2)$ [18]. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+ \quad (4.11)$$

– вторая лаксова матрица в (4.6), которая не зависит от спектрального параметра. В этом случае матрица $L(\lambda)$ полностью задается одним матричным элементом $e(\lambda)$ и гамильтонианом H :

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -e_x/2 & e \\ -e_{xx}/2 & e_x/2 \end{pmatrix}(\lambda), \quad e_x = \{H, e\}. \quad (4.12)$$

При отображении (4.8) вторая лаксова матрица изменяется по правилу

$$A'(\lambda) = A - \sigma_- [\phi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_{MN}(\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

а соответствующие производящие функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{ds_2(\lambda)}{dt} = 0 &\Rightarrow \partial_x^3 e(\lambda) = e_{xxx} = 0, \\ \frac{ds'_2(\lambda)}{dt} = 0 &\Rightarrow \left[\frac{1}{4} \partial_x^3 + u_{MN}(\lambda) \partial_x + \frac{1}{2} u_{MN,x}(\lambda) \right] e(\lambda) = \\ &= B_1 [u_{MN}(\lambda)] e(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Нетрудно видеть, что свойство суперинтегрируемости сохраняется при отображении (4.8), если $\partial u_{MN}(\lambda)/\partial \lambda = 0$. Интегрируя уравнения (4.14), получаем

$$s_2(\lambda) = \frac{ee_{xx}}{2} - \frac{e_x^2}{4}, \quad (4.15)$$

$$s'_2(\lambda) = \frac{ee_{xx}}{2} - \frac{e_x^2}{4} + e^2 u_{MN}(\lambda). \quad (4.16)$$

После следующей подстановки матричных элементов из (4.12):

$$\begin{aligned} e(\lambda) &= \mathcal{B}^2, \quad h(\lambda) = -e_x/2 = -\mathcal{B}\mathcal{B}_x, \\ f(\lambda) &= -e_{xx}/2 = -\mathcal{B}_x^2 - \mathcal{B}\mathcal{B}_{xx}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

производящие функции приобретают вид

$$s_2(\lambda) = \mathcal{B}^3 \mathcal{B}_{xx}, \quad s'_2(\lambda) = \mathcal{B}^3 \mathcal{B}_{xx} + \mathcal{B}^4 \left[\frac{f(\lambda)}{\mathcal{B}^4} \right]_{MN}. \quad (4.18)$$

Для функции $\mathcal{B}(\lambda)$ эти уравнения движения являются уравнениями Ньютона:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{xx} &= s_2(\lambda) \mathcal{B}^{-3}, \\ \mathcal{B}_{xx} &= s'_2(\lambda) \mathcal{B}^{-3} - \mathcal{B} \left[\frac{f(\lambda)}{\mathcal{B}^4} \right]_{MN}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Предположим, что $\mathcal{B}(\lambda) = \sum_{j=0}^N q_{N-j} \lambda^j$ – полином, тогда его коэффициенты q_j удовлетворяют ньютоновским уравнениям движения, т.е. гамильтониан имеет натуральный вид (4.5). В переменных q_j отображение (4.8) действует только на потенциальную часть гамильтониана, оставляя кинетическую часть неизменной.

Пусть в соответствии с [8]

$$e(\lambda) = \sum_{i=1}^K e_i \lambda^i + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{l_j} \frac{e_{jk}}{(\lambda - \delta_j)^k} = \frac{u_0 \prod(\lambda - u_j)}{\prod(\lambda - \delta_j)}, \quad (4.20)$$

$$\Phi_\lambda(z) = \text{Res}_{\lambda=\infty} (\lambda^{-K} z)$$

при заданном дивизоре полюсов

$$D = \{(\delta_j, l_j), j = 1, \dots, M, (\infty, K)\}.$$

Вычеты e_i и e_{jk} представляют собой функции декартовых координат $\{q_j\}$ в $\mathbb{R}^n$, а криволинейные координаты $\{u_j\}$ – переменные разделения для соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби [18]. Точный вид функций e_i и e_{jk} восстанавливается по функции $\mathcal{B}(\lambda)$. Нетрудно видеть, что в простых полюсах при $\lambda = \delta_j$ функция $e(\lambda) = \mathcal{B}^2(\lambda)$ имеет вычеты $e_{j1} = q_j^2$. Описание орбит, связанных со старшими полюсами, столь же не сложно. Рассмотрим, например, орбиты, отвечающие полюсу на бесконечности $\lambda = \infty$. Пусть

$$\mathcal{B}(\lambda) = \sum_{j=0}^K q_{K-j} \lambda^j, \quad (4.21)$$

где $q_0 = 1$. Положим

$$e(\lambda) = \sum_{j=0}^K e_j \lambda^j, \quad h(\lambda) = \sum_{j=0}^K h_j \lambda^j, \quad f(\lambda) = \sum_{j=0}^K f_j \lambda^j, \quad (4.22)$$

где $e_K = 1$, $h_K = 0$ и $f_K = 0$ по определению гамильтониана H и матрицы A (4.11). Сравнивая (4.21), (4.22) с (4.20), получаем

$$e_j = \sum_{i=0}^{K-j} q_i q_{K-j-i}, \quad h_j = - \sum_{i=0}^{K-j} q_{i,x} q_{K-j-i}, \quad (4.23)$$

$$f_j = - \sum_{i=0}^{K-j} q_{i,x} q_{K-j-i,x} - \sum_{i=0}^{K-j} q_{i,xx} q_{K-j-i},$$

где $q_x = \{H, q\}$. Канонически-сопряженные к координатам q_j импульсы p_j вводятся с помощью r -скобок (2.13) [18]. Кинетическая часть гамильтониана (4.5) в этих переменных имеет вид

$$T = \sum_{j=1}^K p_j p_{K+1-j}. \quad (4.24)$$

Выпишем подробнее несколько первых матричных элементов:

$$\begin{aligned} K=0, \quad e(\lambda) &= 1, \quad h(\lambda) = 0, \\ K=1, \quad e(\lambda) &= \lambda + 2q_1, \quad -h(\lambda) = p_1, \\ K=2, \quad e(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda q_1 + (2q_2 + q_1^2), \\ &\quad -h(\lambda) = \lambda p_2 + (p_1 + p_2 q_1), \\ K=3, \quad e(\lambda) &= \lambda^3 + 2\lambda^2 q_1 + \lambda(2q_2 + q_1^2) + 2(q_3 + q_1 q_2), \\ &\quad -h(\lambda) = \lambda^2 p_3 + \lambda(p_2 + p_3 q_1) + (p_1 + p_2 q_1 + p_3 q_2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Итак, мы построили матрицы Лакса $L(\lambda)$ и $L'(\lambda)$, которые отвечают свободному и потенциальному движению на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Выделим среди этого семейства интегрируемых систем класс суперинтегрируемых систем.

Сравнивая (4.10)–(4.13) и (4.20), нетрудно видеть, что для тейлоровской проекции ($M = 0$) в (4.9) отображение (4.8) сохраняет свойство суперинтегрируемости свободного движения в том и только том случае, если $N \leq K$. Напомним, что K – старший порядок полюса функции $e(\lambda)$ (4.20) на бесконечности, а N – старшая степень полинома по λ в полиномиальной проекции (4.9). Только в этом случае матрица A' (4.13) остается не зависящей от спектрального параметра и при этом род соответствующей спектральной кривой (3.25) не превышает числа координат. При $N > K$ в динамической r -матрице (4.10) появляются старшие полюсы в точке $\lambda = \infty$, которые приводят к потере свойства вырожденности.

В качестве примера рассмотрим функцию $e(\lambda)$ с простыми полюсами в конечной области

$$e(\lambda) = P_K(\lambda) + \sum_{j=K+1}^n \frac{q_j^2}{\lambda - \delta_j},$$

где $P_K(\lambda)$ – полиномы, задаваемые уравнениями (4.25). При $N = K$ соответствующие суперинтегрируемые потенциалы V в (4.5) имеют вид

$$\begin{aligned} K = 0, \quad V &= \sum_{j=1}^n \left(q_j^2 + \frac{\beta_j}{q_j^2} \right), \\ K = 1, \quad V &= 4q_1^2 + \sum_{j=2}^n \left(q_j^2 + \frac{\beta_j}{q_j^2} \right), \\ K = 2, \quad V &= 4q_1^3 - 8q_1q_2 + \sum_{j=3}^n \left(q_j^2 + \frac{\beta_j}{q_j^2} \right), \\ K = 3, \quad V &= -5q_1^4 + 12q_1^2q_2 - 4q_2^2 - 8q_1q_3 + \sum_{j=4}^n \left(q_j^2 + \frac{\beta_j}{q_j^2} \right). \end{aligned}$$

Слагаемые β_j/q_j^2 в потенциалах связаны с внешним автоморфизмом пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$ [19], который применялся нами ранее непосредственно к уравнениям Лакса (4.8). Кроме этого, при $N = K$ “одевающее” отображение (4.8) зависит от $N + 1$ произвольных параметров – коэффициентов полинома $\phi(\lambda) = \sum_{j=0}^N \alpha_j \lambda^j$. Параметры α_j , $j < N$, связаны с каноническим преобразованием $q_j \rightarrow q_j + \alpha_j$ в представленных потенциалах, а параметр α_N – с общим масштабным преобразованием $V \rightarrow \alpha_N V$.

Полный набор интегралов движения порождается функцией $s_2(\lambda, \mu)$ (4.7) по правилу (4.4). Все эти интегралы невырождены на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, и скобки Пуассона между ними определяются из r -скобок (2.15).

В рамках предложенной схемы можно построить суперинтегрируемые системы, отвечающие общему виду функции $e(\lambda)$ (4.20), используя рациональную лорановскую проекцию (4.9), а также системы, связанные с другими эволюционными уравнениями [18], и системы на других римановых пространствах постоянной кривизны [16, 21]. Соответствующие квантовые системы получаются при каноническом квантовании [17, 21].

В качестве третьего примера рассмотрим суперинтегрируемую модель Эйлера–Калоджеро–Мозера. Мы выбрали эту модель потому, что именно для нее впервые была введена матрица Лакса со спектральным параметром при изучении свойств суперинтегрируемости [6]. Введем канонические переменные $\{(q_j, p_j)\}_{j=1}^N$ и независимые динамические переменные $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ($f_{ij} = -f_{ji}$) со следующими скобками Пуассона:

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad (4.26)$$

$$\{f_{ij}, f_{kl}\} = \frac{1}{2}(\delta_{il}f_{jk} + \delta_{ki}f_{lj} + \delta_{jk}f_{il} + \delta_{lj}f_{ki}). \quad (4.27)$$

Определяя фазовое пространство системы, мы будем рассматривать только орбиты общего положения, на которых скобки Пуассона (4.27) для алгебры $o(N)$ не вырождены.

Гамильтониан системы Эйлера–Калоджеро–Мозера имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \frac{f_{ij}^2}{(q_i - q_j)^2}. \quad (4.28)$$

Матрица Лакса [6] и соответствующая r -матрица [22] равны

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \sum_{j=1}^N p_j e_{jj} + \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \left(\frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{\lambda} \right) f_{ij} e_{ij}, \\ r_{12}(\lambda, \mu) &= -\frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} \sum_{j=1}^N e_{jj} \otimes e_{jj} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \left(\frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{\lambda + \mu} \right) e_{ij} \otimes e_{ij} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \left(\frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{\lambda - \mu} \right) e_{ij} \otimes e_{ji}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где e_{ij} – обычный базис матриц во вспомогательном пространстве $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Динамическая r -матрица (4.29) имеет обычный полюс при $\lambda = \mu$ и правильную точку при $\lambda = \infty$, вычет в которой не равен нулю и не зависит от второго спектрального параметра.

Связанный с этой точкой суперинтегрируемый гамильтониан H (4.28) определяется по правилу (3.3) при $\phi(\lambda) = (1/2)\lambda^{-1}$:

$$H = \Phi_\lambda [\text{tr } L^2(\lambda)] = \frac{1}{2} \text{Res} \Big|_{\lambda=\infty} [\lambda^{-1} \cdot \text{tr } L^2(\lambda)],$$

и, как обычно, вторая матрица Лакса не зависит от спектрального параметра:

$$A = \Phi_\lambda \text{tr}_1 [r_{21}(\lambda, \mu) L_1(\lambda)] = \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \frac{f_{ij}}{(q_i - q_j)^2} e_{ij}.$$

Инволютивное семейство интегралов движения определяется величинами

$$I_m = \operatorname{Res}\big|_{\lambda=\infty} L^m(\lambda), \quad m = 1, \dots, N.$$

Формально можно ввести дополнительные интегралы движения, используя функции $s_m^\pi(\lambda, \mu, \dots, \nu)$ (3.18). Однако матрица $L(\lambda)$ не является элементом алгебры петель и зависит от спектрального параметра аддитивно. Поэтому необходимо доказать, что соответствующие дополнительные интегралы не вырождены, т.е. что они являются нетривиальными функциями от динамических переменных. Напомним, что в работе [6] дополнительные интегралы движения определяются по правилу

$$I_{km} = \operatorname{tr}(XL^{k-1}) \operatorname{tr}(L^m) - \operatorname{tr}(L^k) \operatorname{tr}(XL^{m-1}),$$

где $X_{jk} = q_j \delta_{jk}$. Заметим, что для многочастичных систем типа Калоджеро–Мозера с рациональными и тригонометрическими потенциалами, связанными с системами корней полупростых алгебр Ли, интегрирование уравнений движения можно выполнить в явном виде [5]. При этом используется проецирование движения по геодезическим на симметрических пространствах нулевой, отрицательной или положительной кривизны. Для рациональных потенциалов это отображение сохраняет свойство суперинтегрируемости, в отличие от случая тригонометрических потенциалов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматриваются некоторые суперинтегрируемые или вырожденные системы в рамках метода классической r -матрицы. Доказано, что гамильтонианы, отвечающие сингулярным точкам r -матрицы, являются вырожденными. Предложена схема построения суперинтегрируемых гамильтонианов натурального вида с полиномиальными потенциалами, и в качестве примера рассмотрено фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$. При этом в общем случае применение внешних автоморфизмов алгебр петель позволяет получать различные суперинтегрируемые системы из геодезических потоков на римановых пространствах постоянной кривизны.

Другими известными примерами n -мерных суперинтегрируемых систем являются система Кеплера и системы Калоджеро–Мозера с рациональными потенциалами. Известно, что после переопределения времени фазовый поток задачи Кеплера переходит в геодезический поток на сфере S^n , вложенной в $(n+1)$ -мерное пространство. Представление Лакса для геодезического потока на сфере в импульсном пространстве известно [21]. Однако действие стереографической проекции и замены времени на основные r -скобки не изучено. В дальнейшем мы надеемся построить 2×2 -матрицы Лакса для задачи Кеплера и для ей подобных суперинтегрируемых систем, перечисленных в [23]. Системы типа Калоджеро–Мозера частично рассмотрены в данной работе и также требуют дальнейшего детального изучения.

Все перечисленные вырожденные системы объединяет то, что они могут быть получены различными методами из систем, отвечающих движению по геодезическим на различных пространствах. Все эти методы – применение внешних автоморфизмов представлений алгебр петель [19], стереографическая проекция с заменой времени [20] или гамильтонова редукция [5] – могут сохранять свойство суперинтегрируемости динамических систем.

Работа поддержана грантом РФФИ 96-0100537.

Список литературы

- [1] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
- [2] *Ya. A. Smorodinsky, M. Uhlir, P. Winternitz, I. Friz.* Sov. J. Nucl. Phys. 1966. V. 4. P. 444.
- [3] *И. А. Малкин, В. И. Манько*. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
- [4] *D. Bonatos, C. Daskaloyannis, K. Kokkotas.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 3700; *P. Letourneau, L. Vinet.* Ann. Phys. 1995. V. 243. P. 144.
- [5] *А. М. Переломов*. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [6] *S. Wojciechowski.* Phys. Lett. A. 1983. V. 95. P. 279; 1985. V. 111. P. 101.
- [7] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [8] Динамические системы-VII. Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем.: Фунд. направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 86–227.
- [9] *J. Dixmier.* Enveloping algebras. Paris: Cauthier-Villars, 1974.
- [10] *A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian Shansky.* Phys. Lett. A. 1988. V. 130. P. 456.
- [11] *V. G. Kac.* Infinite-Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [12] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin.* Quantum Spectral Transform Method. In: Lecture Notes in Physics. V. 151. Integrable Quantum Field Theories. Eds J. Hietarinta and C. Montonen. Berlin: Springer, 1982. P. 61–119.
- [13] *А. А. Белавин*. Функци. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. С. 18.
- [14] *Е. К. Sklyanin.* J. Soviet. Math. 1989. V. 46. P. 1664.
- [15] *M. Gaudin.* J. Phys. A. 1976. V. 37. P. 1087.
- [16] *В. Б. Кузнецов*. ТМФ. 1992. Т. 91. № 1. С. 83.
- [17] *J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, V. B. Kuznetsov, A. V. Tsiganov.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 567.
- [18] *P. P. Kulish, S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3365.
- [19] *A. V. Tsiganov.* Automorphisms of $sl(2)$ and dynamical r -matrices. solv-int/9610003, 1996.
- [20] *J. Moser.* Commun. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. P. 609.
- [21] *J. Harnad, P. Winternitz.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 172. P. 263.
- [22] *E. Billey, J. Avan, O. Babelon.* Phys. Lett. A. 1994. V. 186. P. 114.
- [23] *N. W. Evans.* Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 5666.

Поступила в редакцию 12.III.1997 г.

A. V. Tsiganov

**SUPERINTEGRABLE SYSTEMS
AND CLASSICAL r -MATRIX METHOD**

Superintegrable systems are considered in the framework of the classical r -matrix method. By using other automorphisms of the loop algebras new superintegrable systems with rational potentials from geodesic motion on $\mathbb{R}^{2n}$ are constructed.