Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Манько, С. С. Сафонов, Квантовый осциллятор с трением и классическое представление в квантовой механике, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 3, 467–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:45:24

В. И. Манько*, С. С. Сафонов*

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ТРЕНИЕМ И КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Для квантового осциллятора с трением, который описывается моделью Калдиры–Канаи, вводится маргинальное распределение в рамках классического представления квантовой механики. Данное описание основывается на методе симплектической томографии. Вычисленное выражение для маргинального распределения осциллятора с трением для когерентного и фоковского состояний выражено через функцию Гаусса и полиномы Эрмита. Кратко описан метод вычисления маргинального распределения с помощью подстановки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема движения с трением занимает особое место в квантовой механике. В рамках квантовой теории существует несколько различных моделей, которые описывают трение при движении частицы [1, 2]. В этих работах матрица плотности гармонического осциллятора с трением была получена с использованием взаимодействия с тепловой баней. В работе [3] было предложено кинетическое уравнение с коэффициентами, которые зависят от трения. Обобщенное уравнение Шредингера с нелинейными членами, описывающими трение, было рассмотрено в [4]. Недавно в [5, 6] обсуждалось другое нелинейное обобщение уравнения Шредингера для описания квантового трения. В нашей работе мы будем использовать простой квантовый гамильтониан, который описывает трение в рамках линейного уравнения Шредингера для волновой функции. Данный гамильтониан был предложен и более подробно рассмотрен в [7, 8].

В классической механике движение с трением описывается с помощью уравнения движения. Поэтому в классической механике не существует той неоднозначности, которая присутствует в квантовом описании трения. Недавно в работах [9, 10] было предложено классическое представление квантовой механики. Данное представление использует “томографию” как метод для измерения квантового состояния [11–13]. Таким образом, описание квантового движения сделано похожим на описание классического движения, при котором взаимодействие частицы с термостатом описывается положительной функцией распределения. Принимая во внимание возможность классического описания квантовой системы, которое подробно рассмотрено в [9], можно ожидать, что проблеме квантового трения можно будет легче понять с точки зрения этого описания. Поэтому цель

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

нашей работы — дать обзор нового классического представления стандартной квантовой механики, предложенного в [9], и обсудить проблему трения в квантовой механике, используя это классическое представление.

Предыдущие попытки дать классическое представление квантовых состояний привели к введению таких квазираспределений в фазовом пространстве системы, как функция Вигнера [14] и квазивероятность Глаубера–Сударшана [15, 16]. Хотя эти квазивероятности, задающие квантовое состояние, и похожи на положительные функции распределения для некоторых квантовых состояний, они принимают отрицательные значения для многих квантовых состояний и тем самым не описывают вероятность в обычном ее определении. Функция квазивероятности Хусими–Кано [17, 18], зависящая от двух переменных q и p , нормирована и принимает только положительные значения. В этой связи она могла бы интерпретироваться как распределение вероятности, однако эта функция не есть функция распределения в фазовом пространстве системы, поскольку ее аргументы q и p не являются одновременно измеримыми величинами (координатой и импульсом) в силу соотношения неопределенности.

Использование маргинального распределения для описания квантового состояния основано на соотношении матрицы плотности с характеристической функцией [12, 13]. Маргинальное распределение для координаты в ансамбле канонически преобразованных систем отсчета в классическом фазовом пространстве было изучено в работах [9–11]. Рассмотренное в этих статьях классическое представление является модифицированным методом оптической томографии, предложенным в [12]. В оптической томографии, чтобы получить из маргинального распределения функцию Вигнера, было использовано преобразование Радона [12]. Поэтому в нашем случае квантового трения важно знать маргинальное распределение, поскольку можно вычислить функцию Вигнера с помощью измерения этого маргинального распределения. Функция Вигнера и маргинальное распределение в схеме подхода [9–11] связаны при помощи преобразования Фурье, что было подробно продемонстрировано в [11]. По существу, томографические схемы для измерения квантового состояния используют новое представление в квантовой механике, отличающееся от представлений Вигнера [14], Глаубера–Сударшана [15, 16] и Хусими–Кано [17, 18] тем, что состоянию системы в этом представлении взаимно однозначно сопоставляется не квазираспределение, а настоящая функция распределения вероятностей измеримой физической величины.

Для описания квантового осциллятора с трением мы применяем гамильтониан Калдиrola–Канаи, который содержит коэффициенты, зависящие от времени [7, 8]. Обзор решений различных квантовых задач с нестационарными квадратичными гамильтонианами, коэффициенты которых зависят от времени, дан в [19]. Свойства локализованных волновых пакетов для уравнения Дирака, при построении которых используется анализ нестационарных гамильтонианов, изучены в [20]. Поскольку данный гамильтониан содержит зависящие от времени экспоненциальные множители, волновые функции квантового осциллятора с трением также содержат экспоненциальные коэффициенты и множители, зависящие от времени, что несколько усложняет работу с ними по сравнению с волновыми функциями гармонического осциллятора с трением [7, 8, 21]. Цель настоящей работы — получить маргинальное распределение для квантового осциллятора с постоянной частотой и в отсутствие вынуждающей силы при наличии трения и сравнить найденное выражение с недавно полученным маргинальным распределением для обычного гармонического осциллятора [9, 11]. При вычислении маргинального рас-

предела мы выведем и будем использовать производящую функцию для дискретного маргинального распределения, чтобы избежать вычисления функции Вигнера осциллятора с трением в соответствующих фоковских состояниях. Кроме того, в нашей статье приведен результат вычисления вероятности вызванных трением переходов гармонического осциллятора в рамках классического представления квантовой механики. Найденный результат сравнивается с результатами других статей [22, 23], где обсуждались переходы между дискретными состояниями осциллятора, обусловленные нестационарностью гамильтониана. Мы рассматриваем разные способы нахождения маргинального распределения для осциллятора с трением, а также представляем способ вычисления маргинального распределения из альтернативного уравнения Шредингера [9, 11] и способ вычисления с помощью введения подстановки в известное начальное маргинальное распределение [10].

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СОСТОЯНИЯ С ПОТЕРЯННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Как было показано в [9, 11], для линейной комбинации координат в фазовом пространстве осциллятора, которая является наблюдаемой величиной

$$\hat{X} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p}, \quad (1)$$

где $\hat{q}$ – координата, $\hat{p}$ – импульс, а μ и ν – действительные числа, распределение $w(X, \mu, \nu)$ связано с состоянием квантовой системы следующим образом:

$$w(X, \mu, \nu, t) = \int \exp[-ik(X - \mu q - \nu p)] W(q, p, t) \frac{dk dq dp}{(2\pi)^2}. \quad (2)$$

Распределение $w(X, \mu, \nu, t)$ зависит от двух действительных параметров μ, ν , а состояние квантовой системы задано функцией Вигнера $W(q, p, t)$. Функция Вигнера нашей системы связана с матрицей плотности в координатном представлении (см., например, [24]) с помощью формулы

$$W(q, p, t) = \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}, t\right) \exp[-ipu] du, \quad (3)$$

где $\rho(q, q', t)$ – матрица плотности. Рассмотрим случай квантового осциллятора с трением более конкретно. В работе [21] было показано, что для системы с гамильтонианом Калдиrola–Канаи (записанным при $\hbar = m = 1$)

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} \exp(-2\gamma t) + \omega^2 \exp(2\gamma t) \frac{\hat{q}^2}{2}, \quad (4)$$

где γ (коэффициент трения) и ω (собственная частота квантового осциллятора) – постоянные величины, волновые функции для когерентного $|\alpha\rangle$ и фоковского $|n\rangle$ состояний с потерянной энергией могут быть написаны в предположении, что $\omega = 1$:

$$\Psi_\alpha(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{i\varepsilon e^{2\gamma t}}{2\varepsilon} q^2 + \frac{\sqrt{2}\alpha}{\varepsilon} q - \frac{\varepsilon^*}{2\varepsilon} \alpha^2 - \frac{|\alpha|^2}{2}\right), \quad (5)$$

$$\Psi_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\varepsilon^*}{2\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \exp\left(\frac{i\varepsilon e^{2\gamma t}}{2\varepsilon} q^2\right) H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon^*}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

В этих формулах функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2\gamma\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) = 0 \quad (7)$$

и начальным условиям

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \frac{i\Omega - \gamma}{\sqrt{\Omega}}. \quad (8)$$

С классическим уравнением движения (7) связан вронскиан, значение которого определяется начальными условиями (8):

$$\varepsilon^* \dot{\varepsilon} - \varepsilon \dot{\varepsilon}^* = 2i \exp(-2\gamma t). \quad (9)$$

Решение $\varepsilon(t)$ уравнения (7) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\gamma t} [\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)], \quad (10)$$

где

$$\Omega^2 = 1 - \gamma^2 \quad (11)$$

— обобщенная частота квантового осциллятора. Запишем интеграл (2), определяющий маргинальное распределение (используя формулы (3) и определение матрицы плотности), в виде

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu, t) = & \int \exp[-ik(X - \mu q - \nu p)] \Psi\left(q + \frac{u}{2}, t\right) \Psi^*\left(q - \frac{u}{2}, t\right) \times \\ & \times \exp(-ipu) \frac{dk du dq dp}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Psi(q, t)$ — волновая функция (5) или (6), а $\Psi^*(q, t)$ — комплексно-сопряженное значение волновой функции $\Psi(q, t)$. Используя преобразование Фурье и основное свойство δ -функции, мы можем написать окончательную форму маргинального распределения для произвольной волновой функции:

$$w(X, \mu, \nu, t) = \int \exp[-ikX + ik\mu q] \Psi\left(q + \frac{k\nu}{2}, t\right) \Psi^*\left(q - \frac{k\nu}{2}, t\right) \frac{dk dq}{(2\pi)}. \quad (13)$$

Как известно (см., например, [24]), волновая функция когерентного состояния разлагается в ряд по волновым функциям фоковских состояний:

$$\Psi_\alpha(q, t) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \Psi_n(q, t)}{\sqrt{n!}}, \quad (14)$$

где α — комплексное число. Следовательно, можно получить маргинальное распределение для когерентного состояния как ряд по переменным α и α^* :

$$w_\alpha = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m} w_{nm}}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}}, \quad (15)$$

где

$$w_{nm}(X, \mu, \nu, t) = \int \exp[-ik(X - \mu q - \nu p)] \Psi_n\left(q + \frac{u}{2}, t\right) \Psi_m^*\left(q - \frac{u}{2}, t\right) \times \\ \times \exp(-ipu) \frac{dk du dq dp}{(2\pi)^2}. \quad (16)$$

В случае, если $m = n$, функция w_{nm} совпадает с маргинальным распределением фоковского состояния (т.е. $w_{nn} \equiv w_n$). Подставляя выражение для волновой функции когерентного состояния (5) в интеграл (13) и вычисляя его (используя известный интеграл от гауссиана), мы находим маргинальное распределение для когерентного состояния осциллятора с трением:

$$w_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}} \exp(-|\alpha|^2) \exp\left(-\frac{X^2}{\varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}\right) \times \\ \times \exp\left[-\alpha^2 \frac{\varepsilon^{*2} (a - ib)^2}{2 \varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)} + \alpha \frac{\sqrt{2} \varepsilon^* X (a - ib)}{\varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}\right] \times \\ \times \exp\left[-\alpha^{*2} \frac{\varepsilon^2 (a + ib)^2}{2 \varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)} + \alpha^* \frac{\sqrt{2} \varepsilon X (a + ib)}{\varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}\right]. \quad (17)$$

В формуле (17) были введены обозначения

$$a = \frac{\exp(2\gamma t) \nu (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*)}{2 \varepsilon \varepsilon^*} + \mu, \quad (18)$$

$$b = \frac{\nu}{\varepsilon \varepsilon^*}, \quad (19)$$

а функция $\varepsilon(t)$ определена формулой (10). Полученный результат содержит две экспоненты, в аргументах которых находятся α^2 , α и $(\alpha^*)^2$, α^* , экспоненту с аргументом $|\alpha|^2$, экспоненту, которая не зависит от переменных α , α^* , и коэффициент, который также не зависит от переменных α , α^* . Функция $w_\alpha e^{|\alpha|^2}$ может быть разложена в двойной ряд по переменным α и α^* . Рассматривая экспоненты с переменными $\alpha^2 ((\alpha^*)^2)$ и $\alpha (\alpha^*)$ как производящие функции для полиномов Эрмита H_n и применяя формулу (15), мы находим маргинальное распределение для фоковского состояния $|n\rangle$

$$w_n(X, \mu, \nu, t) = w_0(X, \mu, \nu, t) \frac{1}{2^n n!} H_n^2\left(\frac{X}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}}\right), \quad (20)$$

где $w_0(X, \mu, \nu, t)$ – основное состояние осциллятора

$$w_0(X, \mu, \nu, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}} \exp\left(-\frac{X^2}{\varepsilon \varepsilon^* (a^2 + b^2)}\right). \quad (21)$$

Сравним найденное выражение для маргинального распределения квантового осциллятора с трением с маргинальным распределением гармонического осциллятора, которое

было получено в [11]. Чтобы сделать это, рассмотрим маргинальное распределение (20) и (21) в случае $\gamma = 0$. Поскольку

$$a_{\gamma=0} = \mu, \quad (22)$$

$$b_{\gamma=0} = \nu, \quad (23)$$

маргинальное распределение для состояния $|n\rangle$ при $\gamma = 0$ выглядит следующим образом:

$$w_n(X, \mu, \nu, t)_{\gamma=0} = w_0(X, \mu, \nu, t)_{\gamma=0} \frac{1}{2^n n!} H_n^2 \left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right), \quad (24)$$

где маргинальное распределение для основного состояния имеет вид

$$w_0(X, \mu, \nu, t)_{\gamma=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \exp \left(-\frac{X^2}{(\mu^2 + \nu^2)} \right). \quad (25)$$

Сравнивая полученное выражение с результатом работы [11], можно заключить, что маргинальное распределение квантового осциллятора с трением для фоковского состояния с потерянной энергией в пределе $\gamma = 0$ совпадает с маргинальным распределением стационарного состояния гармонического осциллятора без трения.

3. КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [9] было введено эволюционное уравнение для маргинального распределения как альтернативное уравнение Шредингера для волновой функции (матрицы плотности). Для системы с гамильтонианом, в котором потенциал зависит от времени:

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \hat{V}(q, t), \quad (26)$$

уравнение эволюции для маргинального распределения имеет вид

$$\dot{w} - \mu \frac{\partial}{\partial \nu} w - i \left[V \left(-\frac{1}{\partial/\partial X} \frac{\partial}{\partial \mu} - i \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X}, t \right) - V \left(-\frac{1}{\partial/\partial X} \frac{\partial}{\partial \mu} + i \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X}, t \right) \right] w = 0. \quad (27)$$

Можно показать, что у осциллятора с трением это уравнение принимает форму

$$\dot{w} - \mu \frac{\partial}{\partial \nu} w - i \left[\tilde{V} \left(-\frac{1}{\partial/\partial X} \frac{\partial}{\partial \mu} - i \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X}, t' \right) - \tilde{V} \left(-\frac{1}{\partial/\partial X} \frac{\partial}{\partial \mu} + i \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X}, t' \right) \right] w = 0, \quad (28)$$

где

$$\tilde{V}(q, t') = \exp(2\gamma t(t')) V(q, t(t')) = \exp(4\gamma t(t')) \frac{q^2}{2}, \quad (29)$$

$$t(t') = -\frac{\ln(1 - 2\gamma t')}{2\gamma}. \quad (30)$$

Точка в уравнении (28) обозначает производную по переменной t' . Учитывая новое значение потенциала для осциллятора с трением (29), можно переписать равенство (28) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t'} w - \mu \frac{\partial}{\partial \nu} w + \exp(4\gamma t) \nu \frac{\partial}{\partial \mu} w = 0. \quad (31)$$

Можно проверить, что найденные выше маргинальные распределения w_α (17) и w_n (20) удовлетворяют данному уравнению для произвольных α и n .

Обсудим теперь проблему интегралов движения для осциллятора с трением. Квантовый осциллятор с трением имеет следующие линейные интегралы движения [21]:

$$\hat{a}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} [\varepsilon(t) \hat{p} - \dot{\varepsilon}(t) \exp(2\gamma t) \hat{q}] \quad (32)$$

и

$$\hat{a}^\dagger(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\varepsilon^*(t) \hat{p} - \dot{\varepsilon}^*(t) \exp(2\gamma t) \hat{q}]. \quad (33)$$

Эти линейные интегралы движения можно переписать, используя переменные X , μ , ν , в виде

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\varepsilon \mu}{2} + \frac{\dot{\varepsilon} e^{2\gamma t} \nu}{2} \right) + i \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \left(\dot{\varepsilon} e^{2\gamma t} \frac{\partial}{\partial \mu} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right], \quad (34)$$

$$a^\dagger(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\varepsilon^* \mu}{2} - \frac{\dot{\varepsilon}^* e^{2\gamma t} \nu}{2} \right) + i \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \left(\dot{\varepsilon}^* e^{2\gamma t} \frac{\partial}{\partial \mu} + \varepsilon^* \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right]. \quad (35)$$

Для того чтобы получить эти формы операторов, мы использовали связь, возникающую при действии линейных интегралов движения на матрицу плотности $\rho(X, X', t)$, функцию Вигнера $W(q, p, t)$ и маргинальное распределение $w(X, \mu, \nu, t)$ (см., например, [25]).

Рассмотрим операторы

$$\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) = \frac{1}{2} [\varepsilon \varepsilon^* \hat{p}^2 - \varepsilon^* \dot{\varepsilon} \exp(2\gamma t) \hat{p} \hat{q} - \dot{\varepsilon}^* \varepsilon \exp(2\gamma t) \hat{q} \hat{p} + \dot{\varepsilon}^* \dot{\varepsilon} \exp(4\gamma t) \hat{q}^2] \quad (36)$$

и

$$(\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t))^* = \frac{1}{2} [\varepsilon \varepsilon^* \hat{p}^2 - \varepsilon^* \dot{\varepsilon} \exp(2\gamma t) \hat{q} \hat{p} - \dot{\varepsilon}^* \varepsilon \exp(2\gamma t) \hat{p} \hat{q} + \dot{\varepsilon}^* \dot{\varepsilon} \exp(4\gamma t) \hat{q}^2]. \quad (37)$$

Здесь знак $*$ обозначает комплексно-сопряженный оператор. Эти операторы также являются интегралами движения. Они были обобщены для случая осциллятора с трением с помощью интегралов движения Ермакова, которые были найдены для классического осциллятора с переменной частотой в работе [26] и заново получены для квантового параметрического осциллятора в [27]. Поступая так же, как с операторами (32) и (33),

перепишем операторы (36) и (37) в переменных маргинального распределения в виде

$$\begin{aligned}
 a^\dagger(t)a(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-2} \left[\varepsilon \varepsilon^* \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^2 + \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 - e^{2\gamma t} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \nu} \right] - \right. \\
 & - \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^2 [\varepsilon \varepsilon^* \mu^2 + \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t} \nu^2 + e^{2\gamma t} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) \mu \nu] - \\
 & - i e^{2\gamma t} \left[\frac{\mu}{2} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) + e^{2\gamma t} \dot{\varepsilon}^* \dot{\varepsilon} \nu \right] \frac{\partial}{\partial \mu} + \\
 & \left. + i \left[\frac{(\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*)}{2} e^{2\gamma t} \nu + \varepsilon \varepsilon^* \mu \right] \frac{\partial}{\partial \nu} - 1 \right\}
 \end{aligned} \quad (38)$$

и

$$\begin{aligned}
 (a^\dagger(t)a(t))^* = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-2} \left[\varepsilon \varepsilon^* \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^2 + \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 + e^{2\gamma t} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \nu} \right] - \right. \\
 & - \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^2 [\varepsilon \varepsilon^* \mu^2 + \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t} \nu^2 - e^{2\gamma t} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) \mu \nu] + \\
 & + i e^{2\gamma t} \left[\frac{\mu}{2} (\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*) - e^{2\gamma t} \dot{\varepsilon}^* \dot{\varepsilon} \nu \right] \frac{\partial}{\partial \mu} + \\
 & \left. + i \left[\frac{(\varepsilon^* \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\varepsilon}^*)}{2} e^{2\gamma t} \nu - \varepsilon \varepsilon^* \mu \right] \frac{\partial}{\partial \nu} + 1 \right\}.
 \end{aligned} \quad (39)$$

Для того чтобы получить данные операторы, мы использовали уже упомянутую выше связь, возникающую при действии операторов a и $a^\dagger$ на матрицу плотности $\rho(X, X', t)$, функцию Вигнера $W(q, p, t)$ и маргинальное распределение $w(X, \mu, \nu, t)$. Рассматривая, как операторы (32) и (33) действуют на матрицу плотности, и учитывая связь матрицы плотности с маргинальным распределением (т.е. используя операторы (34) и (35)), мы получаем для маргинального распределения w_α когерентного состояния $|\alpha\rangle$ (17) следующие уравнения:

$$a(t)w_\alpha(X, \mu, \nu, t) = \alpha w_\alpha(X, \mu, \nu, t) \quad (40)$$

и

$$a^\dagger(t)w_\alpha(X, \mu, \nu, t) = \alpha^* w_\alpha(X, \mu, \nu, t). \quad (41)$$

Аналогично, рассматривая операторы $a^\dagger a$ и $(a^\dagger a)^*$ (уравнения (38) и (39)), получаем для маргинального распределения w_n фоковского состояния $|n\rangle$ (20) следующие уравнения:

$$a^\dagger(t)a(t)w_n(X, \mu, \nu, t) = n w_n(X, \mu, \nu, t), \quad (42)$$

$$(a^\dagger(t)a(t))^* w_n(X, \mu, \nu, t) = n w_n(X, \mu, \nu, t), \quad (43)$$

и, таким образом, маргинальное распределение (17) является решением системы уравнений (40), (41), а распределение (20) – решением системы уравнений (42), (43).

4. МАРГИНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА ОСЦИЛЛЯТОРА С ТРЕНИЕМ

Рассмотрим интегралы движения $\hat{A}(t)$, $\hat{A}^\dagger(t)$, которые могут быть найдены из системы уравнений для преобразования Боголюбова

$$\hat{A}(t) = u\hat{a}(t) + v\hat{a}^\dagger(t), \quad (44)$$

$$\hat{A}^\dagger(t) = v^*\hat{a}(t) + u^*\hat{a}^\dagger(t), \quad (45)$$

где коэффициенты u , v , которые не зависят от времени, удовлетворяют равенству

$$|u|^2 - |v|^2 = 1, \quad (46)$$

а $a(t)$, $a^\dagger(t)$ – линейные интегралы движения для квантового осциллятора с трением (32), (33). Интегралы движения $\hat{A}(t)$, $\hat{A}^\dagger(t)$ определены условием, что оператор $\hat{A}^\dagger(t=0)$ порождает из основного состояния осциллятора без трения его возбужденные состояния. Решив систему уравнений для случая $t=0$, получим, что коэффициенты u , v равны соответственно (Ω определяется уравнением (11))

$$u = \frac{1 + \Omega - i\gamma}{2\sqrt{\Omega}}, \quad (47)$$

$$v = \frac{1 - \Omega - i\gamma}{2\sqrt{\Omega}}. \quad (48)$$

Тогда оператор $A(t)$ равен

$$\hat{A}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{\varepsilon}p - \dot{\tilde{\varepsilon}} \exp(2\gamma t)q), \quad (49)$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = u\varepsilon - v\varepsilon^*, \quad (50)$$

а функция $\varepsilon(t)$ имеет вид (10). Что касается вновь введенной функции $\tilde{\varepsilon}(t)$, которая зависит от времени, то она удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{\varepsilon}(0) = 1, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}(0) = i \quad (51)$$

и имеет вронскиан (9). Повторяя вычисления, сделанные в работе [21], мы получаем волновые функции для возбужденного состояния осциллятора с трением

$$\tilde{\Psi}_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\tilde{\varepsilon}}} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}^*}{2\tilde{\varepsilon}} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \exp \left(\frac{i\dot{\tilde{\varepsilon}} e^{2\gamma t}}{2\tilde{\varepsilon}} q^2 \right) H_n \left(\frac{q}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*}} \right). \quad (52)$$

Зная волновые функции и повторяя вычисления, сделанные во втором разделе, мы находим маргинальное распределение для возбужденного состояния

$$\tilde{w}_n(X, \mu, \nu, t) = \tilde{w}_0(X, \mu, \nu, t) \frac{1}{2^n n!} H_n^2 \left(\frac{X}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)} \right), \quad (53)$$

$$\tilde{w}_0(X, \mu, \nu, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)} \exp \left(-\frac{X^2}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2) \right), \quad (54)$$

где

$$\tilde{a} = \frac{\exp(2\gamma t) \nu(\tilde{\varepsilon}^* \dot{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{\varepsilon} \dot{\tilde{\varepsilon}}^*)}{2\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*} + \mu, \quad (55)$$

$$\tilde{b} = \frac{\nu}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^*}. \quad (56)$$

Легко увидеть, что при $t = 0$ данное маргинальное распределение совпадает с уже упоминавшимся маргинальным распределением гармонического осциллятора. Вероятность перехода из n -го состояния в m -е возбужденное состояние простого гармонического осциллятора может быть получена как из известной формулы для вероятности путем интегрирования начальной и конечной волновых функций, так и с помощью формулы для вероятности путем интегрирования начальных и конечных маргинальных распределений (формула была дана в работе [25]). Данная вероятность перехода может быть представлена как

$$P(n \rightarrow m) = \frac{n!}{m!} \frac{2}{\sqrt{2 + \varepsilon\varepsilon^* + \dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t}}} \left[P_{\frac{m+n}{2}}^{\frac{m-n}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{2 + \varepsilon\varepsilon^* + \dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}^* e^{4\gamma t}}} \right) \right]^2, \quad m > n, \quad (57)$$

где $P_k^l(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра. Найденная вероятность перехода хорошо согласуется с результатом работы [22] для частного случая $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$, $g(t) = e^{\frac{t}{\tau}}$ (в нашем случае $\tau = \frac{1}{2\gamma}$). Аналогичный интеграл для осциллятора с переменной частотой был вычислен в [28]. Вероятность остаться в нулевом состоянии имеет вид

$$\begin{aligned} P(0 \rightarrow 0) &= \frac{2}{\sqrt{2 + \tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^* + \dot{\tilde{\varepsilon}}\dot{\tilde{\varepsilon}}^* e^{4\gamma t}}} = \\ &= \frac{2\Omega}{\sqrt{2\Omega^2 + e^{2\gamma t}(1 - \gamma^2 \cos 2\Omega t - \gamma\Omega \sin 2\Omega t) + e^{-2\gamma t}(1 - \gamma^2 \cos 2\Omega t + \gamma\Omega \sin 2\Omega t)}}. \end{aligned} \quad (58)$$

К сожалению, эта вероятность перехода была неправильно вычислена в статье [23] (см. формулу (17a)), но два частных случая, которые были разобраны в этой статье, когда $\gamma \ll 1$, $\Omega \approx 1$, $\Omega t = 0$ и $\gamma \ll 1$, $\Omega t = \pi$ [23] (формулы (18a) и (18b)), оказались правильными.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАРГИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТАНОВКИ

Кратко опишем еще один способ получения маргинальных распределений осциллятора с трением. Маргинальные распределения (20) и (53) могут быть найдены с помощью подстановки параметров $\mu \rightarrow \mu(t)$, $\nu \rightarrow \nu(t)$, которые зависят от времени. Данный метод был предложен в [10, 25]. В этих работах было показано, что для нестационарного осциллятора, если известно начальное маргинальное распределение при $t = 0$

$$w(X, \mu, \nu, t = 0) = w_0(X, \mu, \nu), \quad (59)$$

маргинальное распределение во времена $t \neq 0$ будет иметь форму

$$w(X, \mu, \nu, t) = w_0(X, \mu(t), \nu(t)), \quad (60)$$

где была сделана замена

$$\nu(t) = \frac{\dot{\varepsilon} - \varepsilon^*}{2i} \nu + \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{2i} \mu \quad (61)$$

и

$$\mu(t) = \frac{\dot{\varepsilon} + \varepsilon^*}{2} \nu + \frac{\varepsilon + \varepsilon^*}{2} \mu. \quad (62)$$

В случае осциллятора с трением функции $\varepsilon(t)$, $\varepsilon^*(t)$ понимаются как $\varepsilon(t(t'))$, $\varepsilon^*(t(t'))$, а точка обозначает производную по переменной t' . Легко видеть, что формулы (17) и (20) могут быть получены с помощью указанной подстановки.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом проведенного анализа является введение положительной, нормируемой функции распределения (маргинального распределения), удовлетворяющей уравнению эволюции типа Фоккера–Планка и полностью задающей квантовое состояние частицы (матрицу плотности), которая позволяет описывать движение квантовой частицы с трением. В этом смысле описание квантового движения с трением сделано похожим на описание классического движения с трением, при котором взаимодействие частицы с термостатом описывается положительной функцией распределения. В рамках предложенного классического представления найдены функции распределения, описывающие различные полные наборы квантовых состояний, а именно, когерентные состояния и дискретные фоковские состояния осциллятора с трением. Исходя из вышеприведенных вычислений можно сделать вывод, что маргинальное распределение, которое используется для классического описания квантового трения, можно получить с помощью нескольких различных способов. Чтобы вычислить маргинальное распределение, мы использовали метод производящей функции. Применяя этот метод, мы избежали вычисления функции Вигнера для системы. В данной статье мы показали, как получить такое же выражение маргинального распределения из альтернативного уравнения Шредингера. Также была предложена подстановка для получения аналогичного выражения маргинального распределения из известного начального (при $t = 0$) маргинального распределения. Были рассмотрены интегралы движения для маргинального распределения.

Как мы показали, вероятность перехода между дискретными уровнями гармонического осциллятора, возбужденного квантовым трением, может быть получена в рамках классического представления квантового состояния. Данная вероятность перехода может быть вычислена с помощью интеграла перекрытия начального и конечного маргинальных распределений [25]. Вклад в вероятность перехода учитывает влияние классической траектории из начального состояния в данной системе отсчета в конечном состоянии, рассмотренное с точки зрения ансамбля систем отсчета в фазовом пространстве, которые характеризуются параметрами μ и ν . Вероятность перехода для двух маргинальных распределений, которые описывают дискретные состояния осциллятора с трением и выражаются через функцию Гаусса и полиномы Эрмита, может быть получена через присоединенные полиномы Лежандра.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] *R. J. Glauber*. Coherence and quantum detection. In: *Rend. Scuola Intern. Fis. E. Fermi XLII*. 1967. N. Y.: Acad. Press., 1969. P. 32.
- [2] *P. Ullersma*. *Physica*. 1966. V. 32. № 1. P. 27.
- [3] *I. R. Senitzky*. *Phys. Rev.* 1960. V. 119. № 2. P. 670.
- [4] *M. D. Kostin*. *J. Chem. Phys.* 1983. V. 57. № 9. P. 3589.
- [5] *H. D. Doebler, G. A. Goldin*. *Phys. Lett. A*. 1992. V. 162. P. 397.
- [6] *V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi*. *Ann. Phys.* 1995. V. 237. P. 226.
- [7] *P. Caldirola*. *Nuovo Cimento*. 1941. V. 18. № 9. P. 393.
- [8] *E. Kanai*. *Progr. Theor. Phys.* 1948. V. 3. № 4. P. 440.
- [9] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi*. *Phys. Lett. A*. 1996. V. 213. № 1; *Found. Phys.* (in print).
- [10] *O. V. Man'ko*. *J. Russ. Laser Res.* New York: Plenum Press, 1996. V. 17. P. 439; *Phys. Lett. A*. (in print).
- [11] *V. I. Man'ko*. Energy levels of quantum system in classical formulation of quantum mechanics. In: *Proceedings of APCTP Conference (Seoul, June 1996)*. World Scientific, 1997 (in print); *J. Russ. Laser Res.* 1996. V. 17. P. 579.
- [12] *K. Vogel, H. Risken*. *Phys. Rev. A*. 1989. V. 40. P. 2847.
- [13] *K. E. Cahill, R. J. Glauber*. *Phys. Rev.* 1969. V. 177. P. 1882.
- [14] *E. Wigner*. *Phys. Rev.* 1932. V. 40. P. 749.
- [15] *R. J. Glauber*. *Phys. Rev. Lett.* 1963. V. 10. P. 84.
- [16] *E. C. G. Sudarshan*. *Phys. Rev. Lett.* 1963. V. 10. P. 277.
- [17] *K. Husimi*. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*. 1940. V. 23. P. 264.
- [18] *Y. Kano*. *J. Math. Phys.* 1986. V. 6. P. 1913.
- [19] *V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Y. Trifonov*. *Ann. Phys.* 1996. V. 246. P. 231.
- [20] *B. B. Белов, В. П. Маслов*. Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. С. 574.
- [21] *V. V. Dodonov, V. I. Man'ko*. *Phys. Rev. A*. 1979. V. 20. № 2. P. 550.
- [22] *L. F. Landovitz, A. M. Lezine, W. M. Schreiber*. *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. № 8. P. 2159.
- [23] *P. Croxson*. *Phys. Rev. A*. 1994. V. 49. № 1. P. 588.
- [24] *B. B. Додонов, В. И. Манько*. Тр. ФИАН. Т. 183. М.: Наука, 1987; *V. V. Dodonov, V. I. Man'ko*. Invariants and evolution of nonstationary quantum system. In: *Proceedings of the Lebedev Physical Institute*. 183. Ed. M. A. Markov. N. Y.: Nova Science, 1989.
- [25] *V. I. Man'ko*. Quantum mechanics and classical probability theory. In: *Proceedings of International conference "Symmetries in Science VIII"*, Bregenz (Austria). August 1996. Ed. B. Gruber (to be published by Plenum Press, 1997).
- [26] *П. Ермаков*. Университетские известия (Київ). 1880. Т. 20. № 9. С. 1.
- [27] *H. R. Lewis, W. B. Riesenfeld*. *J. Math. Phys.* 1969. V. 10. P. 1458.
- [28] *I. A. Malkin, V. I. Man'ko, D. A. Trifonov*. *Phys. Rev. D*. 1970. V. 2. P. 1371.

Поступила в редакцию 26.II.1997 г.,
после доработки 25.IV.1997 г.

V. I. Man'ko, S. S. Saphonov

QUANTUM DAMPED OSCILLATOR AND CLASSICAL FORMULATION OF QUANTUM MECHANICS

The quadrature marginal distribution for quantum damped oscillator described by the Caldirola-Kanai model with the constant frequency is introduced in a frame of a classical-like formulation of quantum mechanics based on a symplectic tomography scheme. The marginal distribution for coherent states and Fock states of the damped oscillator expressed explicitly in terms of Gaussian and Hermite polynomials.