Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Денисова, Нахождение частного решения уравнений релятивистской теории гравитации методом неопределенных координат, *ТМФ*, 1997, том 112, номер 3, 501–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:05:15

И. П. Денисова*

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КООРДИНАТ

Методом неопределенных координат получено частное решение уравнений релятивистской теории гравитации, описывающее гравитационное поле бесконечно тонкого источника, расположенного вдоль оси z . Проведено изучение движения массивных частиц в этом поле.

Как известно, интегрирование уравнений релятивистской теории гравитации

$$R_{ik} = \frac{m^2}{2}[g_{ik} - \gamma_{ik}] + \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right] \quad (1)$$

с математической точки зрения представляет собой более сложную задачу, чем интегрирование уравнений общей теории относительности даже в вакуумном случае $T_{ik} = 0$. Поэтому к настоящему времени число найденных точных решений этой теории невелико [1].

Так как традиционные методы получения частных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, применяемые в общей теории относительности, для релятивистской теории гравитации оказались неэффективными, то возникает задача разработки новых методов получения частных решений уравнений (1). Разработка и применение одного из таких методов, который можно назвать методом неопределенных координат, и составляет предмет данной статьи.

Рассмотрим бесконечно тонкий статический источник гравитационного поля, расположенный вдоль оси z . Найдем частное решение уравнений (1) вне этого источника. Из условий задачи следует, что компоненты метрического тензора псевдориманова пространства-времени g_{ik} в цилиндрической системе координат будут зависеть только от полярного радиуса r и азимутального угла φ : $g_{ik} = g_{ik}(r, \varphi)$. В общем случае этот тензор может иметь десять ненулевых компонент. Метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени γ_{ik} в исходной координатной системе имеет достаточно простой вид:

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{rr} = -1, \quad \gamma_{zz} = -1, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = -r^2. \quad (2)$$

Однако исходная система координат оказывается неудобной для интегрирования уравнений (1), т.к. из-за неравенства нулю всех компонент g_{ik} левая часть этих уравнений

*Московский государственный авиационный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва, Россия

имеет чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому воспользуемся тем, что мы можем при определенных условиях переходом к другим координатам обратить в нуль четыре компоненты тензора g_{ik} . Это преобразование можно записать в виде $x^i = f^i(x'^n)$, причем явный вид функций $f^i(x'^n)$ зависит от явного вида компонент тензора g_{ik} в исходной системе координат. В этой координатной системе метрический тензор g'_{ik} будет иметь более простой вид, чем в исходной системе координат, в то время как компоненты тензора γ'_{ik} становятся сложнее и, что более важно, зависят от четырех неизвестных функций $f^i(x'^n)$. Так как штрихованные координаты непосредственно зависят от неизвестных на данном этапе решения задачи компонент метрического тензора g_{ik} , то их условно можно назвать неопределенными.

В применении к нашей задаче неопределенную координатную систему удобно выбрать так, чтобы обратить в нуль недиагональные компоненты $g'_{r\varphi}$, g'_{rz} , $g'_{z\varphi}$ и g'_{0r} метрического тензора псевдориманова пространства-времени. Тогда, опуская штрихи в этой координатной системе, интервалы ds^2 и $d\sigma^2$ для нашего частного решения будем искать в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0\varphi}c dt d\varphi + 2g_{0z}c dt dz + g_{rr}dr^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{zz}dz^2, \\ d\sigma^2 &= \gamma_{00}c^2 dt^2 + 2\gamma_{0\varphi}c dt d\varphi + 2\gamma_{0z}c dt dz + \gamma_{rr}dr^2 + \gamma_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + \gamma_{zz}dz^2, \end{aligned} \quad (3)$$

полагая, что тензоры g_{ik} и γ_{ik} зависят только от r и φ .

Так как наличие компонент $g_{0\varphi}$ и $\gamma_{0\varphi}$ в выражениях (3) свидетельствует о вращении и системы отсчета, и источника вокруг оси z , то для простоты рассмотрим частный случай без вращений и положим $\gamma_{0\varphi} = g_{0\varphi} = 0$. Подставляя выражения (3) в уравнения (1) при сделанных предположениях, получим довольно громоздкую систему уравнений.

Основной причиной большого количества слагаемых в этих уравнениях является то, что определитель метрического тензора g_{ik} имеет два слагаемых:

$$g = g_{00}g_{rr}g_{\varphi\varphi}g_{zz} - g_{0z}^2g_{rr}g_{\varphi\varphi}.$$

Поэтому компоненты g^{nl} , а следовательно, и символы Кристоффеля Γ_{ik}^n содержат в знаменателях эту алгебраическую сумму. После дифференцирования символов Кристоффеля в выражении для R_{ik} и возникают достаточно громоздкие уравнения.

Для того чтобы значительно упростить вид уравнений (1) в решаемой нами задаче, наложим на компоненты метрического тензора g_{ik} еще одно условие

$$g_{00} = (g_{0z}^2 - 1)/g_{zz}. \quad (4)$$

Это условие еще больше ограничивает класс решений, позволяя получить не общее вакуумное решение уравнений (1), а только некоторое частное решение.

При выполнении условия (4) в уравнении (1) наиболее простой вид имеет компонента, соответствующая $i = 1$, $k = 2$:

$$\frac{\partial g_{0z}}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial g_{0z}}{\partial r} g_{zz}^2 - \frac{\partial g_{zz}}{\partial r} g_{0z} g_{zz} \right] - \frac{\partial g_{0z}}{\partial r} \frac{\partial g_{zz}}{\partial \varphi} g_{0z} g_{zz} + \frac{\partial g_{zz}}{\partial \varphi} \frac{\partial g_{zz}}{\partial r} [g_{0z}^2 - 1] = 0. \quad (5)$$

Так как в это уравнение входят только две компоненты метрического тензора g_{ik} , то они должны быть взаимозависимыми и при “выключении” гравитационного поля перейти в $g_{zz} = -1$, $g_{0z} = 0$. Поэтому положим, что $g_{zz} = Q(g_{0z})$, где $Q(g_{0z})$ – некоторая

неизвестная функция, зависящая только от компоненты g_{0z} . Подставляя это выражение в уравнение (5) и учитывая правило дифференцирования сложных функций, получим

$$\frac{\partial g_{0z}}{\partial \varphi} \frac{\partial g_{0z}}{\partial r} [Q^2 - 2g_{0z}QQ' + (g_{0z}^2 - 1)Q'^2] = 0,$$

где введено обозначение $Q' = dg_{zz}/dg_{0z}$.

Поскольку в общем случае $\partial g_{0z}/\partial \varphi \neq 0$, $\partial g_{0z}/\partial r \neq 0$, то для выполнения этого уравнения необходимо потребовать, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, равнялось нулю:

$$[Q^2 - 2g_{0z}QQ' + (g_{0z}^2 - 1)Q'^2] = 0.$$

Разрешая квадратное уравнение относительно Q' , получим

$$Q' = \frac{Q}{(g_{0z} \pm 1)}.$$

Интегрирование этого уравнения не представляет труда: $Q = a(g_{0z} \pm 1)$, где a – постоянная интегрирования.

Так как при $g_{0z} = 0$ должно выполняться условие $g_{zz} = -1$, то очевидно, что $Q = g_{zz} = -1 \pm g_{0z}$. Тогда при $g_{0z} \neq 0$ из условия (4) следует, что $g_{00} = 1 \pm g_{0z}$.

Подставляя эти выражения в тензор Риччи, несложно установить, что

$$g_{rr}R_{\varphi\varphi} - g_{\varphi\varphi}R_{rr} = 0, \quad R_{00} = R_{zz} = \pm R_{0z}.$$

Поэтому в силу уравнений (1) должны выполняться соотношения

$$g_{rr}\gamma_{\varphi\varphi} - g_{\varphi\varphi}\gamma_{rr} = 0, \quad g_{00} - \gamma_{00} = g_{zz} - \gamma_{zz} = \pm[g_{0z} - \gamma_{0z}] = -P(r, \varphi),$$

где $P(r, \varphi)$ – некоторая неизвестная функция. Отсюда следует, что почти все компоненты метрического тензора γ_{ik} могут быть выражены через компоненты метрического тензора g_{ik} и функцию $F(r, \varphi) = P(r, \varphi) \pm g_{0z}$:

$$\gamma_{00} = 1 + F(r, \varphi), \quad \gamma_{zz} = -1 + F(r, \varphi), \quad \gamma_{0z} = \pm F(r, \varphi), \quad \gamma_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi}\gamma_{rr}/g_{rr}.$$

Учтем теперь, что тензор $\gamma_{ik}(r, \varphi)$ был получен преобразованием от исходных координат к некоторым неопределенным координатам, в которых компоненты $g_{z\varphi}$, g_{rz} , $g_{r\varphi}$ и g_{0r} оказываются равными нулю. Так как метрический тензор g_{ik} и в исходной системе координат, и в преобразованной не зависел от времени, то при переходе к неопределенным координатам время преобразовывалось по закону $t = t' + f^0(r', \varphi', z')$, а остальные функции f^α не зависели от t . В результате этого преобразования компонента γ_{00} не должна изменяться: $\gamma_{00} = 1$, поэтому $F(r, \varphi) = 0$, и мы будем иметь

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{zz} = -1, \quad \gamma_{0z} = 0, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi}\gamma_{rr}/g_{rr}. \quad (6)$$

Для получения уравнений, определяющих $\gamma_{\varphi\varphi}$ и g_{ik} , воспользуемся тем обстоятельством, что тензор γ_{ik} является метрическим тензором псевдоевклидова пространства-времени, тензор кривизны которого должен быть равен нулю: $R^i_{klm}(\partial\gamma) = 0$.

Единственная нетривиальная компонента этого тензора $R_{212}^1(\partial\gamma)$ дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}\gamma_{rr}}}\frac{\partial\gamma_{rr}}{\partial\varphi}\right\}+\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}\gamma_{rr}}}\frac{\partial\gamma_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right\}=0. \quad (7)$$

Еще два независимых уравнения можно получить, положив $i = k = 0$ и $i = k = 2$ в системе (1):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_{0z}}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial g_{rr}}{\partial\varphi}g_{rr}g_{\varphi\varphi}-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}g_{rr}^2\right]-\frac{\partial g_{0z}}{\partial r}\left[\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}g_{\varphi\varphi}^2-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}g_{rr}g_{\varphi\varphi}\right]+ \\ &+2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial r^2}\right]g_{rr}g_{\varphi\varphi}^2=2m^2g_{rr}^2g_{\varphi\varphi}^2g_{0z}, \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}\frac{\partial g_{rr}}{\partial\varphi}\right\}+\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right\}=-m^2\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{\varphi\varphi}}}[g_{\varphi\varphi}-\gamma_{\varphi\varphi}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для определения пяти независимых функций g_{0z} , g_{rr} , γ_{rr} , $g_{\varphi\varphi}$, $\gamma_{\varphi\varphi}$ мы имеем всего четыре уравнения – уравнения (7), (8) и последнее из соотношений (6).

Воспользуемся имеющимся произволом и наложим на компоненты тензоров g_{ik} и γ_{ik} одно условие: $g_{rr} = \gamma_{rr}$. Тогда последнее из соотношений (6) дает $g_{\varphi\varphi} = \gamma_{\varphi\varphi}$. С учетом этого второе уравнение системы (8) переходит в уравнение (7).

Поэтому для определения трех функций g_{0z} , γ_{rr} , $\gamma_{\varphi\varphi}$ у нас имеется всего лишь два уравнения. Совершенно очевидно, что этот произвол в выборе одной из функций отражает возможность проводить преобразования координат $r = f^1(r', \varphi')$, $\varphi = f^2(r', \varphi')$ так, чтобы после перехода к штрихованной системе координат компонента $g'_{r\varphi}$ оставалась равной нулю. Это условие из двух функций $f^1(r', \varphi')$ и $f^2(r', \varphi')$ оставляет независимой только одну. Выберем эту функцию так, чтобы компонента γ_{rr} равнялась -1 . Тогда из уравнения (7) будем иметь

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\sqrt{-\gamma_{\varphi\varphi}}\right]=0.$$

Решение этого уравнения

$$\gamma_{\varphi\varphi} = -[a_1 r + a_0]^2$$

содержит две произвольные константы, одна из которых выбором начала отсчета радиальной координаты может быть устранена, а другую положим равной единице, чтобы метрический тензор γ_{ik} в цилиндрической системе координат принял свои стандартные значения (2).

С учетом этих выражений оставшееся уравнение системы (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_{0z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial\varphi^2} - m^2 g_{0z} = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого линейного уравнения хорошо известно. Поскольку метрический тензор g_{ik} при $r \rightarrow \infty$ должен переходить в метрический тензор γ_{ik} , то решение уравнения (9), удовлетворяющее этому условию, можно записать следующим образом:

$$g_{0z} = C_0 K_0(mr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(mr) \cos(n\varphi + \psi_n),$$

где $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода, а C_0 , C_n и ψ_n – произвольные постоянные.

Окончательно для внешнего решения имеем

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + s \left\{ C_0 K_0(mr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(mr) \cos(n\varphi + \psi_n) \right\}, \\ g_{0z} &= C_0 K_0(mr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(mr) \cos(n\varphi + \psi_n), \\ g_{zz} &= -1 + s \left\{ C_0 K_0(mr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(mr) \cos(n\varphi + \psi_n) \right\}, \\ g_{rr} &= -1, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $s = \pm 1$.

Постоянные C_0 , C_n , ψ_n и знак s определяются при сшивании внутреннего и внешнего решений на границе источника гравитационного поля. Так как в нашей постановке задачи источником является бесконечно тонкий цилиндр, то построить внутреннее решение невозможно, поэтому оставим коэффициенты C_0 , C_n , ψ_n и s в выражении (10) произвольными.

Исследуем полученное решение. Поскольку функция $K_n(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотический вид $K_n(x) = \sqrt{\pi/2x} \exp(-x)$, то при $mr \rightarrow \infty$ будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + s \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} \exp(-mr) \left\{ C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\varphi + \psi_n) \right\}, \\ g_{0z} &= \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} \exp(-mr) \left\{ C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\varphi + \psi_n) \right\}, \\ g_{zz} &= -1 + s \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} \exp(-mr) \left\{ C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\varphi + \psi_n) \right\}, \\ g_{rr} &= -1, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2. \end{aligned}$$

Наличие экспоненциального множителя в этих выражениях показывает, что при $mr \rightarrow \infty$ метрический тензор g_{ik} достаточно быстро стремится к своему псевдоевклидову пределу γ_{ik} .

При $x = mr \rightarrow 0$ функция $K_n(x)$ является неограниченно возрастающей:

$$K_0(x) \sim \ln x, \quad K_n(x) \sim x^{-n}, \quad n > 0.$$

Поэтому в зависимости от величины постоянных C_n и их знаков найдется такое значение $r = r_1$, при котором одна из компонент g_{00} и g_{zz} (но не обе одновременно) обратится в нуль. Это свойство является характерным для релятивистской теории гравитации и связано с наличием массы у гравитона. Оно приводит к появлению качественно новых свойств в движении тел, таких, например, как гравитационное отталкивание.

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны псевдориманова пространства-времени для метрики (10) имеют вид

$$\begin{aligned} sR_{101}^0 &= -R_{113}^0 = sR_{313}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial r^2}, \\ sR_{102}^0 &= sR_{323}^1 = -R_{123}^0 = -R_{213}^0 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[r \frac{\partial g_{0z}}{\partial r} - g_{0z} \right], \\ sR_{202}^0 &= sR_{323}^2 = -R_{223}^0 = -\frac{1}{2} \left[r \frac{\partial g_{0z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 g_{0z}}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Сворачивая индексы в этих выражениях и используя уравнение (9), найдем ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$sR_{00} = sR_{33} = R_{03} = \frac{m^2}{2} g_{0z}.$$

Скалярная кривизна R для этого решения вне источника равна нулю.

Прямой подстановкой можно убедиться, что дополнительные уравнения релятивистской теории гравитации $D_i[\sqrt{-g}g^{ik}] = 0$ для полученного нами внешнего решения (10) выполняются тождественно.

Исследуем теперь времениподобные геодезические метрики (10) в аксиально-симметричном случае. Ненулевые компоненты метрического тензора псевдориманова пространства-времени вне источника в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + C_0 K_0(mr), & g_{0z} &= sC_0 K_0(mr), \\ g_{zz} &= -1 + C_0 K_0(mr), & g_{rr} &= -1, & g_{\varphi\varphi} &= -r^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где C_0 – постоянная, величина которой определяется при сшивании внутреннего и внешнего решений на границе источника гравитационного поля. Так как у нас источником является бесконечно тонкий цилиндр, то оставим коэффициент C_0 в выражении (11) произвольным.

Однако знак этой постоянной можно определить, воспользовавшись принципом причинности. Согласно этому принципу световой конус эффективного псевдориманова пространства-времени для физических решений уравнений поля должен содержаться внутри светового конуса псевдоевклидова пространства-времени. Как показано в работе [1], для выполнения этого принципа необходимо и достаточно, чтобы произвольный изотропный вектор u^i псевдоевклидова пространства-времени был пространственноподобным вектором в эффективном псевдоримановом пространстве-времени:

$$\gamma_{ik} u^i u^k = 0, \quad g_{ik} u^i u^k \leq 0.$$

Подставляя в эти равенства выражения (2) и (11) для компонент метрических тензоров, получим

$$\begin{aligned} (u^0)^2 - (u^r)^2 - r^2 (u^\varphi)^2 - (u^z)^2 &= 0, \\ [1 + C_0 K_0(mr)] (u^0)^2 + 2sC_0 K_0(mr) u^0 u^z - \\ - (u^r)^2 - r^2 (u^\varphi)^2 - [1 - C_0 K_0(mr)] (u^z)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Вычитая из неравенства равенство, будем иметь

$$[u^0 + su^z]^2 C_0 K_0(mr) \leq 0.$$

Так как $K_0(mr) \geq 0$, то отсюда непосредственно следует, что константа C_0 должна быть отрицательной.

Учтем теперь, что при $x = mr \rightarrow 0$ функция $K_n(x)$ является неограниченно возрастающей: $K_0(x) \sim -\ln x$. Поэтому в зависимости от величины постоянной C_0 найдется такое значение $r = r_1$, при котором только компонента g_{00} метрического тензора g_{ik} обратится в нуль, в то время как остальные компоненты будут не равными нулю.

Изучим движение массивных частиц в метрике (11). Для этого запишем уравнения геодезических следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} + C_0 K'_0(mr)[u^0 + su^z]u^r &= 0, \\ \frac{du^r}{d\tau} + \frac{1}{2}C_0 K'_0(mr)[u^0 + su^z]^2 - r(u^\varphi)^2 &= 0, \\ \frac{du^\varphi}{d\tau} + \frac{2}{r}u^\varphi u^r &= 0, \\ \frac{du^z}{d\tau} - sC_0 K'_0(mr)[u^0 + su^z]u^r &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где τ – собственное время частицы и штрих означает производную по r .

Как известно [2], аксиально-симметричная метрика псевдориманова пространства-времени допускает три вектора Киллинга: ξ^t , ξ^φ и ξ^z , в результате чего проекции четырехвектора скорости на эти векторы Киллинга будут интегралами движения для уравнений геодезической. Поэтому несложно получить три первых интеграла системы уравнений (12):

$$\begin{aligned} u^0 &= \alpha_0 + s\alpha_3 - \alpha_0 C_0 K_0(mr), & u^\varphi &= \frac{\alpha}{r^2}, \\ u^z &= -\alpha_3 + s\alpha_0 C_0 K_0(mr), \end{aligned} \quad (13)$$

где α , α_0 и α_3 – некоторые постоянные. Выразим из соотношений (13) постоянные α_0 и α_3 через компоненты u^0 , u^z четырехвектора скорости частицы:

$$\alpha_0 = (u^0 + su^z), \quad \alpha_3 = s(u^0 + su^z)C_0 K_0(mr) - u^z.$$

Из этих выражений следует, что постоянные α_0 и α_3 однозначно определяются через значения u^0 , u^z и r в начальный момент $\tau = 0$ собственного времени. Так как $u^0 > 0$, то первое из выражений (13) позволяет утверждать, что $\alpha_0 + s\alpha_3 - \alpha_0 C_0 K_0(mr) > 0$ во всех точках траектории.

Четвертый интеграл движения для системы уравнений (12) представляет собой определение времениподобной геодезической: $g_{ik}u^i u^k = 1$. Подставляя в него выражения (11) и (13), найдем квадрат u^r :

$$(u^r)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \frac{\alpha^2}{r^2} - \alpha_0^2 C_0 K_0(mr). \quad (14)$$

Из этого соотношения непосредственно следует, что $\alpha_0 \neq 0$, т.к. иначе правая часть равенства (14) оказывается отрицательной.

Для выяснения знака радиального ускорения частицы учтем соотношения (13) и перепишем второе уравнение системы (12) в виде

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{\alpha_0^2 m C_0}{2} K_1(mr) + \frac{\alpha^2}{r^3}. \quad (15)$$

Прежде чем переходить к исследованию траектории движения массивной частицы в самом общем случае, рассмотрим сначала различные частные случаи. Предположим, что начальное значение $u^\varphi = 0$ и, следовательно, $\alpha = 0$. Тогда движение частицы будет происходить в одной плоскости, в качестве которой можно выбрать плоскость XOZ . В этом случае квадрат радиальной скорости принимает вид

$$(u^r)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \alpha_0^2 C_0 K_0(mr). \quad (16)$$

Из этого выражения следует, что в зависимости от соотношения между постоянными α_0 и α_3 возможны три режима движения частицы. Поскольку $C_0 K_0(mr) \leq 0$ и $K_0(mr) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то движение частицы будет финитным, если $\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 < 1$, и инфинитным, если $\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 \geq 1$. В последних двух случаях при $r \rightarrow \infty$ радиальная скорость частицы на бесконечности $u^r = \sqrt{\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1}$.

Интегрируя выражение (16), получим закон движения частицы $\tau = \tau(r)$:

$$\tau = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \alpha_0^2 C_0 K_0(mr)}}, \quad (17)$$

где r_0 – радиальная координата частицы в начальный момент собственного времени $\tau = 0$; знак плюс соответствует движению от оси z , а знак минус – к оси z . Совершенно аналогично из выражения (16) и первого из соотношений (13) можно найти закон движения частицы по координатному времени t :

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{[\alpha_0 + s\alpha_3 - \alpha_0 C_0 K_0(mr)] dr}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \alpha_0^2 C_0 K_0(mr)}}. \quad (18)$$

И, наконец, выражение (16) вместе с последним соотношением (13) дает уравнение траектории частицы $z = z(r)$:

$$z - z_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{[s\alpha_0 C_0 K_0(mr) - \alpha_3] dr}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \alpha_0^2 C_0 K_0(mr)}}, \quad (19)$$

где z_0 – значение координаты z частицы в начальный момент $\tau = 0$ собственного времени.

Так как при $\alpha = 0$ выражение (15) принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{\alpha_0^2 m |C_0|}{2} K_1(mr), \quad (20)$$

а функция $K_1(mr) > 0$ при $r \geq 0$, несложно доказать, что если уравнение $(u^r)^2 = 0$ имеет действительный корень, то он обязан быть однократным. Это означает, что точка $r = r_c < \infty$, в которой $(u^r)^2 = 0$, является точкой поворота. Поскольку при $r \rightarrow r_c$

интегралы в выражениях (17)–(19) сходятся, то отсюда следует, что частица при движении к точке $r = r_c$ достигает ее за конечное собственное и координатное время, причем координата z частицы в этой точке также конечна.

После достижения этой точки частица в силу выражения (20) начинает движение в направлении к источнику гравитационного поля и достигает границы $r = R > 0$ источника за конечные промежутки как собственного, так и координатного времени. Координата z частицы в момент касания границы источника также остается конечной. Для анализа движения частицы при $r < R$ необходимо использовать внутреннее решение уравнений релятивистской теории гравитации. Однако формальное устремление $R \rightarrow 0$ в выражениях (17)–(19) показывает, что все интегралы сходятся абсолютно, так что непрерывный переход к пределу $r \rightarrow 0$ будет обеспечен.

Рассмотрим теперь более общий случай $\alpha^2 \neq 0$. При этом траектория частицы будет пространственной кривой, и из выражений (13), (14) мы можем получить уравнение траектории $z = z(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \pm \alpha \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{[\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 + \alpha_0^2|C_0|K_0(mr)]r^2 - \alpha^2}}, \\ z &= z_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{[-\alpha_3 + s\alpha_0 C_0 K_0(mr)] r dr}{\sqrt{[\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 + \alpha_0^2|C_0|K_0(mr)]r^2 - \alpha^2}}.\end{aligned}\quad (21)$$

Законы движения частицы по этой траектории по собственному времени частицы τ и по координатному времени t имеют вид

$$\begin{aligned}\tau &= \pm \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{[\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 + \alpha_0^2|C_0|K_0(mr)]r^2 - \alpha^2}}, \\ t &= t_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{[\alpha_0 + s\alpha_3 + \alpha_0|C_0|K_0(mr)]r dr}{\sqrt{[\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 + \alpha_0^2|C_0|K_0(mr)]r^2 - \alpha^2}}.\end{aligned}\quad (22)$$

Как и во всех задачах небесной механики, типы траекторий, которые допускаются уравнениями движения, и законы движения частицы по этим траекториям существенно зависят от наличия корней уравнения $(u^r)^2 = 0$ и их кратности. Если это уравнение имеет в некоторой точке $r = r_1$ однократный корень, то подынтегральные выражения в соотношениях (21) и (22) будут иметь интегрируемую особенность в этой точке и, следовательно, точка $r = r_1$ будет просто точкой поворота траектории.

Сложнее обстоит дело в том случае, когда уравнение $(u^r)^2 = 0$ имеет кратные корни. Выясним условия, при которых это оказывается возможным, и определим максимальную величину кратности, которую могут достигать корни этого уравнения в зависимости от выбора постоянных α_0 , α и α_3 .

С математической точки зрения эта задача эквивалентна выяснению условий, при которых функция $(u^r)^2$ и ее первая производная обращаются в нуль в одной и той же точке. Поэтому, вводя обозначение $x = mr$, перепишем выражение (14) в виде

$$(u^r)^2 = \alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \frac{\alpha^2 m^2}{x^2} + \alpha_0^2 |C_0| K_0(x).$$

Найдем сначала условия, при которых это уравнение имеет хотя бы один действительный корень кратности не ниже двух. Для этого, как известно, необходимо, чтобы функция $(u'')^2$ и ее первая производная обращались в нуль в одной и той же точке:

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 + 2s\alpha_0\alpha_3 - 1 - \frac{\alpha^2 m^2}{x^2} + \alpha_0^2 |C_0| K_0(x) &= 0, \\ \frac{2\alpha^2 m^2}{x^3} - \alpha_0^2 |C_0| K_1(x) &= 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left[\frac{2\alpha^2 m^2}{|C_0| \alpha_0^2} - x^3 K_1(x) \right], \quad (24)$$

корни которой совпадают с корнями второго уравнения (23). Используя асимптотический вид $K_1(x)$, можно установить, что $x^3 K_1(x) \sim x^2$ при $x \ll 1$ и $x^3 K_1(x)$ убывает пропорционально $x^{5/2} \exp(-x)$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ функция $f(x)$ стремится к $2\alpha^2 m^2 / [|C_0| \alpha_0^2]$. Так как функция $K_1(x)$ при $0 < x < \infty$ принимает только положительные значения, то $f(x) < 2\alpha^2 m^2 / [|C_0| \alpha_0^2]$ в промежуточных точках и имеет только один минимум в точке $x = x_m$, которую можно найти из условия $df(x)/dx = 0$. Отсюда будем иметь $2K_1(x_m) - x_m K_0(x_m) = 0$.

Численное решение этого трансцендентного уравнения дает $x_m \simeq 2.40$, причем $x_m^3 K_1(x_m) \simeq 0.737$. Таким образом,

$$f(x) \geq f(x_m) = \frac{2\alpha^2 m^2}{|C_0| \alpha_0^2} - x_m^3 K_1(x_m),$$

и в зависимости от начальных условий при $\tau = 0$ для частицы функция $f(x)$ может как иметь, так и не иметь вещественных корней. Рассмотрим все допускаемые уравнениями (12) случаи.

I. Пусть значения α_0 и α таковы, что $f(x_m) > 0$. Как следует из выражения (24), это условие может быть выполнено, если

$$\frac{2\alpha^2 m^2}{|C_0| \alpha_0^2} > x_m^3 K_1(x_m) \simeq 0.737. \quad (25)$$

Тогда $f(x) > 0$ и второе уравнение (23) не имеет вещественных корней. Поэтому при выполнении условия (25) уравнение $(u'')^2 = 0$ не будет иметь вещественных кратных корней.

II. Пусть значения α_0 и α таковы, что $f(x_m) = 0$. Как следует из выражения (24), это условие может быть выполнено, если

$$\frac{2\alpha^2 m^2}{|C_0| \alpha_0^2} = x_m^3 K_1(x_m) \simeq 0.737. \quad (26)$$

В этом случае обращение функции $f(x)$ в нуль происходит в ее минимуме $x = x_m \simeq 2.40$. Следовательно, и первая производная этой функции в точке $x = x_m$ будет равна нулю. Вторая производная функции $f(x)$ в точке минимума, как известно, не равна нулю и

является положительной величиной. Это означает, что при выполнении условия (26) и при

$$\alpha_3 = \frac{s}{4\alpha_0} \left\{ 2 - 2\alpha_0^2 - 2\alpha_0^2 |C_0| K_0(x_m) + \alpha_0^2 |C_0| x_m K_1(x_m) \right\} \quad (27)$$

уравнение $(u^r)^2 = 0$ имеет в точке $x = x_m$ трехкратный вещественный корень. Поэтому при стремлении $x = mr$ к этой точке интегралы для φ , τ и t в соотношениях (21), (22) будут расходиться. Вследствие этого проекция траектории на плоскость XOY будет асимптотически приближаться к окружности $mr = x_m$, совершая бесконечное число оборотов вокруг оси z , и массивная частица, двигаясь по этой траектории, затратит бесконечное время ($\tau \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) для достижения этой окружности. Поведение же функции $z = z(r)$ зависит от того, будет или нет равна нулю компонента u^z в точке $x = x_m$.

Если $u^z(x_m) = 0$, то с учетом выражений (13) и (27) можно убедиться, что это уравнение будет иметь решение, когда

$$|C_0| < \frac{2}{2K_0(x_m) + x_m K_1(x_m)}.$$

При выполнении этого неравенства корень уравнения $u^z(x_m) = 0$ будет единственным и однократным. Поэтому подынтегральное выражение в соотношении (21) для $z = z(r)$ в окрестности точки $mr = x_m$ будет иметь интегрируемую особенность вида $[\sqrt{(x - x_m)}]^{-1}$. Следовательно, координата z частицы в этом случае будет стремиться к конечному пределу, если $mr \rightarrow x_m$. Это означает, что пространственная траектория частицы, являющаяся довольно сложной спиралью, будет приближаться к окружности $mr = x_m$, лежащей в плоскости

$$z = z_0 \pm \frac{1}{m} \int_{mr_0}^{mr} \frac{[-\alpha_3 + s\alpha_0 C_0 K_0(x)] x dx}{\sqrt{[\alpha_0^2 + 2s\alpha_0 \alpha_3 - 1 + \alpha_0^2 |C_0| K_0(x)] x^2 - m^2 \alpha^2}}.$$

Если же $u^z(x_m) \neq 0$, то интеграл $z = z(r)$ расходится и при приближении mr к x_m координата z частицы становится бесконечной.

При выполнении условия (26) возможно движение и по винтовой линии, лежащей на цилиндрической поверхности $mr = x_m$, причем шаг винта зависит от скорости частицы в начальный момент времени.

III. Пусть значения α_0 и α таковы, что $f(x_m) < 0$. Как следует из выражения (24), это условие может быть выполнено, если

$$\frac{2\alpha^2 m^2}{|C_0| \alpha_0^2} < x_m^3 K_1(x_m) \simeq 0.737. \quad (28)$$

Тогда функция $f(x)$ обращается в нуль в двух точках: $x = x_1 < x_m$ и $x = x_2 > x_m$, причем эти корни функции $f(x)$ являются однократными.

Поэтому при выполнении условия (28) уравнение $(u^r)^2 = 0$ будет иметь два двукратных вещественных корня: $x = x_1 < x_m$ и $x = x_2 > x_m$. Так как в этом случае подынтегральные выражения в равенствах (21), (22) будут иметь особенности вида $|(x - x_1)(x - x_2)|^{-1}$, то интегралы $\varphi = \varphi(r)$, $\tau = \tau(r)$ и $t = t(r)$ при $mr = x_{1,2}$ будут

расходящимися. Следовательно, проекция траектории на плоскость XOY будет асимптотически приближаться к окружностям $mr = x_{1,2}$, совершая бесконечное число оборотов вокруг оси z . Для достижения этих окружностей массивной частице потребуется бесконечное время как по собственным часам, так и по координатному времени t .

Поведение же проекции траектории на ось z существенно зависит от того, обращается в нуль компонента u^z в точках $mr = x_{1,2}$ или нет. Если в этих точках $u^z \neq 0$, то при $mr \rightarrow x_{1,2}$ координата z частицы становится бесконечной. Если же $u^z = 0$ хотя бы в одной из точек $x = x_{1,2}$, то в этой точке подынтегральное выражение в соотношении $z = z(r)$ не будет иметь особенности и при mr , стремящемся к этому значению, координата z частицы будет конечной. В зависимости от того, в одной или в обеих точках выполняется равенство $u^z = 0$, вид пространственной траектории будет различным.

Отметим также, что при выполнении условия (28) возможно движение частицы по винтовым линиям, лежащим на цилиндрических поверхностях $mr = x_{1,2}$.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов. Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Препринт ИФВЭ 95-128, 1995.
- [2] А. Лайтман и др. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 28.I.1997 г.

I. P. Denisova

CALCULATION OF PARTICULAR SOLUTION IN THE RELATIVISTIC THEORY OF GRAVITATION BY INDEFINITE COORDINATE METHOD

An exact solution to equations of the relativistic theory of gravitation by using the indefinite coordinate method is obtained for gravitational field of the infinitely thin source, placed along z axis. A motion of massive particles in this field is studied.