Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, Трехпетлевая β -функция $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 3, 437–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:31:04

© 2004 г.

А. А. Солошенко*, К. В. Степаньянц*

ТРЕХПЕТЛЕВАЯ β -ФУНКЦИЯ $N = 1$
СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ,
РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Вычислен трехпетлевой вклад в эффективное действие $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными. На основе полученных результатов исследуется проблема аномалий в рассматриваемой модели.

Ключевые слова: суперсимметрия, регуляризация, высшие ковариантные производные, размерная редукция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно [1], что в суперсимметричных теориях аксиальная аномалия и аномалия следа тензора энергии-импульса принадлежат одному супермультиплету. В силу теоремы Адлера–Бардина [2], [3] аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, тогда как аномалия следа пропорциональна β -функции [4]. Поэтому суперсимметрия, по-видимому, должна приводить к тому, что в суперсимметричных теориях поправки к β -функции должны существовать только в однопетлевом приближении [5]. Этот факт действительно имеет место в $N = 2$ суперсимметричных теориях [6]. Однако вычисления, выполненные для $N = 1$ суперсимметричных моделей в рамках метода размерной редукции [7], показали, что двухпетлевой вклад в β -функцию оказывается отличным от нуля. Полученное противоречие в литературе получило название *проблемы аномалий*.

Предпринимались неоднократные попытки решения этой проблемы. Например, в работе [8] возникновение проблемы аномалий объяснялось различием между вильсоновским эффективным действием и производящим функционалом Γ для одночастично-неприводимых диаграмм. При этом утверждалось, что константа связи в вильсоновском действии имеет только однопетлевую поправку, тогда как константа связи в эффективном действии Γ имеет поправки во всех порядках теории возмущений. Различие в поведении констант связи связывалось с некоторым дополнительным аномальным

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: solosh@theor.phys.msu.su; stepan@theor.phys.msu.su

вкладом. При этом для β -функции было получено точное во всех порядках выражение, связывающее ее с аномальной размерностью суперполей материи. Ранее такое выражение было построено в работе [9] исходя из требования ренорминвариантности инстантонных вкладов в эффективное действие и получило название *точная β -функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова* (НШВЗ). Для случая $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, который будет рассматриваться в этой работе, точная β -функция НШВЗ имеет следующий вид:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi} (1 - \gamma(\alpha)), \quad (1)$$

где $\gamma(\alpha)$ – аномальная размерность суперполя материи. Оказалось, что β -функция НШВЗ согласуется с трехпетлевыми вычислениями, выполненными с использованием размерной редукции в работах [10], только с точностью до переопределения перенормированной константы связи [11]. В принципе схему, в которой получается точная β -функция, можно построить, устанавливая ее связь с $\overline{\text{MS}}$ -схемой в каждом порядке теории возмущений [12]. Кроме того, необходимо заметить, что точная β -функция НШВЗ также получается не только при использовании размерной редукции, но и в дифференциальной перенормировке [13]. Такое вычисление в двух петлях было проведено в работе [14] для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Еще одним шагом в решении проблемы аномалий является работа [15]. В ней было показано, что преобразования масштабирования полей в суперсимметричных теориях являются аномальными, благодаря чему в зависимости от выбираемой нормировки полей может возникать либо чисто однопетлевой результат, либо точная β -функция НШВЗ. В случае так называемой голоморфной нормировки, для которой перенормированное действие записывается в виде

$$S_{\text{ren}} = \frac{1}{4e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \\ + Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}), \quad (2)$$

было высказано предположение, что β -функция является чисто однопетлевой, тогда как при канонической нормировке, в которой

$$S_{\text{ren}} = \frac{1}{4e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \\ + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}), \quad (3)$$

β -функция имеет поправки от всех порядков теории возмущений и совпадает с точной β -функцией НШВЗ. Однако такое решение противоречит явным двухпетлевым вычислениям, проведенным в рамках метода размерной редукции.

Было бы естественно предположить, что в голоморфной нормировке чисто однопетлевой результат для β -функции может возникать при использовании регуляризации

высшими ковариантными производными [16], дополненной регуляризацией Паули–Вилларса для устранения остаточных однопетлевых расходимостей. Известно, что на однопетлевом уровне результаты вычислений в такой регуляризации всегда согласуются с результатами вычислений в размерной регуляризации (редукции) [17]. Конкретные двухпетлевые вычисления при использовании регуляризации высшими производными были впервые выполнены в работах [18], [19] для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики. При этом оказалось, что метод высших ковариантных производных позволяет значительно более эффективно проводить исследование квантовых поправок, поскольку он дает возможность правильно вычислять аномальные вклады и лишен противоречий, присущих методу размерной редукции [20]. (Необходимо отметить, что регуляризация с помощью размерной редукции [21], в отличие от размерной регуляризации [22], является математически противоречивой [23].) Более того, метод высших производных позволяет дать простое и естественное решение проблемы аномалий, которое соединяет между собой решения, предложенные в работах [8] и [15]. Детально эти вопросы будут обсуждаться ниже на основе выполненного вычисления трехпетлевой двухточечной функции Грина калибровочного поля.

Статья организована следующим образом. Основные сведения об $N = 1$ суперсимметричной электродинамике и ее регуляризации с помощью метода высших производных напоминаются в разделе 2. Структура трехпетлевой двухточечной функции Грина калибровочного поля анализируется в разделе 3, где также показано, что расходимости в этой функции Грина существуют только в однопетлевом приближении. В разделе 4 приводится решение проблемы аномалий, следующее из результатов данной работы. Полученные результаты обсуждаются в разделе 5, а некоторые технические детали вычислений приведены в приложениях А и Б.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

$N = 1$ суперсимметричная электродинамика в суперпространстве описывается действием

$$S_0 = \frac{1}{4e^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}). \quad (4)$$

При этом ϕ и $\tilde{\phi}$ – киральные суперполя материи, а V – абелево вещественное суперполе, которое в качестве одной из компонент содержит калибровочное поле A_μ . Суперполе W_a является суперсимметричным аналогом тензора напряженности калибровочного поля и в абелевом случае определяется как

$$W_a = \frac{1}{16} \overline{D}(1 - \gamma_5) D [(1 + \gamma_5) D_a V], \quad (5)$$

где суперсимметричная ковариантная производная D записывается в виде

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu.$$

Для того чтобы регуляризовать модель (4) при помощи метода высших ковариантных производных, ее действие модифицируется следующим образом:

$$S_0 \rightarrow S = S_0 + S_\Lambda = \frac{1}{4e^2} \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) W_b + \\ + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}). \quad (6)$$

Заметим, что в силу абелевости рассматриваемой модели суперполе W^a является калибровочно-инвариантным, благодаря чему регуляризующее слагаемое будет содержать обычные, а не ковариантные производные.

Квантование модели (6) производится стандартными методами, подробно описанными в книге [24], и здесь не обсуждается. Отметим только, что калибровку удобно фиксировать добавлением слагаемых

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{64e^2} \int d^4x d^4\theta \left(V D^2 \bar{D}^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V + V \bar{D}^2 D^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V \right), \quad (7)$$

где

$$D^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 + \gamma_5)D, \quad \bar{D}^2 \equiv \frac{1}{2} \bar{D}(1 - \gamma_5)D,$$

поскольку после добавления таких членов кинетический член калибровочного поля записывается в наиболее простом виде:

$$S_{\text{gauge}} + S_{\text{gf}} = \frac{1}{4e^2} \int d^4x d^4\theta V \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) V. \quad (8)$$

В силу абелевости исследуемой модели диаграммы с духовыми петлями отсутствуют.

Индекс расходимости для модели (6) оказывается равным (см., например, [18])

$$\omega_\Lambda = 2 - 2n(L - 1) - E_\phi(n + 1), \quad (9)$$

где L — количество петель, а E_ϕ — число внешних ϕ -линий. Поскольку в соответствии с формулой (9) даже при $n \geq 2$ в однопетлевых диаграммах по-прежнему существуют остаточные расходимости, то необходимо добавить в производящий функционал детерминанты Паули–Вилларса [3]. После этого, принимая во внимание, что в силу суперсимметричной калибровочной инвариантности

$$V \rightarrow V - \frac{1}{2}(A + A^+), \quad \phi \rightarrow e^A \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow e^{-A} \tilde{\phi},$$

где A — произвольное скалярное киральное суперполе, перенормированное действие рассматриваемой модели может быть представлено в виде

$$S_{\text{ren}}^h = \frac{1}{4e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) W_b + \\ + Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}), \quad (10)$$

производящий функционал окажется равным

$$Z = \int DV D\phi D\tilde{\phi} \prod_i (\det PV(V, M_i))^{c_i} \exp(iS_{\text{ren}}^h + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}}), \quad (11)$$

где

$$S_{\text{source}} = \int d^4x d^4\theta JV + \int d^4x d^2\theta (j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}) + \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*) \quad (12)$$

обозначает все члены с источниками,

$$\begin{aligned} (\det PV(V, M))^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} \exp \left\{ i \left[Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^* e^{2V} \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi} \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^* \Phi^* \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

а коэффициенты c_i удовлетворяют уравнениям

$$\sum_i c_i = 1, \quad \sum_i c_i M_i^2 = 0.$$

Далее мы будем предполагать, что $M_i = a_i \Lambda$, где a_i – некоторые постоянные. Добавление детерминантов Паули–Вилларса позволяет сократить остаточные расходимости во всех однопетлевых диаграммах. Важно отметить, что величина $Z(e, \Lambda/\mu)$ в формулах (10) и (13) является одной и той же. Это необходимо для того, чтобы регуляризовать расходимости в диаграммах с контрчленными вставками, которые не содержат внутренних фотонных линий.

Производящий функционал для связанных функций Грина в наших обозначениях записывается в виде

$$W = -i \ln Z,$$

а эффективное действие получается с помощью преобразования Лежандра:

$$\Gamma = W - \int d^4x d^4\theta JV - \int d^4x d^2\theta (j\phi + \tilde{j}\tilde{\phi}) - \int d^4x d^2\bar{\theta} (j^*\phi^* + \tilde{j}^*\tilde{\phi}^*), \quad (14)$$

причем источники J , j и $\tilde{j}$ должны быть выражены через поля V , ϕ и $\tilde{\phi}$ при помощи уравнений

$$V = \frac{\delta W}{\delta J}, \quad \phi = \frac{\delta W}{\delta j}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\delta W}{\delta \tilde{j}}. \quad (15)$$

Для получения эффективного действия необходимо вычислить все одночастично-неприводимые диаграммы в исследуемом порядке теории возмущений, выражения для которых строятся при помощи правил Фейнмана, которые для рассматриваемой теории могут быть сформулированы следующим образом.

1. Внешним линиям соответствует множитель

$$\prod_E \int \frac{d^4 p_{E_V}}{(2\pi)^4} V(p_{E_V}) \int \frac{d^4 p_{E_\phi}}{(2\pi)^4} \phi(p_{E_\phi}) \times \cdots \times (2\pi)^4 \delta\left(\sum_E p_E\right),$$

где индекс E нумерует внешние импульсы.

2. Каждой внутренней линии суперполя V соответствует пропагатор

$$\frac{8e^2}{(k^2 + i0)(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})} \delta^4(\theta_1 - \theta_2).$$

3. Каждой внутренней линии $\phi - \phi^*$ или $\tilde{\phi} - \tilde{\phi}^*$ соответствует пропагатор

$$-\frac{1}{16(k^2 + i0)} \bar{D}^2 D^2 \delta^4(\theta_1 - \theta_2).$$

(Заметим, что действие рассматриваемой теории квадратично по суперполям материи, что позволяет сформулировать более простые правила Фейнмана по сравнению с правилами Фейнмана для модели Весса–Зумино.)

4. Поля Паули–Вилларса присутствуют только в замкнутых петлях. При этом каждой внутренней линии $\Phi - \Phi^*$ или $\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}^*$ соответствует пропагатор

$$-\frac{1}{16(k^2 - M_i^2 + i0)} \bar{D}^2 D^2 \delta^4(\theta_1 - \theta_2),$$

а каждой внутренней линии $\Phi - \tilde{\Phi}$ или $\Phi^* - \tilde{\Phi}^*$ —

$$\frac{M_i}{4(k^2 - M_i^2 + i0)} \bar{D}^2 \delta^4(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{и} \quad \frac{M_i}{4(k^2 - M_i^2 + i0)} D^2 \delta^4(\theta_1 - \theta_2).$$

Также для каждой замкнутой петли полей Паули–Вилларса необходимо добавить $-\sum_i c_i$.

5. Каждой замкнутой петле соответствует интегрирование по петлевому импульсу $\int d^4 k / (2\pi)^4$.

6. Каждая вершина дает интегрирование по соответствующему θ : $\int d^4 \theta$.

7. Для каждой диаграммы необходимо найти числовой коэффициент, что можно сделать, например, при помощи разложения производящего функционала (11) в ряд по теории возмущений.

3. ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ДВУХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

Диаграммы, дающие вклад в трехпетлевую двухточечную функцию Грина калибровочного поля, показаны на рис. 1–8. При этом по каждой внутренней линии суперполей материи могут распространяться поля ϕ , $\tilde{\phi}$ или поля Паули–Вилларса. Поэтому трехпетлевой вклад в эффективное действие можно представить в виде

$$\Delta\Gamma_V^{(3)} = \text{Re} \int d^2\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} W_a(p) C^{ab} W_b(-p) \times \\ \times (f_{1\text{-loop}} + f_{\bigcirc} + f_{\bigcirc_{PV}} + f_{\bigcirc_{\circ}} + f_{\bigcirc_{\circ PV}} + f_{\bigcirc\bigcirc} + f_{\times\times} + f_{\times} + f_{\times 2}), \quad (16)$$

где были использованы следующие обозначения:

$f_{1\text{-loop}}$ – вклад однопетлевых диаграмм, показанных на рис. 1, с учетом вкладов полей Паули–Вилларса;

$f_{\bigcirc}$ – суммарный вклад диаграмм с одной петлей суперполей ϕ и $\tilde{\phi}$, показанных на рис. 5;

$f_{\bigcirc_{PV}}$ – вклад диаграмм с одной петлей полей Паули–Вилларса, показанных на рис. 5;

$f_{\bigcirc_{\circ}}$ – вклад двухпетлевых диаграмм, показанных на рис. 2 (без вкладов полей Паули–Вилларса), и трехпетлевых диаграмм, показанных на рис. 4, которые содержат внутреннюю петлю суперполей материи или однопетлевую контрчленную вставку на внутренней фотонной линии, причем по внешней петле распространяются поля ϕ и $\tilde{\phi}$;

$f_{\bigcirc_{\circ PV}}$ – вклад двухпетлевых диаграмм, показанных на рис. 2 с внутренней петлей полей Паули–Вилларса, и трехпетлевых диаграмм, показанных на рис. 4, в которых по внешней петле распространяются поля Паули–Вилларса;

$f_{\bigcirc\bigcirc}$ – вклад остальных диаграмм с двумя петлями суперполей материи, показанных на рис. 3;

$f_{\times}$ – вклад диаграмм со вставкой однопетлевых и двухпетлевых контрчленов, показанных на рис. 6;

$f_{\times\times}$ – вклад диаграмм с двумя вставками однопетлевых контрчленов, показанных на рис. 8;

$f_{\times 2}$ – вклад диаграмм с одной вставкой однопетлевых контрчленов, показанных на рис. 7.

Рис. 1. Однопетлевые диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики.

Явные выражения, полученные для всех этих величин после вычисления диаграмм Фейнмана, приведены в работе [25]. Поскольку они являются достаточно громоздкими,

Рис. 2. Двухпетлевые диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики.

Рис. 3. Диаграммы Фейнмана, имеющие две внутренние петли суперполей материи, к каждой из которых прикрепена своя внешняя линия.

то здесь мы их не выписываем. В качестве примера в приложении А приводится выражение для наиболее нетривиального вклада $f_{\bigcirc}$ и описывается способ вычисления его расходящейся части.

Заметим, что в качестве одной из проверок правильности вычислений использовалось сокращение всех неинвариантных слагаемых, пропорциональных

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta V(p, \theta) V(-p, \theta).$$

Проведем теперь краткий анализ вкладов различных диаграмм.

1. Вклад $f_{\bigcirc\bigcirc} = 0$, поскольку замена $\phi \leftrightarrow \tilde{\phi}$ в одной из петель приводит к изменению знака диаграммы. Это означает, что в рассматриваемой теории диаграммы, имеющие одинаковые суперполя в обоих петлях (ϕ и ϕ или $\tilde{\phi}$ и $\tilde{\phi}$), компенсируются диаграммами с петлями разных суперполей (ϕ и $\tilde{\phi}$). Для соответствующих вкладов полей Паули–Вилларса ситуация несколько сложнее, но результат оказывается тем же самым.

2. Сумма вкладов $f_{\times\times}$, $f_{\times}$ и $f_{\times 2}$ полностью согласуется с точным выражением для суммы диаграмм с контрчленными вставками

$$-\ln Z \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \int d^4 x d^2 \theta W_a C^{ab} W_b + \text{конечные члены}, \quad (17)$$

построенным в работе [20], причем $f_{\times 2} = 0$.

Рис. 4. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в трехпетлевую β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики и соответствующие учету поправок к фотонному пропагатору.

При этом константа Z (см., например, [18]) может быть записана в виде

$$Z\left(e, \frac{\Lambda}{\mu}\right) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left(\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right) - \gamma_2 \alpha^2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_2 \right) + O(\alpha^3), \quad (18)$$

где $\gamma_2 \alpha^2$ представляет собой двухпетлевой вклад в аномальную размерность, а также предполагается, что для компенсации расходимостей в однопетлевом приближении к действию добавлены контрчлены вида

$$\begin{aligned} \Delta S = & -\frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_1 \right) \operatorname{Re} \int d^4 x d^2 \theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) W_b + \\ & + \frac{e^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) \int d^4 x d^4 \theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}). \end{aligned} \quad (19)$$

При этом b_1 , g_1 и g_2 представляют собой произвольные конечные постоянные, выбор которых фиксирует произвол в выборе схемы перенормировки.

Рис. 5. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в трехпетлевую β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики и имеющие одну внутреннюю петлю суперполей материи.

3. Вклады $f_{\bigcirc \circ PV}$ и $f_{\bigcirc PV}$ являются конечными и не влияют на расходящуюся часть эффективного действия. Это может быть доказано следующим образом. Интеграл,

Рис. 6. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики и содержащие вставки однопетлевых и двухпетлевых контрчленов во внутренние линии суперполей материи.

Рис. 7. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в трехпетлевую β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики и содержащие одну вставку однопетлевых контрчленов во внутренние линии суперполей материи.

определяющий вклад $f_{\text{O} \circ \text{PV}}$, можно представить в виде

$$f_{\text{O} \circ \text{PV}} = f_1\left(\frac{p}{\Lambda}\right) + \ln \frac{\Lambda}{\mu} f_2\left(\frac{p}{\Lambda}\right), \quad (20)$$

где f_1 и f_2 – некоторые функции, аналитические при $p^2 = 0$. При этом если положить $p = 0$, то оказывается, что $f_1(0) = 0$ и $f_2(0) = 0$, благодаря чему ведущие слагаемые в разложениях этих функций по p^2 убывают по крайней мере как p^2/Λ^2 (детали вычислений можно найти в работе [25]). Это, в свою очередь, означает, что

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_{\text{O} \circ \text{PV}} = 0. \quad (21)$$

Рис. 8. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в трехпетлевую β -функцию $N = 1$ суперсимметричной электродинамики и содержащие две вставки однопетлевых контрчленов во внутренние линии суперполей материи.

Аналогичным образом доказывается конечность вклада f_{OPV} . Действительно, из размерных соображений очевидно, что

$$f_{\text{OPV}} = f\left(\frac{p}{\Lambda}\right). \quad (22)$$

Однако, полагая $p = 0$, можно доказать [25], что $f(0) = 0$. Это и означает, что вклад f_{OPV} является конечным и исчезает при снятии регуляризации.

Конечность величин f_{OPV} и f_{OPV} означает, что сумма всех диаграмм с внутренними петлями полей Паули–Вилларса, имеющих внутренние фотонные линии, является конечной. При этом расходимости, вообще говоря, могут существовать в отдельных таких диаграммах. Однако поскольку регуляризация Паули–Вилларса по своему определению подразумевает существование расходимостей в отдельных диаграммах и их сокращение при суммировании диаграмм, то дополнительная регуляризация в данном случае не требуется.

4. Анализ оставшихся выражений f_{O} и f_{O} является достаточно нетривиальным, поскольку содержащиеся в них интегралы имеют достаточно сложную структуру. Однако достаточно очевидно, что эти интегралы являются функциями переменных $e_0, \Lambda/p$ (в рассматриваемых вкладах учитываются все контрчленные вставки на линиях калибровочного поля, благодаря чему зависимость от e и Λ/μ объединяется в зависимость от $e_0 = e_0(e, \Lambda/\mu)$).

В работе [25] показано, что для вкладов f_{O} и f_{O} существует предел

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} f\left(e_0, \frac{\Lambda}{p}\right) \Big|_{p=0} \quad (23)$$

(для вклада f_{O} это доказано в приложении А), причем с точностью до членов рассматриваемого порядка в разложении по константе связи этот предел может быть записан в виде

$$\frac{1}{16\pi^2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2} z_1^2 \right) \Big|_{p=0}, \quad (24)$$

где через z_1 и z_2 обозначены следующие евклидовы интегралы:

$$\begin{aligned} z_1 &\equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e^2}{k^2(k+p)^2(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})}, \\ z_2 &\equiv - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e^4}{k^2 l^2 (k+p)^2 (l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} - \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e^4}{k^2 l^2 (l+p)^2 (k+l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} + \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e^4(k+l+2p)^2}{k^2(k+p)^2 l^2(l+p)^2 (k+l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} - \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4e^4}{k^2(k+p)^2(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})^2} \left(\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(k+l)^2} - \right. \\ &\left. - \sum_i c_i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + M_i^2)((k+l)^2 + M_i^2)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_1 \right) \left(1 + \frac{k^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая существование предела (24), можно записать

$$f_{\bigcirc} + f_{\bigcirc\bigcirc} = \frac{1}{16\pi^2} \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2} z_1^2 \right) + \text{конечные члены.} \quad (25)$$

(Несложно убедиться, что с точностью до членов рассматриваемого порядка в разложении по константе связи величина $z_1 + z_2 + z_1^2/2$ также зависит только от e_0 и Λ .)

Обратим теперь внимание на то, что величины z_1 и z_2 присутствуют в выражении для двухпетлевой двухточечной функции Грина суперполя материи. Более точно, в соответствии с результатами работы [19] члены эффективного действия, квадратичные по полям материи и не содержащие поля V , с точностью до членов рассматриваемого порядка малости можно записать в виде

$$\Gamma_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{4} \int d^4 \theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\phi^*(p, \theta) \phi(-p, \theta) + \tilde{\phi}^*(p, \theta) \tilde{\phi}(-p, \theta)) ZG, \quad (26)$$

где

$$G = 1 - z_1 - z_2 + O(\alpha^3)$$

представляет собой результат вычисления двухпетлевых диаграмм, показанных на рис. 9, без учета контрчленных вставок на линиях суперполей материи, а константа перенормировки Z дается формулой (18). При этом важно отметить, что величина ZG по построению является конечной с точностью до членов порядка α^3 .

Собирая все вклады, получаем, что сумма диаграмм, определяющих двух- и трехпетлевой вклады в двухточечную функцию калибровочного поля в $N = 1$ суперсимметричной электродинамике, с точностью до членов порядка α^3 может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_V^{(2,3)} &= \frac{1}{16\pi^2} \text{Re} \int d^2 \theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} W_a(p) C^{ab} W_b(-p) \times \\ &\times \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2} z_1^2 - \ln Z + \text{конечные члены} \right) = \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \text{Re} \int d^2 \theta \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} W_a(p) C^{ab} W_b(-p) (\ln(ZG) + \text{конечные члены}). \quad (27) \end{aligned}$$

Рис. 9. Диаграммы Фейнмана, дающие нетривиальный вклад в двухпетлевую аномальную размерность $N = 1$ суперсимметричной электродинамики.

При этом видно, что двух- и трехпетлевые вклады автоматически оказываются конечными и контрчлены необходимо добавлять только в однопетлевом приближении. Поэтому при использовании регуляризации высшими производными будет справедливо равенство

$$\frac{4\pi^2}{e_0^2} = \frac{\pi}{\alpha} - \ln \frac{\Lambda}{\mu} - b_1 + O(\alpha^3), \quad (28)$$

которое свидетельствует о том, что расходимости в двухточечной функции Грина калибровочного поля присутствуют только в однопетлевом приближении.

Окончательный результат для вклада двухточечной функции Грина калибровочного поля в перенормированное эффективное действие в трехпетлевом приближении запишется в виде

$$\Delta\Gamma_V = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \int d^2\theta \frac{d^4p}{(2\pi)^4} W_a(p) C^{ab} W_b(-p) \left(\ln \frac{\mu}{p} - \ln(ZG) + \text{конечные члены} \right) \quad (29)$$

и имеет поправки от всех порядков теории возмущений.

4. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АНОМАЛИЙ

В рассматриваемой теории аксиальный ток j_5^μ , суперток S^μ и тензор энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$ являются компонентами одного вещественного векторного суперполя

$$J^\mu = j_5^\mu + \bar{\theta} S^\mu + \bar{\theta} \gamma_\nu \gamma_5 \theta \Theta^{\mu\nu} + \dots, \quad (30)$$

которое в терминах суперполей V , W_a , ϕ и $\tilde{\phi}$ может быть записано в виде

$$J^\mu = \frac{1}{e_0^2} W^* \gamma^\mu W - \frac{1}{12} Z (3 \bar{D}_a (\phi^* e^{2V}) e^{-2V} (\gamma^\mu (1 + \gamma_5) D)_a (e^{2V} \phi) + 3 \bar{D}_a (\tilde{\phi}^* e^{-2V}) e^{2V} (\gamma^\mu (1 + \gamma_5) D)_a (e^{-2V} \tilde{\phi}) - 2 \bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi})). \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) определяют выражения для j_5^μ , S^μ и $\Theta^{\mu\nu}$, которые в явном виде могут быть получены с использованием компонентных разложений суперполей теории.

Используя выражение для дивергенции аксиального тока, несложно проверить, что на квантовом уровне закон сохранения тока J^μ должен выглядеть следующим образом:

$$\langle (1 + \gamma_5) \gamma^\mu D_c J_\mu \rangle = \frac{1}{8\pi^2} (1 + \gamma_5) D_c (W_a C^{ab} W_b).$$

При этом угловые скобки обозначают среднее, которое соответствует функционалу (11):

$$\begin{aligned} \langle A \rangle \equiv & \frac{1}{Z[j=0, J]} \int DV D\phi D\tilde{\phi} A[\phi, \tilde{\phi}, V] \prod_i (\det PV(V, M_i))^{c_i} \times \\ & \times \exp(iS_{\text{ren}}^h + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}}), \end{aligned}$$

где источник J необходимо выразить через поля с помощью (15).

Однако, с другой стороны, можно проверить, что аномалия следа тензора энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}$ должна быть пропорциональна β -функции, определяемой как

$$\beta = \frac{d}{d \ln \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right), \quad (32)$$

где зависимость перенормированной константы связи e от затравочной константы связи e_0 и Λ/μ определяется из уравнения

$$\frac{1}{e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) = \frac{1}{e_0^2}.$$

Более точно, имеет место равенство

$$\langle (1 + \gamma_5) \gamma^\mu D_c J_\mu \rangle = \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} \frac{1}{8\pi} (1 + \gamma_5) D_c (W_a C^{ab} W_b).$$

Поэтому суперсимметрия требует, чтобы β -функция (32) полностью определялась однопетлевым приближением:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}.$$

Именно это равенство получается при дифференцировании формулы (28) по $\ln \mu$. Поэтому полученные результаты полностью согласуются со структурой супермультиплетта аномалий.

Отметим, что можно определять β -функцию другим способом. Действительно, рассмотрим поперечную часть двухточечной функции Грина калибровочного поля:

$$\begin{aligned} \Pi_{1/2} \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V_x \delta V_y} \Big|_{J=0} e^{ip_\mu x^\mu + iq_\mu y^\mu} = \\ = \frac{1}{8\pi} (2\pi)^4 \delta^4(p+q) p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y) d^{-1} \left(\alpha, \frac{\mu}{p} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\Pi_{1/2} \equiv -\frac{1}{16\partial^2} D^a \overline{D}^2 C_{ab} D^b.$$

Тогда соотношение

$$\tilde{\beta}(d(\alpha, x)) \equiv -\frac{\partial}{\partial \ln x} d(\alpha, x) \Big|_{x=1}$$

будет определять β -функцию Гелл-Манна–Лоу.

Дифференцируя формулу (29) по $\ln p$, мы получаем, что

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi} (1 - \tilde{\gamma}(\alpha)),$$

где

$$\tilde{\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial \ln x} \ln(ZG), \quad x \equiv \frac{\mu}{p},$$

и было принято во внимание, что произведение ZG зависит от α и μ/p . При этом видно, что величина $\tilde{\beta}$ имеет поправки во всех порядках теории возмущений.

Таким образом, β -функция, которая пропорциональна аномалии следа, является чисто однопетлевой, тогда как физическая β -функция, связанная с перенормированным эффективным действием, имеет поправки во всех порядках теории возмущений. Это не противоречит ни аргументам, основанным на структуре супермультиплета аномалий, ни петлевым вычислениям. Остается только ответить на вопрос о том, почему β -функции, определенные различными способами, оказываются различными.

Обычно в теории поля оба этих определения считаются эквивалентными с точностью до произвола в определении перенормированной константы связи. Однако это имеет место только в том случае, когда производящий функционал не зависит от точки нормировки μ . Действительно, если эффективное действие не зависит от точки нормировки μ при фиксированном значении e_0 , то дифференцируя уравнение (33) по $\ln \mu$, мы получим

$$0 = \tilde{\beta}(d(\alpha, x)) - \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} d(\alpha, x).$$

В частности, при $x = 1$ справедливо равенство

$$\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}) = \beta(\alpha) \frac{d\tilde{\alpha}}{d\alpha}, \quad (34)$$

где $\tilde{\alpha} \equiv d(\alpha, 1)$. Таким образом, если производящий функционал не зависит от μ , то приведенные выше определения β -функции эквивалентны.

Однако в рассматриваемом случае производящий функционал (11) на самом деле зависит от точки нормировки μ при фиксированном значении e_0 . Действительно, зависимость от μ в формуле (11) возникает из-за зависящей от μ константы перенормировки Z . Эту зависимость можно было бы попытаться исключить при помощи замены $\phi \rightarrow Z^{-1/2} \phi$. Однако в соответствии с результатами работы [15] такая замена имеет аномальный якобиан, равный экспоненте от величины (17) (этот якобиан легко вычисляется в методе высших производных и фактически представляет собой экспоненту от

суммы диаграмм с контрчленными вставками). Поскольку выражение (17) содержит $\ln Z$, который зависит от μ , то даже после замены $\phi \rightarrow Z^{-1/2}\phi$ производящий функционал (11) будет содержать $\ln Z$ и, следовательно, зависеть от μ . Поэтому уравнение (34), которое связывало бы β -функции, определенные различными способами, теперь не имеет места. Поэтому функции β и $\tilde{\beta}$ в рассматриваемом случае не являются эквивалентными.

В принципе можно определять производящий функционал так, чтобы он не зависел от точки нормировки. Этого можно добиться двумя способами. Мы можем предположить, что затравочная константа связи e_0 не фиксирована, а некоторым специальным образом зависит от μ . В этом случае β -функция (32) будет содержать поправки от всех порядков теории возмущений, но уже не будет пропорциональна аномалии следа. Другая возможность заключается в том, чтобы использовать каноническую нормировку суперполей материи и определять производящий функционал как

$$Z = \int DV D\phi D\tilde{\phi} \prod_i (\det' PV(V, M_i))^{c_i} \exp(iS_{\text{ren}}^c + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}}), \quad (35)$$

где

$$S_{\text{ren}}^c = \frac{1}{4e^2} Z_3 \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \text{Re} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) W_b + \\ + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^* e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V} \tilde{\phi}), \quad (36)$$

а детерминанты Паули–Вилларса определяются как

$$(\det' PV(V, M))^{-1} \equiv \int D\Phi D\tilde{\Phi} \exp \left\{ i \left[\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^* e^{2V} \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{\Phi}^* e^{-2V} \tilde{\Phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi} \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^* \Phi^* \right] \right\}. \quad (37)$$

(Вновь кинетический член полей Паули–Вилларса выбирается так, чтобы все расходимости теории были регуляризованы.)

Тогда β -функция (32) будет пропорциональна аномалии следа, но в этом случае не справедлива теорема Адлера–Бардина. Таким образом, в обоих случаях выполнение равенства (34) не противоречит структуре супермультиплетов аномалий.

Важно заметить, что для всех определений производящего функционала перенормированное эффективное действие в физической схеме перенормировки и функция Гелл-Манна–Лоу будут одни и те же.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено вычисление трехпетлевой двухточечной функции Грина калибровочного поля $N = 1$ суперсимметричной электродинамики при использовании регуляризации высшими производными. Было установлено, что при стандарт-

ном определении производящего функционала расходимости в этой функции Грина присутствуют только в однопетлевом приближении, однако конечная часть содержит вклады от всех порядков теории возмущений и связана с двухточечной функцией Грина суперполя материи. При этом доказано, что отсутствуют какие-либо противоречия со структурой супермультиплета аномалий.

Полученные результаты полностью подтверждают результаты работы [20], в которой было указано, что как отличие результата для β -функции (32), полученного с использованием высших производных, от результата, полученного с помощью размерной редукции, так и сама проблема аномалий связаны с математической противоречивостью метода размерной редукции. В частности, при регуляризации высшими производными теорема Адлера–Бардина справедлива для схем перенормировки, не нарушающих суперсимметрию, что, по всей видимости, не выполняется при регуляризации методом размерной редукции [26].

Подчеркнем, что результаты данной работы согласуются с решением проблемы аномалий, предложенным в [8]. Основное различие при этом заключается в том, что в соответствии с нашими результатами однопетлевым является перенормированное действие $S_{\text{ген}}$, тогда как в [8] предполагалось, что однопетлевым является вильсоновское действие S_W . Поэтому с точностью до замены $S_W \rightarrow S_{\text{ген}}$ (которая придает осмысленность формуле $\langle e^{iS_W} \rangle = e^{i\Gamma}$, существенно используемой в [8]) наши результаты согласуются с решением проблемы аномалий, предложенным Шифманом и Вайнштейном. Также полученные результаты согласуются с выводами, сделанными в работе [15].

К сожалению, проведенное исследование пока ограничено абелевым случаем. Для суперсимметричной теории Янга–Миллса вычисления с использованием метода высших ковариантных производных представляют большую сложность, поскольку введение в теорию слагаемого с высшими *ковариантными* производными [27] существенно усложняет форму действия. В этом случае значительно упростить ситуацию может замена высших ковариантных производных на обычные производные. При этом, конечно, будет нарушена калибровочная инвариантность, что может привести к нарушению тождеств Уорда некоторыми локальными неинвариантными слагаемыми. Тем не менее выбор специальной схемы вычитаний позволяет восстановить калибровочную инвариантность и использовать при вычислениях неинвариантные регуляризации [28]. Для абелевых суперсимметричных теорий такая схема построена в работе [29], а для неабелевых – в [30]. Поэтому вполне возможно, что применение указанной выше регуляризации к суперсимметричным теориям Янга–Миллса позволит провести аналогичные вычисления и в неабелевом случае. В настоящий момент эта работа находится в процессе выполнения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример вычисления расходящейся части интеграла, регуляризованного высшими производными

В качестве примера, иллюстрирующего вычисление трехпетлевых вкладов, рассмот-

рим выражение

$$\begin{aligned}
 f_{\bigcirc} = & -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\
 & \times \frac{e^4}{k^2 (1 + (-1)^n k^{2n} / \Lambda^{2n}) l^2 (1 + (-1)^n l^{2n} / \Lambda^{2n}) q^2 (q + p)^2 (q + k + l)^2} \times \\
 & \times \left\{ \frac{2k^2 ((2q + k + l)^2 + (2q + k + l + p)^2 - p^2)}{(q + k)^2 (q + l)^2 (q + k + p)^2} - \frac{4p^2}{(q + k)^2 (q + k + p)^2} - \right. \\
 & - \frac{4(q + p)^2}{(q + k)^2 (q + k + p)^2} + \frac{4(q + p)^2}{(q + k + p)^2 (q + k + l + p)^2} + \frac{4}{(k + q)^2} - \\
 & - \frac{2p^4}{(q + k)^2 (q + k + p)^2 (q + k + l + p)^2} - \frac{4k^2}{(q + k)^2 (q + k + p)^2} - \\
 & - \frac{2k^2 p^2}{(q + k)^2 (q + k + p)^2 (q + k + l + p)^2} - \frac{2(k + l)^2}{(q + k + l + p)^2 (q + k)^2} + \\
 & + \frac{(k + l)^2 p^2}{(q + k)^2 (q + k + p)^2 (q + k + l + p)^2} - \frac{4(2q + k + l + p)^2}{(q + k + p)^2 (q + l)^2} + \\
 & + \frac{2(k + l)^2 (2q + k + l + p)^2}{(q + k + l + p)^2 (q + l)^2 (q + k + p)^2} + \\
 & \left. + \frac{2p^2 (2q + k + l + p)^2}{(q + k + l + p)^2 (q + l)^2 (q + k + p)^2} \right\}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить его расходящуюся часть, мы докажем, что существует предел

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} f_{\bigcirc} \Big|_{p=0}. \quad (39)$$

После несложных преобразований выражение (39) при $p = 0$ в пространстве Евклида может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 \Lambda \frac{d}{d\Lambda} f_{\bigcirc} \Big|_{p=0} = & \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2e^4}{k^2 (1 + k^{2n} / \Lambda^{2n}) l^2 (1 + l^{2n} / \Lambda^{2n})} \times \\
 & \times \frac{1}{q^4 (q + l)^2} \left\{ \frac{2}{(q + k)^2} - \frac{2k^2}{(q + k)^4} - \right. \\
 & - \frac{12k^2}{(q + k)^2 (q + k + l)^2} + \frac{4(q + l)^2}{(q + k)^2 (q + k + l)^2} + \\
 & \left. + \frac{2(k^4 + k^2 l^2)}{(q + k)^4 (q + k + l)^2} + \frac{2k^2 (k + l)^2}{(q + k)^2 (q + k + l)^4} - \frac{(k + l)^2}{(q + k + l)^4} \right\}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Заметим, что, несмотря на кажущееся существование инфракрасных расходимостей в этом выражении, оно, как будет показано ниже, является конечным. Поэтому в принципе всегда можно считать, что из области интегрирования в этом выражении (а также в других аналогичных выражениях) исключены бесконечно малые окрестности вблизи сингулярных точек.

Для упрощения формулы (40) используются некоторые тождества, например

$$\begin{aligned} I &\equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k+q)^2 + q^2 - k^2}{k^2(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})l^2(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})q^4(q+k)^4(q+l)^2} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})k^4 l^4}, \end{aligned} \quad (41)$$

доказательство которого приведено в приложении Б. (Вновь подчеркнем, что в этом выражении из области интегрирования исключены бесконечно малые окрестности инфракрасных расходимостей.) С использованием тождества (41) и других аналогичных тождеств (см. [25]) правая часть формулы (40) может быть переписана в виде

$$\frac{1}{4\pi^2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e^4}{(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} \left\{ \frac{1}{2k^4 l^4} - \frac{1}{k^4 l^2 (k+l)^2} \right\}. \quad (42)$$

В приложении Б этот интеграл вычислен до конца и показано, что результат является некоторой конечной постоянной. Тем не менее в целях установления связи трехпетлевой β -функции и двухпетлевой аномальной размерности более удобно записать это выражение в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16\pi^2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \left(- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2e^4}{k^2 l^2 (k+p)^2 (l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e^4}{k^2 l^2 (l+p)^2 (k+l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e^4 (k+l+2p)^2}{k^2 (k+p)^2 l^2 (l+p)^2 (k+l+p)^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} \right) \Big|_{p=0}, \end{aligned} \quad (43)$$

поскольку такая форма записи наиболее удобна для получения тождества (25).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Некоторые вспомогательные тождества

Вычисление интеграла (42) производится следующим образом. Вначале, учитывая симметрию относительно замены $k \leftrightarrow l$, переписываем формулу (42) в виде

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} f \Big|_{p=0} &= - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ &\quad \times \frac{e^4}{(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})} \frac{k^2 + l^2 - (k+l)^2}{2k^4 l^4 (k+l)^2} = \\ &= \frac{n}{\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e^4 l^{2n}/\Lambda^{2n}}{(1+k^{2n}/\Lambda^{2n})(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})^2} \frac{k_\mu l_\mu}{k^4 l^4 (k+l)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Затем в интеграле по d^4k переходим к четырехмерным сферическим координатам, $(k, \theta_1, \theta_2, \varphi)$, в которых мера интегрирования по угловым переменным записывается в виде

$$d\Omega = d\theta_1 d\theta_2 d\varphi \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2.$$

При этом четвертую ось мы будем направлять вдоль вектора l_μ :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} f_{\bigcirc} \Big|_{p=0} = \frac{n}{\pi^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta_1 \sin^2 \theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^4 l^{2n} / \Lambda^{2n}}{(1 + k^{2n} / \Lambda^{2n})(1 + l^{2n} / \Lambda^{2n})^2} \frac{\cos \theta_1}{l^3 (k^2 + 2kl \cos \theta_1 + l^2)}. \quad (45)$$

Рис. 10. Контур C для вычисления интеграла по угловой переменной x .

Совершая замену переменных $x = \cos \theta_1$, можно свести интеграл по угловым переменным к интегралу по контуру C , показанному на рис. 10:

$$4\pi \int_{-1}^1 dx \frac{x\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2klx + l^2} = 2\pi \oint_C dx \frac{x\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2klx + l^2}. \quad (46)$$

Вычисляя этот интеграл стандартным образом по теории вычетов, получаем

$$2\pi \oint_C dx \frac{x\sqrt{1-x^2}}{k^2 + 2klx + l^2} = \begin{cases} -\frac{\pi^2 l}{k^3}, & k \geq l, \\ -\frac{\pi^2 k}{l^3}, & l \geq k. \end{cases} \quad (47)$$

Поэтому

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} f_{\bigcirc} \Big|_{p=0} = -\frac{ne^4}{8\pi^2(2\pi)^4} \int_0^\infty dl \frac{l^{2n} / \Lambda^{2n}}{(1 + l^{2n} / \Lambda^{2n})^2} \times \\ \times \left(\int_l^\infty dk \frac{l}{k^3(1 + k^{2n} / \Lambda^{2n})} + \int_0^l dk \frac{k}{l^3(1 + k^{2n} / \Lambda^{2n})} \right). \quad (48)$$

Совершая в первом интеграле замену переменных $x = l^2/\Lambda^2$, $y = \Lambda^2/k^2$, а во втором – замену $x = \Lambda^2/l^2$, $y = k^2/\Lambda^2$, получаем

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} f_{\bigcirc} \Big|_{p=0} &= -\frac{ne^4}{32\pi^2(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x^n}{(1+x^n)^2} \int_0^{1/x} \frac{dy}{1+y^{-n}} - \\ &\quad - \frac{ne^4}{32\pi^2(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x^n}{(1+x^n)^2} \int_0^{1/x} \frac{dy}{1+y^n} = \\ &= -\frac{ne^4}{32\pi^2(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2} = -\frac{e^4}{32\pi^2(2\pi)^4} = -\frac{\alpha^2}{32\pi^4}. \end{aligned} \quad (49)$$

Докажем теперь тождество (41). Для этого интеграл по d^4q в выражении

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2(q^2 + q_\mu k_\mu)}{k^2(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})l^2(1 + l^{2n}/\Lambda^{2n})q^4(q+k)^4(q+l)^2}$$

удобно записать в четырехмерных сферических координатах:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})l^2(1 + l^{2n}/\Lambda^{2n})} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty dq \frac{2(q + qk \cos \alpha)}{(q^2 + 2qk \cos \alpha + k^2)^2(q^2 + 2ql \cos \beta + l^2)} = \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})l^2(1 + l^{2n}/\Lambda^{2n})} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty dq \frac{1}{(q^2 + 2ql \cos \beta + l^2)} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{(q^2 + 2qk \cos \alpha + k^2)}, \end{aligned}$$

где через α обозначен угол между четырехмерными векторами k и q , а через β – угол между векторами q и l . Производя в последнем интеграле интегрирование по частям, после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})l^2(1 + l^{2n}/\Lambda^{2n})} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{k^2 l^2} - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2(q^2 + q_\mu l_\mu)}{q^4(q+k)^2(q+l)^4} \right\}. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении с очевидностью равен I . Поэтому окончательно получаем

$$I = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(1 + k^{2n}/\Lambda^{2n})(1 + l^{2n}/\Lambda^{2n})k^4 l^4}. \quad (50)$$

Тем же самым способом можно получить и другие аналогичные тождества, а также ряд тождеств для диаграмм, содержащих внутренние линии полей Паули–Вилларса.

Список литературы

- [1] *S. Ferrara, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1975. V. 87. P. 207; *T. E. Clark, O. Piquet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 143. P. 445; *O. Piquet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 196. P. 428; P. 447.
- [2] *S. L. Adler, W. A. Bardeen.* Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 1517.
- [3] *А. Славнов, Л. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [4] *S. L. Adler, J. C. Collins, A. Duncan.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1712.
- [5] *V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 157. P. 169.
- [6] *P. S. Howe, K. S. Stelle, P. S. West.* Phys. Lett. B. 1983. V. 124. P. 55.
- [7] *O. V. Tarasov, V. A. Vladimirov.* Phys. Lett. B. 1980. V. 96. P. 94; *M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel.* Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 1063; *W. Caswell, D. Zanon.* Phys. Lett. B. 1980. V. 100. P. 152.
- [8] *M. Shifman, A. Vainshtein.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 277. P. 456.
- [9] *V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 166. P. 329.
- [10] *L. Avdeev, O. Tarasov.* Phys. Lett. B. 1982. V. 112. P. 356; *I. Jack, D. Jones, C. North.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 473. P. 308; Phys. Lett. B. 1996. V. 386. P. 138.
- [11] *I. Jack, D. R. T. Jones.* Regularisation of supersymmetric theories. hep-ph/9707278.
- [12] *I. Jack, D. R. T. Jones, C. G. North.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 486. P. 479.
- [13] *D. Z. Freedman, K. Johnson, J. I. Latorre.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 353.
- [14] *J. Mas, M. Perez-Victoria, C. Seijas.* JHEP. 2002. V. 0203. P. 049; hep-th/0202082.
- [15] *N. Arkani-Hamed, H. Murayama.* JHEP. 2000. V. 0006. P. 030; hep-th/9707133.
- [16] *А. А. Славнов.* ТМФ. 1975. Т. 23. № 1. С. 3; *T. Bakeyev, A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [17] *P. Pronin, K. Stepanyantz.* Phys. Lett. B. 1997. V. 414. P. 117.
- [18] *A. Soloshenko, K. Stepanyantz.* Two-loop renormalization of $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. hep-th/0203118.
- [19] *А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 430.
- [20] *К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2004. Т. 140. № 1. С. 53.
- [21] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 193.
- [22] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [23] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 37.
- [24] *П. Уэст.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
- [25] *A. Soloshenko, K. Stepanyantz.* Three-loop β -function for $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. hep-th/0304083.
- [26] *Д. И. Казаков.* Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 272.
- [27] *P. West.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 113.
- [28] *A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 518. P. 195; *А. А. Славнов.* ТМФ. 2002. Т. 130. С. 3.
- [29] *А. А. Славнов, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2003. Т. 135. С. 265.
- [30] *А. А. Славнов, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 2004. Т. 139. № 2. С. 179.

Поступила в редакцию 22.X.2003 г.,
после доработки 12.I.2004 г.