Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, Построение классических тригонометрических r -матриц модели Тоды методом гамильтоновой редукции кокасательных расслоений над группами петель, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:39:55

Г. Э. Арутюнов*

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ r -МАТРИЦ МОДЕЛИ
ТОДЫ МЕТОДОМ ГАМИЛЬТОНОВОЙ
РЕДУКЦИИ КОКАСАТЕЛЬНЫХ
РАССЛОЕНИЙ НАД ГРУППАМИ ПЕТЕЛЬ

Показано, как классические тригонометрические r -матрицы модели Тоды возникают в результате гамильтоновой редукции кокасательных расслоений над группами петель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы – показать, как известные тригонометрические r -матрицы модели Тоды [1, 2] могут быть получены методом гамильтоновой редукции, примененным к кокасательному расслоению над группой петель.

Хорошо известно, что конечномерные динамические системы типа Тоды и Калоджеро–Мозера–Сазерленда получают соответствующей гамильтоновой редукцией инвариантных гамильтонианов, заданных на кокасательных расслоениях простых групп Ли [3, 4]. L -оператор, участвующий в представлении Лакса, возникает при этом как функция на редуцированном фазовом пространстве $\mathcal{P}$, а само представление Лакса $dL/dt = [M, L]$ – как уравнение движения на $\mathcal{P}$. Помимо того что такая конструкция придает L -оператору геометрический смысл, она также позволяет вычислить классическую r -матрицу (при условии, что она существует), т.е. доказать тем самым кинематическую интегрируемость изучаемой системы. Недавно этот подход был применен для вычисления динамических r -матриц модели Калоджеро–Мозера–Сазерленда [5]. Заметим, что рассматриваемые L -операторы не содержат спектрального параметра, который необходим для построения переменных действие-угол. Таким образом, встает вопрос о рассмотрении такой схемы гамильтоновой редукции, в которой бы возникало представление Лакса динамической системы со спектральным параметром.

Данная работа представляет собой перенесение конструкции [5] на аффинный случай. Мы покажем на примере модели Тоды, что представление Лакса со спектральным параметром можно получить, рассматривая гамильтонову редукцию кокасательного расслоения над группой (скрученных) петель. При этом петлевой параметр естественным

* Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия. E-mail: arut@genesis.mi.ras.ru

образом отождествляется со спектральным параметром. Важная особенность рассматриваемой редукции заключается в том, что редуцированное фазовое пространство оказывается конечномерным. r -Матрицы вычисляются так же, как в [5], и оказываются тригонометрическими решениями классического уравнения Янга–Бакстера.

Отметим, что само утверждение о связи тригонометрических r -матриц с аффинными алгебрами хорошо известно (см., например, [6]). Как будет следовать из нашего рассмотрения, с точки зрения гамильтоновой редукции эта связь обусловлена наличием разложения Ивасава для бесконечномерной группы петель. Для упрощения изложения мы ограничиваемся рассмотрением аффинных алгебр высоты 1.

2. АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ ИВАСАВЫ

Пусть $\widehat{\mathcal{G}}$ обозначает алгебру Каца–Мули высоты 1 ранга l . Известно [7], что фактор-алгебра $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{G}}/C$ алгебры $\widehat{\mathcal{G}}$ по ее одномерному центру C имеет две основные реализации – стандартную и каноническую, возникающие из соответствующих реализаций $\widehat{\mathcal{G}}$.

Пусть A_{ij} – матрица Картана алгебры $\widehat{\mathcal{G}}$, а a_i – отметки диаграммы Дынкина. Напомним, что как абстрактная алгебра $\mathcal{G}$ порождается $3(l+1)$ образующими $\{e_i, h_i, f_i\}$, $i = 0, \dots, l$, и соотношениями

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, & [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \\ [h_i, e_j] &= A_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -A_{ij} f_j, \\ (\text{ad } e_i)^{1-A_{ij}} e_j &= (\text{ad } f_i)^{1-A_{ij}} f_j = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а также дополнительным соотношением $\sum_{i=0}^l a_i h_i = 0$, фиксирующим центральный элемент $c = \sum_{i=0}^l a_i h_i$ алгебры (1) равным нулю. $\mathcal{G}$ является градуированной алгеброй Ли.

1. Стандартная градуировка $\mathcal{G}$. Положим $\deg e_i = \deg f_i = \deg h_i = 0$, $i = 1, \dots, l$, и $\deg e_0 = -\deg f_0 = 1$, где тройка образующих e_0, h_0, f_0 соответствует специальной вершине диаграммы Дынкина. Нетрудно показать, что градуированная таким образом алгебра $\mathcal{G}$ изоморфна алгебре петель $\overline{\mathcal{G}}[\lambda, \lambda^{-1}]$ над простой конечномерной алгеброй Ли $\overline{\mathcal{G}}$, полученной из $\widehat{\mathcal{G}}$ вычеркиванием специальной вершины диаграммы Дынкина: $\mathcal{G} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \overline{\mathcal{G}} \otimes \lambda^k$. Заметим, что пространство $\mathcal{G}^k = \overline{\mathcal{G}} \otimes \lambda^k$ линейно порождается элементами

$$E_\alpha^k = e_\alpha \otimes \lambda^k, \quad h_i^k = h_i \otimes \lambda^k, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2)$$

где $\alpha \in \Delta$, Δ – множество корней $\overline{\mathcal{G}}$.

2. Каноническая градуировка $\mathcal{G}$. Каноническая градуировка $\mathcal{G} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{G}^k$ задается следующим образом: $\deg e_i = -\deg f_i = 1$, $i = 0, \dots, l$, и $\deg h_i = 0$. Можно показать, что при таком выборе градуировки $\mathcal{G}$ изоморфна алгебре скрученных петель $\mathcal{G} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \overline{\mathcal{G}}_{k \bmod h} \otimes \lambda^k$, построенной с помощью разложения $\overline{\mathcal{G}}$ по собственным значениям кокстеровского автоморфизма C :

$$\overline{\mathcal{G}}_k = \{x \in \overline{\mathcal{G}}, \quad C(x) = \omega^k x, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}\},$$

где h – число Кокстера для $\widehat{\mathcal{G}}$.

Выберем теперь в $\mathcal{G}$ линейный базис однородных относительно канонической градуировки элементов. Если $k \neq 0 \bmod h$, то пространство $\mathcal{G}^k$ линейно порождается элементами $E_\alpha^k = e_\alpha \otimes \lambda^k$, где $\alpha \in \Delta^k$ и $\Delta^k = \{\alpha \in \Delta, e_\alpha \in \bar{\mathcal{G}}_k\}$, т.е. e_α пробегает множество всех корневых векторов, лежащих в $\bar{\mathcal{G}}_k$. Если же $k = 0 \bmod h$, то векторы $h_i^k = h_i \otimes \lambda^k$ составляют базис в $\mathcal{G}^k$. Итак,

$$\mathcal{G} = \sum_{k \neq 0 \bmod h} \sum_{\alpha \in \Delta^k \bmod h} \mathbf{C} E_\alpha^k + \sum_k \mathbf{C} h_i^{kh}.$$

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения. Обозначим через $n_+(n_-)$ подалгебру в $\mathcal{G}$, порожденную как векторное пространство кратными коммутаторами элементов e_i (f_i), $0 \leq i \leq l$, а через $\bar{h}$ – картановскую подалгебру в $\bar{\mathcal{G}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть алгебра $\mathcal{G}$ градуирована стандартным образом, тогда

$$\begin{aligned} n_+ &= (\bar{n}_+ \otimes 1) \oplus (\bar{\mathcal{G}} \otimes \lambda \mathbf{C}[\lambda]), \\ n_- &= (\bar{n}_- \otimes 1) \oplus (\bar{\mathcal{G}} \otimes \lambda^{-1} \mathbf{C}[\lambda^{-1}]), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{n}_\pm$ – нильпотентные подалгебры в треугольном разложении $\bar{\mathcal{G}} = \bar{n}_+ \oplus \bar{h} \oplus \bar{n}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образующие Шевалле (1) для $\mathcal{G}$ можно выбрать следующим образом. Выберем в $\bar{\mathcal{G}}$ вектор $\bar{e}_0$ ($\bar{f}_0$), соответствующий старшему (младшему) корню, и нормируем его условием $(\bar{e}_0, \bar{f}_0) = 1$. Обозначим через $\bar{e}_i$ ($\bar{f}_i$), $1 \leq i \leq l$, корневые векторы, отвечающие простым положительным (отрицательным) корням и коммутирующие как $[\bar{e}_i, \bar{f}_i] = \bar{h}_i$. Тогда генераторы Шевалле для $\mathcal{G}$ даются векторами

$$e_0 = \bar{f}_0 \otimes \lambda, \quad f_0 = \bar{e}_0 \otimes \lambda^{-1}, \quad h_0 = [e_0, f_0]$$

вместе с $\{\bar{e}_i, \bar{h}_i, \bar{f}_i\}_{1 \leq i \leq l}$. Рассматривая теперь кратные коммутаторы генераторов e_i , получаем требуемое утверждение. Реализация образующих Шевалле, приведенная в предложении 1, называется стандартной.

Пусть $\mathcal{G}$ градуирована стандартным образом. Обозначим через $\mathcal{G}^R$ вещественную нормальную форму $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}^R$ порождается базисом $E_\alpha^k = e_\alpha \otimes \lambda^k$, $h_i^k = h_i \otimes \lambda^k$ над полем $\mathbf{R}$. Рассмотрим в $\mathcal{G}^R$ инволюцию τ , задаваемую на образующих формулами

$$\tau(E_\alpha^k) = -E_{-\alpha}^{-k}, \quad \tau(h_i^k) = -h_i^{-k}. \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Алгебра $\mathcal{K}$ неподвижных точек инволюции τ в $\mathcal{G}^R$ порождается линейным базисом

$$\mathcal{K} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} \mathbf{R} V_\alpha^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbf{R} V_\alpha^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k > 0}} \mathbf{R} H_i^k, \quad (5)$$

где $V_\alpha^k = E_\alpha^k - E_{-\alpha}^{-k}$ и $H_i^k = h_i^k - h_i^{-k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения тривиально.

На алгебре $\mathcal{G}^R$ существует невырожденная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно присоединенного действия. Нетрудно видеть, что эта форма отрицательно определена на $\mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{K}$ является компактной подалгеброй в $\mathcal{G}^R$. Таким образом, $\mathcal{G}^R$ распадается в прямую сумму $\mathcal{G}^R = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{K}$ и векторного пространства $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} \mathbf{R} W_{\alpha}^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbf{R} W_{\alpha}^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k \geq 0}} \mathbf{R} T_i^k, \quad (6)$$

где $W_{\alpha}^k = E_{\alpha}^k + E_{-\alpha}^{-k}$ и $T_i^k = h_i^k + h_i^{-k}$. Указанное разложение является аналогом разложения Картана для полупростой конечномерной алгебры Ли над полем $\mathbf{R}$.

В дальнейшем важную роль будет играть аналог разложения Ивасава. Заметим, что любой вектор $x \in \mathcal{G}$ представим в виде

$$\begin{aligned} x = & \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} a_{\alpha}^k (E_{\alpha}^k - E_{-\alpha}^{-k}) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} a_{\alpha}^0 (E_{\alpha}^0 - E_{-\alpha}^0) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k > 0}} a_i^k (h_i^k - h_i^{-k}) + \\ & + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} b_{\alpha}^k (E_{\alpha}^k + E_{-\alpha}^{-k}) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} b_{\alpha}^0 (E_{\alpha}^0 + E_{-\alpha}^0) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k \geq 0}} b_i^k (h_i^k + h_i^{-k}). \end{aligned}$$

Это разложение можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned} x = & \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} (a_{\alpha}^k - b_{\alpha}^k) V_{\alpha}^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (a_{\alpha}^0 - b_{\alpha}^0) V_{\alpha}^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k > 0}} (a_i^k - b_i^k) H_i^k + \\ & + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} 2b_{\alpha}^k E_{\alpha}^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} 2b_{\alpha}^0 E_{\alpha}^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k > 0}} 2b_i^k h_i^k + \sum_{1 \leq i \leq l} 2b_i^0 h_i. \end{aligned}$$

В силу предложения 1 элемент

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k > 0}} 2b_{\alpha}^k E_{\alpha}^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} 2b_{\alpha}^0 E_{\alpha}^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ k > 0}} 2b_i^k h_i^k$$

лежит в n_+ . Следовательно, $\mathcal{G}^R$ распадается в прямую сумму трех подалгебр: $\mathcal{G}^R = \mathcal{K} \oplus n_+ \oplus a$, где a – вложение $\bar{h}$ в $\mathcal{G}^R$. Это разложение будем называть разложением Ивасава для $\mathcal{G}^R$. Разложение Ивасава имеет глобальный аналог $G = N_+ AK$, в котором G обозначает группу петель, а N_+ , A и K – односвязные группы Ли с алгебрами n_+ , a и $\mathcal{K}$, соответственно. Отметим, что N_+ можно рассматривать как группу, состоящую из граничных значений голоморфных отображений

$$\gamma: \{z: |z| < 1\} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}^R$$

таких, что $\gamma(0)$ лежит в нильпотентной подгруппе группы $\bar{\mathcal{G}}^R$, отвечающей положительным корням [8].

Рассмотрим теперь разложение Картана для канонической реализации $\mathcal{G}$. Инволюция задается той же формулой (4), поэтому собственные подпространства автоморфизма τ в $\mathcal{G} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\mathcal{G}}_k \pmod{h} \otimes \lambda^k$ имеют вид

$$\mathcal{K} = \sum_{\substack{k > 0 \\ k \not\equiv 0 \pmod{h}}} \sum_{\alpha \in \Delta^k \pmod{h}} \mathbf{R}V_{\alpha}^k + \sum_{\substack{k > 0 \\ 1 \leq i \leq l}} \mathbf{R}H_i^{kh} \quad (7)$$

и

$$\mathcal{M} = \sum_{\substack{k > 0 \\ k \not\equiv 0 \pmod{h}}} \sum_{\alpha \in \Delta^k \pmod{h}} \mathbf{R}W_{\alpha}^k + \sum_{\substack{k > 0 \\ 1 \leq i \leq l}} \mathbf{R}T_i^{kh}. \quad (8)$$

Как и для стандартной реализации, из этих представлений немедленно вытекает разложение Ивасава для алгебры петель, скрученных с помощью кокстеровского автоморфизма.

3. ГАМИЛЬТОНОВА РЕДУКЦИЯ КОКАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ НАД ГРУППОЙ ЛИ

Пусть G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}$, а T^*G – кокасательное расслоение над G . Используя левые сдвиги, можно отождествить T^*G с $G \times \mathcal{G}^*$, где $\mathcal{G}^*$ есть дуальное пространство к $\mathcal{G}$. Таким образом, точка T^*G – это пара (g, ξ) , где $g \in G$ и $\xi \in \mathcal{G}^*$. Каноническая пуассонова структура на T^*G имеет вид

$$\{\phi, \psi\} = \{\phi, \psi\}_{\text{К}} + \partial^i \phi L_i \psi - \partial^i \psi L_i \phi, \quad \phi, \psi \in \text{Fun}(T^*G). \quad (9)$$

Поясним обозначения в последней формуле. Выберем в пространствах $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ дуальные базисы $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ так, что $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_i^j$ и $\xi = \xi_i e^i$. Скобка $\{\phi, \psi\}_{\text{К}}$ означает скобку Кириллова ограничения функций ϕ и ψ на $\mathcal{G}^*$:

$$\{\phi, \psi\}_{\text{К}} = f_{ij}^k \xi_k \partial^i \phi \partial^j \psi, \quad (10)$$

где f_{ij}^k – структурные константы $\mathcal{G}$ в базисе $\{e_i\}$ и $\partial^i \phi = (\partial / \partial \xi_i) \phi$. Оператор L_i рассматривается как левоинвариантное векторное поле на G , порожденное элементом e_i :

$$(L_i \phi)(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(g e^{t e_i}).$$

Группа G действует на T^*G левыми и правыми сдвигами:

$$g' \cdot (g, \xi) = (g'g, \xi), \quad (g, \xi) \cdot g' = (g(g')^{-1}, \text{Ad}_{g'}^* \xi). \quad (11)$$

Эти действия порождают фундаментальные векторные поля на T^*G , являющиеся гамильтоновыми. Соответствующие гамильтонианы имеют вид

$$H_X^L(g, \xi) = \langle \xi, g^{-1} X g \rangle, \quad H_X^R(g, \xi) = -\langle \xi, X \rangle, \quad X \in \mathcal{G}. \quad (12)$$

В самом деле, из (9) получаем

$$\{H_X^R, \psi\} = \langle \text{ad}_X^* \xi, \nabla \psi \rangle - L_X \psi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi(ge^{-tX}, \text{Ad}_{e^{tX}}^* \xi),$$

где $\nabla \psi = e_i \partial^i \psi$. Аналогичное соотношение можно записать и для H_X^L .

Пусть подгруппы $\mathcal{H}^L$ и $\mathcal{H}^R$ группы G с алгебрами Ли $\mathfrak{h}^L$ и $\mathfrak{h}^R$ действуют на T^*G левыми и правыми сдвигами, соответственно. В силу сказанного выше эти действия гамильтоновы, а соответствующие отображения момента $\mu^L: T^*G \rightarrow (\mathfrak{h}^L)^*$ и $\mu^R: T^*G \rightarrow (\mathfrak{h}^R)^*$ даются формулами

$$\begin{aligned} \langle \mu^L(g, \xi), X \rangle &= \langle \xi, g^{-1}Xg \rangle, & X \in \mathfrak{h}^L, \\ \langle \mu^R(g, \xi), X \rangle &= -\langle \xi, X \rangle, & X \in \mathfrak{h}^R. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим редукцию T^*G по действию группы $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^L, \mathcal{H}^R)$. Согласно общей схеме гамильтоновой редукции [9] фактор-пространство

$$\mathcal{P}_\mu = \mu^{-1}(T^*G) / \text{Stab } \mu$$

уровня постоянного момента $\mu = \text{const}$ по его стабилизатору $\text{Stab } \mu$ в $\mathcal{H}$ снабжается при некоторых дополнительных условиях симплектической структурой. Соответствующую скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{P}_\mu}$ можно рассчитать, используя множество $\text{Fun}(T^*G)^{\mathcal{H}}$ $\mathcal{H}$ -инвариантных функций на T^*G , а именно,

$$\{\phi, \psi\}_{\mathcal{P}_\mu} = \{\phi, \psi\}|_{\mu=\text{const}}, \quad \phi, \psi \in \text{Fun}(T^*G)^{\mathcal{H}}. \quad (14)$$

Пусть теперь G есть группа вещественных (скрученных) петель, а $G = N_+AK$ – ее разложение Ивасава, описанное в предыдущем разделе. Положим $\mathcal{H}^L = N_+$ и $\mathcal{H}^R = K$, а также выберем по аналогии с конечномерной ситуацией [4, 5] $\mu^R = 0$ и $\mu^L = I = \sum_{i=0}^l f_i \in n_- = (n_+)^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Стабилизатор элемента I совпадает с N_+ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра Ли $\text{Stab } I$ определяется условием

$$\langle I, [X, Y] \rangle = 0, \quad X, Y \in \mathcal{L}ie(\text{Stab } I), \quad (15)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает билинейную симметрическую форму на $\mathcal{G}$, согласованную как со стандартной, так и с канонической градуировкой. Покажем, что если $X, Y \in n_+$, то (15) выполнено.

Пусть $\mathcal{G}$ градуирована стандартным образом. Для любых однородных элементов $X, Y \in n_+$ имеем $\deg X, \deg Y \geq 0$, так что $\deg[X, Y] \geq 0$. Поскольку $I \in \mathcal{G}^{-1} \oplus \mathcal{G}^0$ и форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ согласована со стандартной градуировкой, т.е. $\langle \mathcal{G}^k, \mathcal{G}^m \rangle = \delta_{k, -m}$, то возникают два нетривиальных случая:

а) $[X, Y] \in \bar{n}_+$, т.е. этот коммутатор порожден элементами e_i , $1 \leq i \leq l$, и потому не содержит в своем разложении по корневому базису в $\bar{\mathcal{G}}$ ни одного простого корня, отсюда следует (15);

б) $[X, Y] \in \mathcal{G}^1$, т.е. один из элементов, скажем X , содержит один генератор e_0 ; тогда $\langle f_0, [X, Y] \rangle = -\langle [X, f_0], Y \rangle$. Замечая, что $[X, f_0] \in \bar{n}_+$, и пользуясь изотропностью $\bar{n}_+$, получаем (15).

Случай канонической градуировки рассматривается аналогично. Предложение 3 доказано.

Из предложения 3 следует, что стабилизатор выбранного нами момента совпадает с группой $N_+ \times K$. Используя эту симметрию, любую точку $(g, \xi) \in T^*G$, лежащую на поверхности уровня данного момента, можно привести к виду (Q, L) , где $Q \in A$ в разложении Ивасава. Пара (Q, L) задает, по сути, координаты на фактор-пространстве $\mathcal{P}_\mu$. Вид L фиксируется из условия принадлежности (Q, L) поверхности $\mu^R = 0$, $\mu^L = I$:

$$\langle L, X \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \forall X \in \mathcal{K}, \quad \langle Q^{-1}LQ, X \rangle = \langle I, X \rangle \quad \text{для} \quad \forall X \in n_+. \quad (16)$$

В силу ортогональности $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$ первое из этих уравнений дает

$$L^{\text{st}} = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq i \leq l}} a_i^k (h_i^k + h_i^{-k}) + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ k \geq 0}} a_\alpha^k (E_\alpha^k + E_{-\alpha}^{-k}), \quad (17)$$

$$L^{\text{can}} = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq i \leq l}} a_i^k (h_i^{kh} + h_i^{-kh}) + \sum_{\substack{k > 0, k \not\equiv 0 \pmod{h} \\ \alpha \in \Delta_{k \pmod{h}}}} a_\alpha^k (E_\alpha^k + E_{-\alpha}^{-k}). \quad (18)$$

Здесь L^{st} и L^{can} обозначают L в стандартной и канонической градуировках, соответственно. Поскольку A в разложении Ивасава совпадает с группой *постоянных* петель со значениями в экспоненцированной $\bar{h}$, то $Q = e^q$, $q \in \bar{h}$. Подставляя теперь эти L во второе уравнение (16), которое можно переписать в виде $P_{n_-}(e^{-q}Le^q) = I$ (P_{n_-} есть проектор на n_-), а также используя тождества $e^{-q}E_{\pm\alpha}^k e^q = e^{\mp\alpha(q)}E_{\pm\alpha}^k$, получаем в обоих случаях одно и то же формальное выражение для L :

$$L = \sum_{1 \leq i \leq l} \pi_i h_i + \sum_{1 \leq i \leq l} e^{-\alpha_i(q)} (e_i + f_i). \quad (19)$$

Построенный таким образом оператор L хорошо известен как L -оператор цепочки Тоды [10]. Выбирая матричное представление для $\bar{\mathcal{G}}$ и подставляя в (19) стандартную или каноническую реализацию образующих Шевалле, мы получаем L -оператор цепочки Тоды как матричнозначную функцию спектрального параметра λ .

4. КЛАССИЧЕСКИЕ r -МАТРИЦЫ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Здесь мы покажем, как, используя пуассонову структуру на редуцированном фазовом пространстве, можно вычислить r -матрицы цепочки Тоды.

Сначала рассмотрим конечномерную ситуацию. Пусть $g = nQk$ – разложение Ивасава вещественной полупростой группы Ли. Функция $F_X(Q, L)$, $X \in \mathcal{M}$, заданная на $\mathcal{P}_\mu$, имеет расширение $F_X(g, \xi) = \langle \xi, k^{-1}Xk \rangle$ на T^*G , инвариантное относительно действия группы $\mathcal{H} = N_+ \times K$. В работе [5] доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Скобка Пуассона на редуцированном пространстве имеет вид*

$$\{F_X, F_Y\}(Q, L) = \langle L, [r(X), Y] + [X, r(Y)] \rangle, \quad (20)$$

где линейный оператор $r: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{K}$ задается формулой

$$r(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k(ge^{tX}).$$

Отметим, что (20) следует непосредственно из (14).

Записывая для элемента $X \in \mathcal{M}$ разложение Ивасава в виде $X = X_+ + X_a + X_k$, где $X_+ \in n_+$, $X_a \in a$, $X_k \in \mathcal{K}$, несложно найти [5], что

$$r(X) = -X_k. \quad (21)$$

Очевидно, что эта формула без изменений переносится на рассматриваемый нами случай редукции бесконечномерной группы.

1. r -Матрица в стандартной градуировке. Подставляя разложение произвольного элемента x по однородному базису в уравнение (21):

$$\begin{aligned} r \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ n > 0}} x_\alpha^n W_\alpha^n + \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^0 W_\alpha^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ n \geq 0}} x_i^n T_i^n \right) = \\ = - \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ n > 0}} x_\alpha^n V_\alpha^n + \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^0 V_\alpha^0 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ n > 0}} x_i^n H_i^n, \end{aligned}$$

и используя соотношения ортогональности для базисных элементов

$$\begin{aligned} \langle T_i^n, T_j^m \rangle &= 2(h_i, h_j) \delta_{n,m}, & n, m > 0, \\ \langle W_\alpha^n, W_\beta^m \rangle &= 2(e_\alpha, e_{-\alpha}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{n,m}, & n, m > 0, \end{aligned} \quad (22)$$

находим явный вид оператора r (общий множитель $1/2$ опущен):

$$r = \sum_{\substack{k > 0 \\ 1 \leq i, j \leq l}} a^{ij} H_i^k \langle T_j^k, \dots \rangle + \sum_{\alpha \in \Delta_+} V_\alpha^0 \langle W_\alpha^0, \dots \rangle + \sum_{\substack{k > 0 \\ \alpha \in \Delta}} V_\alpha^k \langle W_\alpha^k, \dots \rangle, \quad (23)$$

где a^{ij} – матрица, обратная к (h_i, h_j) , $1 \leq i, j \leq l$. Этот оператор определяет следующий элемент пространства $\mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$, который мы также обозначаем буквой r :

$$r = \sum_{\substack{k > 0 \\ 1 \leq i, j \leq l}} a^{ij} H_i^k \otimes T_j^k + \sum_{\alpha \in \Delta_+} V_\alpha^0 \otimes W_\alpha^0 + \sum_{\substack{k > 0 \\ \alpha \in \Delta}} V_\alpha^k \otimes W_\alpha^k. \quad (24)$$

Заметим, что r -матрица как вектор пространства $\mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$ определена неоднозначно. Поскольку в (20) элементы $L, X, Y \in \mathcal{M}$, к (24) всегда можно добавить произвольный

вектор из $\mathcal{M} \otimes \mathcal{K}$, не изменив при этом значения скобки. Таким образом, можно ввести оператор $R = r - \sigma(r)$, где σ есть оператор перестановки в $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Подставляя в R определения образующих (5), получаем

$$\begin{aligned} R^{\text{st}} = & \sum_{\substack{k>0 \\ 1 \leq i, j \leq l}} a^{ij} (h_i^k \otimes h_j^{-k} - h_i^{-k} \otimes h_j^k) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (e_\alpha^0 \otimes e_{-\alpha}^0 - e_{-\alpha}^0 \otimes e_\alpha^0) + \\ & + \sum_{\substack{k>0 \\ \alpha \in \Delta}} (e_\alpha^k \otimes e_{-\alpha}^{-k} - e_{-\alpha}^{-k} \otimes e_\alpha^k), \end{aligned} \quad (25)$$

где R^{st} означает r -матрицу в стандартной градуировке. Построенная таким образом $R^{\text{st}} \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ совпадает с классической тригонометрической r -матрицей модели Тоды, соответствующей стандартной градуировке L -оператора (19). В самом деле, отождествляя $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ с $\mathcal{G}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes \mathcal{G}[\mu, \mu^{-1}]$, т.е. подставляя в (25) стандартную реализацию образующих и выполняя суммирование, находим

$$R^{\text{st}} = \frac{\lambda r_- - \mu r_+}{\lambda - \mu}, \quad (26)$$

где

$$r_+ = \frac{1}{2} a^{ij} h_i \otimes h_j + \sum_{\alpha \in \Delta_+} e_\alpha \otimes e_{-\alpha}, \quad r_- = -\sigma(r_+)$$

суть два константных решения классического уравнения Янга–Бакстера.

2. r -Матрица в канонической градуировке. Вычисления в канонической градуировке абсолютно аналогичны случаю 1, поэтому мы приведем только ответы для элементов r и R^{can} соответствующих r -матриц в канонической градуировке:

$$r = \sum_{\substack{k>0 \\ 1 \leq i, j \leq l}} a^{ij} H_i^{kh} \otimes T_j^{kh} + \sum_{\substack{k>0 \\ k \not\equiv 0 \pmod{h}}} \sum_{\alpha \in \Delta^{k \pmod{h}}} V_\alpha^k \otimes W_\alpha^k, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R^{\text{can}} = & \sum_{\substack{k>0 \\ 1 \leq i, j \leq l}} a^{ij} (h_i^{kh} \otimes h_j^{-kh} - h_i^{-kh} \otimes h_j^{kh}) + \\ & + \sum_{\substack{k>0 \\ k \not\equiv 0 \pmod{h}}} \sum_{\alpha \in \Delta^{k \pmod{h}}} (e_\alpha^k \otimes e_{-\alpha}^{-k} - e_{-\alpha}^{-k} \otimes e_\alpha^k). \end{aligned} \quad (28)$$

Выполняя в последней формуле суммирование канонических образующих, получаем хорошо известное [1] решение классического уравнения Янга–Бакстера, отвечающее канонической градуировке алгебры $\mathcal{G}$:

$$R^{\text{can}} = \frac{t_0}{2} + \frac{1}{x^h - 1} \sum_{k=0}^{h-1} t_k x^k, \quad (29)$$

где $x = \lambda/\mu$, $t_0 = a^{ij} h_i \otimes h_j$ и $t_k = \sum_{\alpha \in \Delta^k} e_\alpha \otimes e_{-\alpha}$.

Таким образом, метод гамильтоновой редукции, надлежащим образом примененный к кокасательному расслоению над группой петель, позволяет строить r -матрицы, зависящие от спектрального параметра. Подчеркнем, что сама возможность редукции обусловлена наличием разложения Ивасава $G = N_+ AK$, в котором группа A оказывается конечномерной, так что конечномерным оказывается и редуцированное фазовое пространство. Описанная ситуация уже не имеет места для разложения Картана $G = KAK$ комплексной группы петель G , т.е. фактор A оказывается бесконечномерным. Заметим, что в конечномерном случае указанное разложение Картана участвует в гамильтоновой редукции $\mathcal{K} \backslash T^*G / \mathcal{K}$, приводящей к моделям Калоджеро–Мозера–Сазерленда [3]. По-видимому, r -матрицы со спектральным параметром для этих моделей должны получаться методом гамильтоновой редукции $T^*G(\lambda)$, в котором вместо группы $\mathcal{H} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ используется какая-то другая группа диффеоморфизмов группы петель $G(\lambda)$. Мы надеемся вернуться к рассмотрению этого вопроса в последующих публикациях.

Автор благодарен А. Горскому, П. Медведеву и С. Фролову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N96-01-00608.

Список литературы

- [1] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 3. С. 1–29.
- [2] М. Jimbo. Springer Lectures in Physics. In: Current Topics in QFT. Seminar Proceedings. Berlin: Springer, 1985. P. 35–62.
- [3] М. А. Olshanetsky, А. М. Perelomov. Invent. Math. 1976. V. 37. P. 93.
- [4] L. Ferreira, D. Olive. Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 365–384.
- [5] J. Avan, O. Babelon, M. Talon. Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 67–89.
- [6] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [7] В. Кац. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [8] Э. Прессли, Г. Сигал. Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [9] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [10] О. И. Богоуявленский. Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 201–209.

Поступила в редакцию 30.V.1997 г.

G. E. Arutyunov

CONSTRUCTION OF TRIGONOMETRIC TODA r -MATRICES VIA HAMILTONIAN REDUCTION OF THE COTANGENT BUNDLE OVER LOOP GROUPS

By applying the Hamiltonian reduction method to the cotangent bundle over loop groups, we recover the well-known classical trigonometric r -matrices of the periodic Toda lattice.