Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мхитарян, Магнетик Годена и волновые функции Бете вне массовой поверхности, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 13–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:25:41

В. В. Мхитарян*

МАГНЕТИК ГОДЕНА И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ БЕТЕ ВНЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Доказано обобщенное уравнение Бете (уравнение анзаца Бете вне массовой поверхности) для магнетика Годена в случае широкого класса простых комплексных алгебр Ли.

В теории точно решаемых моделей рассматриваются задачи, относящиеся к диагонализации класса гамильтонианов, квадратичных по спиновым переменным. Речь идет о нахождении собственных состояний и собственных значений гамильтонианов

$$H_n = \sum_m \mathcal{W}_{nm} \cdot \mathbf{S}_n \otimes \mathbf{S}_m, \quad (1)$$

где $\mathcal{W}$ – константы, а $\mathbf{S}_n$ – генераторы простой алгебры Ли.

В простейшем случае алгебры Ли $sl(2)$ при определенном выборе констант $\mathcal{W}$ задача диагонализации (1) решена в [1]. С помощью так называемого иерархического анзаца Бете можно построить собственные значения (1) для представлений некоторых конкретных алгебр Ли [2–4]. Этот метод, как правило, не дает явной реализации собственных векторов (1), которые в отдельных случаях могут быть полезными [5, 6].

Авторами работы [7] была предложена явная конструкция (так называемое уравнение анзаца Бете вне массовой поверхности), которая дает решение таких задач для любых простых алгебр Ли. Более того, с помощью этой конструкции можно найти конкретную реализацию решений уравнений Книжника–Замолотчикова [8] в некоторых конформных теориях [9]. Этот результат впоследствии был доказан в работе [10] с помощью бозонизации (модуль Вакимото) аффинных алгебр $\widehat{\mathcal{G}}$.

В настоящей работе представлено доказательство результата [7] для всех простых комплексных алгебр, кроме E_8 , G_2 и F_4 . Приведенное здесь доказательство в корне отличается от [10] и приближается к методу иерархического анзаца Бете.

Ниже (в пункте 1) подробно представлена конструкция уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности. Пункт 2 является подготовительным к пункту 3, где и приведено окончательное доказательство.

1. Допустим, что $R^{0i}(\mu, \eta)$ и $R^{00}(\mu, \eta)$ – решения уравнения Янга–Бакстера для простой алгебры Ли $\mathcal{G}$ с глобальным спектральным параметром μ и параметром η , который представляет собой меру отклонения от классического предела (так называемый параметр типа постоянной Планка). Это значит, что R^{00} и R^{0i} действуют в пространствах

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: vgho@lx2.yerphi.am

$V^0 \otimes V^0$ и $V^0 \otimes V^i$, соответственно, где V^0 – пространство фундаментального представления π_0 , а V^i – пространство произвольного представления π_i алгебры $\mathcal{G}$, и удовлетворяют соотношению Янга–Бакстера

$$R^{00}(\mu - \lambda) R^{0i}(\mu) R^{0j}(\lambda) = R^{0j}(\lambda) R^{0i}(\mu) R^{00}(\mu - \lambda).$$

Оно дает возможность ввести трансфер-матрицу (матрицу переноса)

$$T(\mu, \{Z_a\}) = \text{tr}_0 \prod_{a=1}^N R^{0a}(\mu - Z_a)$$

с локальными параметрами беспорядка $Z_1, \dots, Z_N$. Для этой матрицы имеет место соотношение

$$[T(\lambda, \{Z_a\}), T(\mu, \{Z_a\})] = 0 \quad (2)$$

при любых μ и λ . Матрица переноса действует в пространстве N -кратного тензорного произведения $V^1 \otimes \dots \otimes V^N$ и благодаря (2) является производящей функцией для интегралов движения [11]. R -матрица имеет квазиклассическое разложение

$$R^{ab}(\mu) = I^a \otimes I^b + \eta r_{ab}(\mu) + O(\eta^2),$$

где r_{ab} – классическая r -матрица, удовлетворяющая классическому уравнению Янга–Бакстера [11]

$$[r_{ab}(\lambda - \mu), r_{ac}(\lambda) + r_{bc}(\mu)] + [r_{ac}(\lambda), r_{bc}(\mu)] = 0,$$

здесь буквами a, b, c обозначены три различных представления алгебры $\mathcal{G}$.

Будем рассматривать случай рационального решения $r_{ab} = (t^a, t^b)/\mu$, где (t^a, t^b) – форма Киллинга для генераторов алгебры Ли в представлениях V^a, V^b : $(t^a, t^b) = K^{\alpha\beta} t_\alpha^a \otimes t_\beta^b$, где $\{t_\alpha\}$ – генераторы, а $K^{\alpha\beta}$ – обратная к матрице Картана $K_{\alpha\beta}$ алгебры $\mathcal{G}$. В этом случае имеем

$$T(\mu, \{Z_a\}) = \text{const} \cdot I + \eta^2 \sum_{a=1}^N \frac{H^a}{\mu - Z_a} + O(\eta^3),$$

$$H^a = \sum_{b \neq a}^N \frac{(t^a, t^b)}{Z_a - Z_b}. \quad (3)$$

Из (2) следует коммутативность

$$[H^a, H^b] = 0, \quad a, b = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Гамильтонианы (3) диагонализуются одновременно и задают магнетик Годена. Соотношение (4) приводит к тому, что следующий класс гамильтонианов типа Гейзенберга

$$H = \sum_{n < m} \mathcal{W}_{nm}(t^n, t^m) \equiv \sum_a \epsilon_a H_a$$

вполне интегрируем, если коэффициенты имеют вид $\mathcal{W}_{nm} = (\epsilon_n - \epsilon_m)/(Z_n - Z_m)$.

Можно построить также “классическую” матрицу переноса $t(\mu, \{Z_a\})$: обозначим

$$l(\mu, \{Z_a\}) = \sum_{a=1}^N r_{0a}(\mu - Z_a),$$

тогда

$$t(\mu, \{Z_a\}) = \frac{1}{2} \text{tr}_0 l^2(\mu, \{Z_a\}), \quad \text{res}_{\mu=Z_a} t(\mu) = H^a.$$

Пусть $e_{\pm\alpha}, h_\alpha$ – генераторы $\mathcal{G}$ в базисе Картана–Вейля, соответствующие простому корню α . Если Π – множество простых корней $\mathcal{G}$, то корневые векторы e_β , $\beta \notin \Pi$, дополняют $\{e_{\pm\alpha}, h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$ до базиса Картана–Вейля. Операторы, соответствующие этим генераторам в конкретном представлении (скажем, в V^a), обозначим через $e_{\pm\alpha}^a, h_\alpha^a$.

Допустим, что $A_\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ – некоторое множество простых корней (при этом один и тот же корень может входить в A_Π несколько раз). Сопоставим каждому простому корню $\alpha_i \in A_\Pi$ комплекснозначный параметр μ_i , $\mu_i \leftrightarrow \alpha_i$, $\mu_i \in \mathbf{C}$, и обозначим через A множество всех пар $[\alpha_i; \mu_i]$: $A = \{[\alpha_i; \mu_i], \alpha_i \in A_\Pi\}$, а через K – подмножество A :

$$K = \{[\alpha_i^K; \mu_i^K], [\alpha_i^K; \mu_i^K] \equiv [\alpha_{l_i}; \mu_{l_i}] \in A, i = 1, \dots, |K| \leq m\}.$$

Следуя [7], определим оператор

$$X(K, a) = \sum_{p \in S_{|K|}} \frac{e_{-\alpha_{p(1)}^K}^a \dots e_{-\alpha_{p(|K|)}^K}^a}{(\mu_{p(1)}^K - \mu_{p(2)}^K) \dots (\mu_{p(|K|)}^K - Z_a)},$$

где сумма проводится по всей группе перестановок $S_{|K|}$. С помощью этого оператора можно построить вектор в $V^1 \otimes \dots \otimes V^N$:

$$\varphi(A) = \sum_{\substack{(K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \\ K_a \cap K_b = \emptyset}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle, \quad (5)$$

где сумма берется по всем возможным попарно непересекающимся разбиениям A , а $|\lambda^a\rangle$ – старший вектор неприводимого представления π_a в пространстве V^a .

Далее для удобства обозначений попарно непересекающиеся множества мы будем брать в круглые скобки, т.е. записывать $(K_1, \dots, K_L)$, когда для любой пары индексов a, b из $1, \dots, L$ выполнены соотношения $K_a \cap K_b = \emptyset$.

ТЕОРЕМА. Вектор $\varphi(A)$ удовлетворяет соотношению

$$H^a \varphi(A) = h^a \varphi(A) + \sum_{j=1}^m f_{\mu_j} \varphi_{\mu_j}^a(A), \quad (6)$$

где

$$h^a = \sum_{b \neq a}^N \frac{(\lambda^a, \lambda^b)}{Z_a - Z_b} - \sum_{j=1}^m \frac{(\alpha_j, \lambda^a)}{Z_a - \mu_j}, \quad (7)$$

$$f_{\mu_j} = \sum_{i \neq j}^m \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{\mu_j - \mu_i} - \sum_{a=1}^N \frac{(\alpha_j, \lambda^a)}{\mu_j - Z_a}, \quad (8)$$

$$\varphi_{\mu_j}^a(A) = \sum_{\substack{(K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \\ [\alpha_j; \mu_j] \in K_a}} \prod_{b=1}^N \otimes X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \quad (9)$$

при любом A , где сумма (9) – это подсумма суммы (5) с разбиениями, в которых $[\alpha_j; \mu_j] \in K_a$ [7].

С помощью этой теоремы можно диагонализировать гамильтонианы (3). Действительно, если наложить на μ_i связи (так называемое условие массовой поверхности)

$$f_{\mu_j} = 0, \quad [\alpha_j; \mu_j] \in A, \quad (10)$$

то гамильтонианы (3) станут диагональными. Соотношения (10) фактически являются уравнениями Бете.

В оставшейся части работы мы будем доказывать это утверждение для серий простых алгебр Ли

$$A_n, \quad n \geq 1; \quad B_n, \quad n \geq 2; \quad C_n, \quad n \geq 3; \quad D_n, \quad n \geq 4; \quad E_6; \quad E_7. \quad (11)$$

2. Пусть теперь алгебра Ли $\mathcal{G}$ – одна из алгебр (11). В пространстве представления V^a алгебры Ли $\mathcal{G}$ определим оператор

$$Y^\alpha(K, a) = \sum_{r \in S_{|K|}} \frac{\left[e_{-\alpha_{r(1)}}^a \left[\dots \left[e_{-\alpha_{r|K|}}^a, e_{-\alpha}^a \right] \dots \right] \right]}{(\mu_{r(1)}^K - \mu_{r(2)}^K) \dots (\mu_{r|K|}^K - \mu)(\mu - Z_a)}, \quad [\alpha; \mu] \in A, \quad [\alpha; \mu] \notin K.$$

Оказывается, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(A) = & \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_i K_i = A \setminus [\alpha; \mu]}} \sum_{b=1}^N \prod_{a=1}^{b-1} \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes Y^\alpha(K_0, b) X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \times \\ & \times \prod_{a=b+1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

где сумма берется по всем возможным $N + 1$ разбиениям множества $A \setminus [\alpha; \mu]$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_i K_i = A \setminus [\alpha; \mu]}} \sum_{b=1}^N \prod_{a=1}^{b-1} \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes Y^\alpha(K_0, b) X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \times \\
& \quad \times \prod_{a=b+1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle = \\
& = \sum_{b=1}^N \sum_{\substack{(K_1, \dots, \widehat{K_b}, \dots, K_N) \\ \bigcup_{a \neq b} K_a = A \setminus (K \cup [\alpha; \mu])}} \sum_{\substack{(K_b, K_0) \\ K_b \cup K_0 = K \subset A \setminus [\alpha; \mu]}} \prod_{a=1}^{b-1} \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes \\
& \quad \otimes Y^\alpha(K_0, b) X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \otimes \prod_{a=b+1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle = \\
& = \sum_{b=1}^N \sum_{\substack{(K_1, \dots, K_b, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [\alpha; \mu]}} \prod_{a=1}^{b-1} \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes X(K_b \cup [\alpha; \mu], b) |\lambda^b\rangle \times \\
& \quad \times \prod_{a=b+1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle = \sum_{b=1}^N \sum_{\substack{(K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \\ [\alpha; \mu] \in K_b}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle = \\
& = \sum_{\substack{(K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle = \varphi(A),
\end{aligned}$$

где второе равенство следует из утверждения, доказанного в приложении, “ $\widehat{}$ ” означает, что соответствующие члены опущены.

Для дальнейшего необходимы некоторые сведения из теории алгебр Ли и их представлений [12].

Пусть Π – система простых корней алгебры Ли $\mathcal{G}$ с рангом r , а Δ и Δ^+ – системы всех ненулевых и положительных корней, соответственно. Тогда каждый корень $\varphi \in \Delta$ однозначно представляется в виде суммы по простым корням:

$$\varphi = \sum n_i \alpha_i, \quad \alpha_i \in \Pi, \quad (13)$$

где n_i – целые числа одинакового знака. Обозначим через Δ_{α_i} подсистему корней с $n_i \neq 0$.

Оказывается, что для любой простой алгебры Ли $\mathcal{G}$ из множества (11) всегда существует такой простой корень $\alpha_0 \in \Pi$, при котором в разложении (13) $n_0 = \pm 1$, $\varphi \in \Delta_{\alpha_0}$.

Старшие веса χ^i фундаментальных представлений π_i определяются условиями

$$\frac{2(\chi_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}, \quad \alpha_j \in \Pi.$$

Пусть χ^0 – такой старший вес для α_0 , а V^0 – соответствующее пространство представления π_0 , $|\chi^0\rangle \in V^0$. Это представление обладает следующими свойствами:

$$h_\alpha^0 |\chi^0\rangle = \delta_{\alpha, \alpha_0} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} |\chi^0\rangle, \quad \alpha \in \Delta, \quad (14.1)$$

$$e_{-\alpha}^0 |\chi^0\rangle = 0, \quad \alpha \notin \Delta_{\alpha_0}^+, \quad (14.2)$$

$$e_\beta^0 e_{-\alpha}^0 |\chi^0\rangle = \delta_{\alpha, \beta} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} |\chi^0\rangle, \quad \alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+, \quad \beta \in \Delta^+, \quad (14.3)$$

которые следуют из определения $|\chi^0\rangle$ и выбора α_0 .

С помощью представления π_0 определим следующие векторы в $\Omega = V^1 \otimes \dots \otimes V^N \otimes V^0$:

$$\psi = \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [\alpha_0; \mu_0]}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes X(K_0, \pi_0) e_{-\alpha_0}^0 |\chi^0\rangle \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_{\mu_j}^\rho &= \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_i K_i = A \setminus [\alpha_0; \mu_0] \\ [\alpha_j; \mu_j] \in K_\rho}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \otimes X(K_0, \pi_0) e_{-\alpha_0}^0 |\chi^0\rangle, \\ \rho &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Подобно (9) последняя сумма берется по всем тем $(N+1)$ разбиениям множества $A \setminus [\alpha_0; \mu_0]$, для которых $[\alpha_j; \mu_j] \in K_\rho$.

Обозначим через P^0 проекционный оператор в π^0 : $P^0 \equiv |\chi^0\rangle\langle\chi^0|$. В пространстве Ω определим оператор

$$E^0(\mu) = P^0 \sum_{a=1}^N \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^a \otimes e_\alpha^0}{\mu - Z_a} \quad (17)$$

и докажем, что имеет место соотношение

$$E^0(\mu_0) \psi = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \varphi \otimes |\chi\rangle. \quad (18)$$

Для этого сначала заметим, что из (14.2) следует

$$Y^{\alpha_0}(\overline{K}_0, \pi_0) |\chi\rangle = X(\overline{K}_0, \pi_0) e_{-\alpha}^0 |\chi\rangle, \quad Z_0 = \mu_0.$$

Здесь и далее черта над K означает, что это подмножество не содержит корня α_0 .

С другой стороны, $Y^{\alpha_0}(K_0, \pi_0) = C(K_0) e_{-\alpha(K_0)}^0$, $\alpha(K_0) \in \Delta_{\alpha_0}^+$, где $C(K_0)$ – численный коэффициент, так что для $\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+$ из (14) получаем

$$P^0 e_\alpha^0 X(K_0, \pi_0) e_{-\alpha_0}^0 |\chi^0\rangle = C(K_0) \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \delta_{\alpha, \alpha(K_0)} |\chi^0\rangle,$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ – символ Кронекера.

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 E^0(\mu_0)\psi &= \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [\alpha_0; \mu_0]}} \sum_{a=1}^N \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^a}{\mu_0 - Z_a} \times \\
 &\quad \times \prod_{b=1}^N \otimes X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \otimes P^0 e_{\alpha}^0 X(K_0, \pi_0) e_{-\alpha_0}^0 |\chi^0\rangle = \\
 &= \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [\alpha_0; \mu_0]}} \sum_{a=1}^N \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{C(K_0) e_{-\alpha}^a}{\mu_0 - Z_a} \times \\
 &\quad \times \prod_{b=1}^N \otimes X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \otimes |\chi^0\rangle = \\
 &= \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \sum_{\substack{(K_0, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [\alpha_0; \mu_0]}} \sum_{a=1}^N Y^{\alpha_0}(K_0, a) \prod_{b=1}^N \otimes X(K_b, b) |\lambda^b\rangle \otimes |\chi^0\rangle = \\
 &= \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \varphi \otimes |\chi^0\rangle,
 \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из (12).

Если в Ω определить оператор

$$E^{0|a}(\mu) = P^0 \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^a \otimes e_{\alpha}^0}{\mu - Z_a}, \quad (19)$$

то таким же образом можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$E^0(\mu_0)\psi_{\mu_j}^a + E^{0|a}(\mu_0)\psi_{\mu_j}^0 = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \varphi_{\mu_j}^a \otimes |\chi\rangle, \quad a = 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$E^{0|a}(\mu_0)\psi = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \varphi_{\mu_0}^a \otimes |\chi\rangle. \quad (21)$$

При этом важно отметить, что для выполнения (18), (20) и (21) выбор α_0 оказывается существенным.

Заметим, что кратность $\alpha_0 \in A_{\Pi}$ с самого начала произвольна, так что можно несколько обобщить соотношения (18) и (20). Действительно, пусть кратность α_0 в A равна p . Отметим это явно посредством добавления индекса p к A : $A \rightarrow A_p$. Переобозначим параметры μ , соответствующие α_0 , через μ_{0i} , $i = 1, \dots, p$, и в пространстве

$$\Omega^p = V^1 \otimes \dots \otimes V^N \otimes V^{01} \otimes \dots \otimes V^{0p}, \quad V_{0i} \equiv V^0,$$

определим операторы $E^{0i}(\mu)$, $E^{0i|a}(\mu)$, подобные операторам (17), (19), соответственно,

$$\begin{aligned}
 E^{0i}(\mu) &= P^{0i} \sum_{\rho=1}^{N+i-1} \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^{\rho} \otimes e_{\alpha}^{0i}}{\mu - Z_{\rho}}, \quad i = 1, \dots, p, \\
 E^{0i|a}(\mu) &= P^{0i} \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^a \otimes e_{\alpha}^{0i}}{\mu - Z_a}, \quad a = 1, \dots, N,
 \end{aligned}$$

и векторы ψ^p , $\psi_{\mu_j}^{p|\rho}$, аналогичные векторам (15) и (16):

$$\begin{aligned}\psi^p &= \sum_{\substack{(K_{01}, \dots, K_{0p}, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_{\sigma} K_{\sigma} = \bar{A}}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \prod_{i=1}^p \otimes X(K_{0i}, 0_i) e_{-\alpha_0}^{0_i} |\chi^{0_i}\rangle, \quad (22) \\ \psi_{\mu_j}^{p|\rho} &= \sum_{\substack{(K_{01}, \dots, K_{0p}, K_1, \dots, K_N) \\ \bigcup_{\sigma} K_{\sigma} = \bar{A} \\ [\alpha_j; \mu_j] \in K_{\rho}}} \prod_{a=1}^N \otimes X(K_a, a) |\lambda^a\rangle \prod_{i=1}^p \otimes X(K_{0i}, 0_i) e_{-\alpha_0}^{0_i} |\chi^{0_i}\rangle, \\ \rho &= 1, \dots, N, 0_1, \dots, 0_p.\end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\bar{A}$ – такое множество, которое получается из множества A удалением всех элементов $\{[\alpha_0; \mu_{0_i}]\}_{i=1}^p$. Последняя сумма подобно суммам в формулах (9) и (16) берется по всем тем $(N+p)$ разбиениям множества $\bar{A}$, для которых $[\alpha_j; \mu_j] \in K_{\rho}$.

Обобщая (18), (20) и (21), можно получить следующие соотношения:

$$\prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \psi^p = \left[\frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \right]^p \varphi \otimes \prod_{i=1}^p \otimes |\chi^{0_i}\rangle, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \psi_{\mu_j}^{p|a} + \sum_{k=1}^p E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi_{\mu_j}^{p|0_k} = \\ = \left[\frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \right]^p \varphi_{\mu_j}^a \otimes \prod_{i=1}^p \otimes |\chi^{0_i}\rangle, \quad [\alpha_j; \mu_j] \in \bar{A},\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p = \\ = \left[\frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \right]^p \varphi_{\mu_{0_k}}^a \prod_{i=1}^p \otimes |\chi^{0_i}\rangle, \quad k = 1, \dots, p.\end{aligned} \quad (26)$$

Для дальнейшего важно заметить, что

$$\begin{aligned}P^{0_i} e_{\alpha_0}^{0_i} (e_{-\alpha_1}^{0_i} \otimes e_{\alpha_1}^{0_{k_1}} \otimes \dots \otimes e_{-\alpha_n}^{0_i} \otimes e_{\alpha_n}^{0_{k_n}}) \psi^p = 0, \\ i < k_1 < \dots < k_n, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \Delta_{\alpha_0}^+.\end{aligned} \quad (27)$$

Это приводит к тому, что в (24) все операторы E можно заменить следующими операторами $\bar{E}$:

$$\begin{aligned}E^{0_i}(\mu) \rightarrow \bar{E}^{0_i}(\mu) = P^{0_i} \sum_{b=1}^N \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} \frac{e_{-\alpha}^b \otimes e_{\alpha}^{0_i}}{\mu - Z_b}, \quad i = 1, \dots, p, \\ E^{0_i|a}(\mu) \rightarrow \bar{E}^{0_i|a}(\mu) \equiv E^{0_i|a}(\mu).\end{aligned}$$

Из коммутативности

$$[e_{\pm\alpha_1}, e_{\pm\alpha_2}] = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_{\alpha_0}^+,$$

вытекает, что операторы $\overline{E}^{0i}(\mu)$ с разными i коммутируют между собой и с операторами $\overline{E}^{0j|a}(\mu)$.

3. Будем доказывать утверждение с помощью математической индукции по рангу алгебры. В данном случае нам предстоит пройти следующие два этапа:

- а) проверить справедливость утверждения для алгебр Ли ранга 1;
- б) допуская его справедливость для всех алгебр Ли ранга $r - 1$, доказывать корректность утверждения для алгебр Ли с рангом r .

Докажем пункт “а”. Принимая во внимание равенство

$$\frac{1}{\mu_1 - Z} \cdots \frac{1}{\mu_m - Z} = \sum_{p \in S(m)} \frac{1}{(\mu_{p(1)} - \mu_{p(2)}) \cdots (\mu_{p(m)} - Z)}$$

и следуя [1, пункт 13.1.2], нетрудно убедиться в справедливости соотношений (6)–(9) для алгебры Ли $sl(2)$. Это доказывает утверждение нашей теоремы для алгебр Ли ранга 1, т.к. $sl(2)$ – единственная простая комплексная алгебра Ли единичного ранга.

Приступим к рассмотрению пункта “б”. Пусть $\mathcal{G}$ – произвольная простая алгебра Ли ранга r из (11), а $\{h_\alpha, e_\beta; \alpha \in \Pi, \beta \in \Delta\}$ – конкретный базис Картана–Вейля алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Перейдем к рассмотрению несколько другого базиса $\{\hat{h}_\alpha, \hat{e}_\beta; \alpha \in \Pi, \beta \in \Delta\}$ алгебры $\mathcal{G}$, определяя его следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\alpha_0} &= \sum_{\delta \in \Pi} M^{\alpha_0 \delta} h_\delta, \\ \hat{h}_\alpha &= h_\alpha, \quad \alpha \neq \alpha_0, \\ \hat{e}_{\pm \beta} &= e_{\pm \beta}, \quad \beta \in \Delta, \end{aligned} \tag{28}$$

где $M^{\alpha\beta}$ – обратная к матрице $M_{\alpha\beta} = (h_\alpha, h_\beta)$. Нетрудно заметить, что этот базис обладает следующими полезными свойствами:

$$(\hat{h}_{\alpha_0}, \hat{h}_\beta) = 0, \quad \beta \neq \alpha_0, \tag{29.1}$$

$$[\hat{h}_{\alpha_0}, e_\beta] = 0, \quad \beta \notin \Delta_{\alpha_0}, \tag{29.2}$$

$$[\hat{h}_{\alpha_0}, e_{\pm \alpha}] = \pm e_{\pm \alpha}, \quad \alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+, \tag{29.3}$$

$$\widehat{M}^{\alpha_0 \beta} = 0, \quad \beta \neq \alpha_0, \tag{29.4}$$

где $\widehat{M}^{\alpha\beta}$ – матрица, обратная к матрице $\widehat{M}_{\alpha\beta} = (\hat{h}_\alpha, \hat{h}_\beta)$, $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.

Пользуясь уже принятыми обозначениями, в пространстве Ω^p определим следующие операторы:

$$\begin{aligned} H_i^a &= \sum_{q \neq a}^{N+i} \frac{(t^a, t^q)}{Z_a - Z_q}, \\ H_i^{0j} &= \sum_{q \neq 0_j}^{N+i} \frac{(t^{0_j}, t^q)}{\mu_{0_i} - Z_q}, \quad j \leq i, \\ Z_{N+j} &\equiv \mu_{0_j}, \quad t^{N+j} \equiv t^{0_j}. \end{aligned} \tag{30}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[H_i^\rho, H_i^\sigma] = 0, \quad \rho; \sigma = 1, \dots, N; 0_1, \dots, 0_p, \quad i = 0, \dots, p,$$

которые в частном случае дают

$$H_{k-1}^a \otimes I^{0_k} H_k^{0_k} = H_k^{0_k} H_k^a + \frac{(t^{0_k} t^a)}{\mu_{0_k} - Z_a} H_k^{0_k}. \quad (31)$$

Рассмотрим подалгебру алгебры $\mathcal{G}$, которая как линейное пространство порождается векторами

$$h_\alpha, e_{\pm\beta}, \quad \text{где } \alpha \in \Pi \setminus \alpha_0, \quad \beta \in \Delta \setminus \Delta_{\alpha_0}.$$

Обозначим эту подалгебру через $\tilde{\mathcal{G}}$, а сужение представления π_a алгебры Ли $\mathcal{G}$ на подалгебру $\tilde{\mathcal{G}}$ – через $\tilde{\pi}_a$. Ранг подалгебры $\tilde{\mathcal{G}}$ равен $r - 1$.

Очевидно, что весовые векторы представлений $\pi |\lambda^a\rangle \in V^a$, $e_{-\alpha_0}^{0_i} |\chi^{0_i}\rangle \in V^{0_i}$ играют роль старшего веса для соответствующих представлений $\tilde{\pi}$.

Схема Дынкина, соответствующая подалгебре $\tilde{\mathcal{G}}$, является подсхемой для схемы Дынкина $\mathcal{G}$, поэтому

$$(\widetilde{h_\alpha, h_\beta}) = \tau(h_\alpha, h_\beta) = \tau M_{\alpha\beta}, \quad (32)$$

где $(\widetilde{})$ – форма Киллинга подалгебры $\tilde{\mathcal{G}}$, а τ – коэффициент пропорциональности. Рассмотрим векторы

$$\tilde{h}_\alpha = 1/\tau h_\alpha, \quad \tilde{e}_\beta = 1/\sqrt{\tau} e_\beta, \quad \alpha \in \Pi \setminus \alpha_0, \quad \beta \in \Delta \setminus \Delta_{\alpha_0},$$

для которых $(\widetilde{\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{-\alpha}}) = 1$. Эти векторы образуют базис Картана–Вейля алгебры $\tilde{\mathcal{G}}$ с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_\alpha, \tilde{e}_\beta] &= (\widetilde{\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\beta}) \tilde{e}_\beta, \\ [\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta] &= \tilde{N}_{\alpha\beta} \tilde{e}_{\alpha+\beta}, \\ [\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{-\alpha}] &= \tilde{h}_\alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

Это дает возможность найти значение формы Киллинга на старших векторах $|\lambda^a\rangle \in V^a$, $e_{-\alpha_0}^{0_i} |\chi^{0_i}\rangle \in V^{0_i}$ представлений $\tilde{\pi}$:

$$\begin{aligned} (\alpha_j, \lambda^\rho) &= \tau(\widetilde{\tilde{\alpha}_j, \lambda^\rho}), \quad \tilde{\alpha}_j \equiv \tilde{h}_{\alpha_j}, \\ (\lambda^\rho, \lambda^\sigma) &= (\lambda^\rho, \alpha_0) \widehat{M}^{\alpha_0, \alpha_0}(\alpha_0, \lambda^\sigma) + \tau(\widetilde{\lambda^\rho, \lambda^\sigma}), \\ \rho; \sigma &= 1, \dots, N; 0_1, \dots, 0_p. \end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание разложение

$$\begin{aligned} (t^\rho, t^\sigma) &= \sum_{\alpha \in \Delta} \{e_{-\alpha}^\rho e_\alpha^\sigma + e_\alpha^\rho e_{-\alpha}^\sigma\} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Pi \\ \alpha, \beta \neq \alpha_0}} \widehat{M}^{\alpha, \beta} \hat{h}_\alpha^\rho \hat{h}_\beta^\sigma + \\ &+ \widehat{M}^{\alpha_0, \alpha_0} \hat{h}_{\alpha_0}^\rho \hat{h}_{\alpha_0}^\sigma + \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}} \{e_{-\alpha}^\rho e_\alpha^\sigma + e_\alpha^\rho e_{-\alpha}^\sigma\}, \\ \rho; \sigma &= 1, \dots, N; 0_1, \dots, 0_p, \end{aligned} \quad (35)$$

мы получим

$$H_p^\rho = \tau \tilde{H}_p^\rho + \sum_{\sigma \neq \rho} \frac{\widehat{M}^{\alpha_0 \alpha_0} \hat{h}_{\alpha_0}^\rho \hat{h}_{\alpha_0}^\sigma}{Z_\rho - Z_\sigma} + \sum_{\sigma \neq \rho} \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}} \frac{\{e_{-\alpha}^\rho e_\alpha^\sigma + e_\alpha^\rho e_{-\alpha}^\sigma\}}{Z_\rho - Z_\sigma},$$

$$\rho; \sigma = 1, \dots, N; 0_1, \dots, 0_p. \quad (36)$$

Так как $e_\alpha^\sigma \psi^p = 0$ при $\sigma = 1, \dots, N$, $\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+$, то из предположения индукции и из соотношений (29), (34), (36) следуют соотношения

$$\prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) H_p^a \psi^p(A_p) = \prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \left\{ \phi^a \psi^p(A_p) + \sum_{j=1}^m \tilde{f}_{\mu_j} \psi_{\mu_j}^{p|a}(A_p) \right\} +$$

$$+ \prod_{j=1}^p E^{0_j}(\mu_{0_j}) \left(\sum_{i=1}^p \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}} \frac{e_{-\alpha}^a e_\alpha^{0_i}}{Z_a - \mu_{0_i}} \right) \psi^p(A_p),$$

$$a = 1, \dots, N, \quad (37)$$

$$\prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) H_p^{0_k} \psi^p(A_p) = \prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \left\{ \phi^{0_k} \psi^p(A_p) + \sum_{j=1}^m \tilde{f}_{\mu_j} \psi_{\mu_j}^{p|0_k}(A_p) \right\} +$$

$$+ \prod_{j=1}^p E^{0_j}(\mu_{0_j}) \left(\sum_{b=1}^N \sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}} \frac{e_{-\alpha}^b e_\alpha^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_b} \right) \psi^p(A_p),$$

$$k = 1, \dots, p, \quad (38)$$

здесь

$$\phi^\sigma = \sum_{\rho \neq \sigma} \frac{(\lambda^\rho, \lambda^\sigma)}{Z_\sigma - Z_\rho} - \sum_{[\alpha_j; \mu_j] \in \bar{A}} \frac{(\alpha_j, \lambda^\sigma)}{Z_\sigma - \mu_j},$$

$$\tilde{f}_{\mu_j} = \sum_{[\alpha_i; \mu_i] \neq [\alpha_j; \mu_j]} \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{\mu_j - \mu_i} - \sum_{a=1}^N \frac{(\alpha_j, \lambda^a)}{\mu_j - Z_a}, \quad (39)$$

$$|\lambda^{0_i}\rangle \equiv e_{-\alpha_0}^{0_i} |\chi^{0_i}\rangle, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sigma; \rho = 1, \dots, N; 0_1, \dots, 0_p.$$

Умножая слева обе части соотношения (31) на P^{0_k} и используя формулу (14), мы получим

$$H_{k-1}^a E^{0_k}(\mu_{0_k}) = E^{0_k}(\mu_{0_k}) H_k^a + E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) H_k^{0_k} + \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} \frac{M^{\alpha\beta} h_\alpha^a \otimes h_\beta^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_a} E^{0_k}(\mu_{0_k}) -$$

$$- \left(\sum_{a=1}^N \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} \frac{M^{\alpha\beta} h_\alpha^a \otimes h_\beta^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_a} + \sum_{i < k} \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} \frac{M^{\alpha\beta} h_\alpha^{0_i} \otimes h_\beta^{0_k}}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} \right) \times$$

$$\times E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) + A^{0_k} P^{0_k},$$

$$H_{k-1}^{0_j} E^{0_k}(\mu_{0_k}) = E^{0_k}(\mu_{0_k}) H_k^{0_j} + \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} \frac{M^{\alpha\beta} h_\alpha^{0_k} \otimes h_\beta^{0_j}}{\mu_{0_k} - \mu_{0_j}} E^{0_k}(\mu_{0_k}) + B^{0_k} P^{0_k}, \quad j < k, \quad (40)$$

здесь A^{0_k} и B^{0_k} – некоторые операторы в Ω^p . Из (14.3) и (14.1) следует справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} M^{\alpha\beta} h_{\alpha}^{0_k} \otimes h_{\beta}^{\rho} E^{0_k}(\mu_{0_k}) &= E^{0_k}(\mu_{0_k}) \hat{h}_{\alpha_0}^{\rho}, \\ \sum_{\alpha, \beta \in \Pi} M^{\alpha\beta} h_{\alpha}^{0_k} \otimes h_{\beta}^{\rho} E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) &= E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \hat{h}_{\alpha_0}^{\rho}, \\ \rho &= 1, \dots, N, 0_1, \dots, 0_p, \quad a = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Имея в виду последние соотношения, из (40) получаем

$$\begin{aligned} H_{k-1}^a E^{0_k}(\mu_{0_k}) &= E^{0_k}(\mu_{0_k}) H_k^a + E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) H_k^{0_k} + \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} E^{0_k}(\mu_{0_k}) \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^a}{\mu_{0_k} - Z_a} - \\ &\quad - \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \left(\sum_{a=1}^N \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^a}{\mu_{0_k} - Z_a} + \sum_{i < k} \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^{0_i}}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} \right) + A^{0_k} P^{0_k}, \\ H_{k-1}^{0_i} E^{0_k}(\mu_{0_k}) &= E^{0_k}(\mu_{0_k}) H_k^{0_i} + \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^{0_i}}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} E^{0_k}(\mu_{0_k}) + B^{0_k} P^{0_k}, \quad i < k. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее, из (24) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \right]^p H^a \varphi \otimes \prod_{i=1}^p \otimes |\chi^{0_i}\rangle &= H^a \prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \psi^p = \\ &= \prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) H_{N+p}^a \psi^p + \sum_{k=1}^p E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_{k-1}}(\mu_{0_{k-1}}) \times \\ &\quad \times \{ H_{N+k-1}^a E^{0_k}(\mu_{0_k}) - E^{0_k}(\mu_{0_k}) H_{N+k}^a \} \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p. \end{aligned} \quad (42)$$

Теперь необходимо разложить выражение в фигурной скобке последней суммы с помощью соотношения (41). Рассмотрим выражение $e_{\alpha_1}^{0_k} e_{-\alpha_2}^{0_k} e_{\alpha_3}^{0_k} \psi^p$, $\alpha_i \in \Delta_{\alpha_0}^+$. Из определения (22) следует, что

$$e_{\alpha_3}^{0_k} \psi^p = \sum |f^1\rangle \otimes \dots \otimes |f^N\rangle \otimes |g^1\rangle \otimes \dots \otimes |\chi^{0_k}\rangle \otimes \dots \otimes |g^p\rangle,$$

где $|f^a\rangle \in V^a$, $|g^i\rangle \in V^{0_i}$. Отсюда с помощью (14.3) получаем

$$e_{\alpha_1}^{0_k} e_{-\alpha_2}^{0_k} e_{\alpha_3}^{0_k} \psi^p = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} e_{\alpha_3}^{0_k} \psi^p.$$

Благодаря этому с учетом (27) для последних членов в (37) и (38) мы получим

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p E^{0_i}(\mu_{0_i}) \frac{\sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} e_{-\alpha}^a \otimes e_{\alpha}^{0_k}}{Z_a - \mu_{0_k}} \psi^p &= \sum_{j > k} \prod_{i \neq j, k} \bar{E}^{0_i}(\mu_{0_i}) P^{0_k} P^{0_j} \times \\ &\times \sum_{b=1}^N \frac{e_{-\alpha_1}^b \otimes e_{\alpha_1}^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_b} \frac{e_{-\alpha_2}^{0_k} \otimes e_{\alpha_2}^{0_j}}{\mu_{0_j} - \mu_{0_k}} \frac{e_{-\alpha_3}^a \otimes e_{\alpha_3}^{0_k}}{Z_a - \mu_{0_k}} \psi^p = \\ &= - \sum_{j > k} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)/2}{\mu_{0_j} - \mu_{0_k}} E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_j}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 & E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \sum_{b=1}^N \frac{\sum_{\alpha \in \Delta_{\alpha_0}^+} e_{-\alpha}^b \otimes e_{\alpha}^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_b} \psi^p = \\
 & = \sum_{j>k} \prod_{i \neq j, k} \bar{E}^{0_i}(\mu_{0_i}) P^{0_k} P^{0_j} \frac{e_{-\alpha_1}^a \otimes e_{\alpha_1}^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_a} \frac{e_{-\alpha_2}^{0_k} \otimes e_{\alpha_2}^{0_j}}{\mu_{0_j} - \mu_{0_k}} \sum_{b=1}^N \frac{e_{-\alpha_3}^b \otimes e_{\alpha_3}^{0_k}}{\mu_{0_k} - Z_b} \psi^p = \\
 & = \sum_{j>k} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)/2}{\mu_{0_j} - \mu_{0_k}} \frac{\mu_{0_j} - Z_a}{\mu_{0_k} - Z_a} \varphi_{\mu_{0_j}}^a, \tag{44}
 \end{aligned}$$

где повторяющиеся индексы α_i означают суммирование по всем $\alpha_i \in \Delta_{\alpha_0}^+$.

Используя коммутационные соотношения (29.3) и пронося операторы $\hat{h}$ направо через $E(\mu)$, с учетом (26) получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_{k-1}}(\mu_{0_{k-1}}) \left\{ E^{0_k}(\mu_{0_k}) \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^a}{\mu_{0_k} - Z_a} - \right. \\
 & \left. - E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \sum_{a=1}^N \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^a}{\mu_{0_k} - Z_a} \right\} E^{0_{k+1}}(\mu_{0_{k+1}}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p = \\
 & = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)^p}{2^p} \left(\frac{(\lambda^a, \chi)}{\mu_{0_k} - Z_a} \varphi + \left(\sum_{i>k} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)/2}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} - \sum_{b=1}^N \frac{(\lambda^b, \chi)}{\mu_{0_k} - Z_b} \right) \varphi_{\mu_{0_k}}^a \right) - \\
 & - \sum_{i>k} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)/2}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_i}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Аналогично с учетом соотношений (26), (44) мы получим

$$\begin{aligned}
 & E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_{k-1}}(\mu_{0_{k-1}}) \times \\
 & \times \left\{ \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} \sum_{i<k} \frac{\hat{h}_{\alpha_0}^{0_i}}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) - E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) H_k^{0_k} \right\} \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) \psi^p = \\
 & = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)^p}{2^p} \left(\sum_{j>k} \frac{(\alpha_0, \alpha_0)/2}{\mu_{0_k} - \mu_{0_j}} \frac{\mu_{0_j} - Z_a}{\mu_{0_k} - Z_a} \varphi_{\mu_{0_j}}^a + \sum_{i \neq k} \frac{(\chi, e_{-\alpha_0} \chi)}{\mu_{0_k} - \mu_{0_i}} \varphi_{\mu_{0_k}}^a \right) + \\
 & + E^{0_1}(\mu_{0_1}) \dots E^{0_k|a}(\mu_{0_k}) \dots E^{0_p}(\mu_{0_p}) H_p^{0_k} \psi^p. \tag{46}
 \end{aligned}$$

Согласно определению векторов ψ^p и $\psi^{p|\rho}$ имеем

$$P^{0_k} \psi^p = 0, \quad P^{0_k} \psi^{p|\rho} = 0,$$

так что вклад последних членов из уравнения (41) в правой части (42) обращается в нуль.

Теперь для окончания доказательства равенств (6)–(9) остается сложить соотношения (37), (38) и (43)–(46) в соответствии с (41) и (42).

В заключение скажем несколько слов об оставшихся простых комплексных алгебрах Ли E_8 , F_4 , G_2 .

Если в множестве A , определяющем φ в (5), хотя бы один простой корень имеет кратность 1, то, обозначая этот корень через α_0 , мы придем к соотношениям (18), (20) и (21).

Кроме того, последние слагаемые в правых частях равенств (37), (38) обращаются в нуль, и приведенное доказательство полностью подходит и к этому случаю. Однако в случае произвольного множества A соотношения (24)–(26) не выполняются, и наше доказательство не имеет места.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^n$ – операторы в векторном пространстве V . Сопоставим каждому оператору комплексный параметр $\mu_i \in \mathbf{C}$: $A_i \leftrightarrow \mu_i$. Пары $(A_i; \mu_i)$ составляют множество $A = \{(A_i; \mu_i), i = 1, \dots, n\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in S_{|K|}} \frac{A_{p(1)} \cdots A_{p(|K|)}}{(\mu_{p(1)} - \mu_{p(2)}) \cdots (\mu_{p(|K|)} - Z)} = \\ &= \sum_{\substack{(K_1, K_2), K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \bigcup_a K_a = A/[A_n; \mu_n]}} \sum_{q \in S_{|K_1|}} \sum_{r \in S_{|K_2|}} \frac{[A_{q(1)}^{K_1}, [\dots [A_{q(|K_1|)}^{K_1}, A_n] \dots]]}{(\mu_{q(1)}^{K_1} - \mu_{q(2)}^{K_1}) \cdots (\mu_{q(|K_1|)}^{K_1} - \mu_n)(\mu_n - Z)} \times \\ & \times \frac{A_{r(1)}^{K_2} \cdots A_{r(|K_2|)}^{K_2}}{(\mu_{r(1)}^{K_2} - \mu_{r(2)}^{K_2}) \cdots (\mu_{r(|K_2|)}^{K_2} - Z)}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где K_1 и K_2 – подмножества A :

$$K_i = \left\{ (A_l^{K_i}; \mu_i^{K_i}); (A_l^{K_i}; \mu_i^{K_i}) \equiv (A_{j_l}; \mu_{j_l}) \in A, l = 1, \dots, |K_i| \leq n \right\},$$

а $S(k)$ – все перестановки чисел $1, \dots, k$.

Это комбинаторная задача, которая решается методом математической индукции. В случае $n = 1$ соотношение (П.1) очевидно. Мы допускаем, что оно имеет место при $n = m$, и будем доказывать его корректность при $n = m + 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} f_1^n \{A\}(Z) &= f_1^n \{(A_1; \mu_1) \cdots (A_n; \mu_n)\}(Z) = \sum_{p \in S_{|K|}} \frac{A_{p(1)} \cdots A_{p(|K|)}}{(\mu_{p(1)} - \mu_{p(2)}) \cdots (\mu_{p(|K|)} - Z)}, \\ f_2^n \{A\}(Z) &= f_2^n \{(A_1; \mu_1) \cdots (A_{n-1}; \mu_{n-1}) \parallel (A_n; \mu_n)\}(Z) = \\ &= \sum_{\substack{(K_1, K_2), K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \bigcup_a K_a = A/[A_n; \mu_n]}} \sum_{q \in S_{|K_1|}} \sum_{r \in S_{|K_2|}} \frac{[A_{q(1)}^{K_1}, [\dots [A_{q(|K_1|)}^{K_1}, A_n] \dots]]}{(\mu_{q(1)}^{K_1} - \mu_{q(2)}^{K_1}) \cdots (\mu_{q(|K_1|)}^{K_1} - \mu_n)(\mu_n - Z)} \times \\ & \times \frac{A_{r(1)}^{K_2} \cdots A_{r(|K_2|)}^{K_2}}{(\mu_{r(1)}^{K_2} - \mu_{r(2)}^{K_2}) \cdots (\mu_{r(|K_2|)}^{K_2} - Z)}. \end{aligned}$$

Как функции от комплексного переменного $f_1^{m+1}(Z)$ и $f_2^{m+1}(Z)$ имеют сингулярности только в точках $\{\mu_i\}_{i=1}^{m+1}$. В остальных точках зависимость f_1^{m+1} и f_2^{m+1} от Z аналитическая, причем

$$\lim_{|Z| \rightarrow \infty} f_1^{m+1} = \lim_{|Z| \rightarrow \infty} f_2^{m+1} = 0. \quad (\text{П.2})$$

Из (П.2) и теоремы Лиувилля следует, что для доказательства предложения достаточно показать, что

$$\operatorname{res}_{Z=\mu_i} f_1^{m+1} = \operatorname{res}_{Z=\mu_i} f_2^{m+1}, \quad i = 1, \dots, (m+1). \quad (\text{П.3})$$

При $i = 1, \dots, m$ из предположения индукции имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{Z=\mu_i} f_2^{m+1} \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \parallel (A_{m+1}; \mu_{m+1}) \} (Z) &= \\ = f_2^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (\widehat{A_i; \mu_i}) \dots (A_m; \mu_m) \parallel (A_{m+1}; \mu_{m+1}) \} (\mu_i) \times A_i &= \\ = f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (\widehat{A_i; \mu_i}) \dots (A_{m+1}; \mu_{m+1}) \} (\mu_i) \times A_i = \operatorname{res}_{Z=\mu_i} f_1^{m+1} (Z), \end{aligned}$$

где “ $\widehat{}$ ” означает, что соответствующий член опущен. Чтобы полностью иметь (П.3), остается рассмотреть случай $i = m+1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{Z=\mu_{m+1}} f_1^{m+1} \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_{m+1}; \mu_{m+1}) \} (Z) &= \\ = f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) \times A_{m+1} &= \\ = A_{m+1} \times f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) + \\ + [f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \}, A_{m+1}] &= \\ = A_{m+1} \times f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) + \\ + \sum_{i=1}^m f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots ([A_i, A_{m+1}]) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) &= \\ = A_{m+1} \times f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) + \\ + \sum_{i=1}^m f_2^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (\widehat{A_i; \mu_i}) \dots (A_m; \mu_m) \parallel ([A_i, A_{m+1}]; \mu_i) \} (\mu_{m+1}) &= \\ = A_{m+1} \times f_1^m \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m) \} (\mu_{m+1}) + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{(K_1, K_2), \\ K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \cup_a K_a = A \setminus (A_i \cup A_{m+1})}} \sum_{q \in S_{|K_1|}} \sum_{r \in S_{|K_2|}} \frac{[A_{q(1)}^{K_1}, [\dots [A_{q|K_1|}^{K_1}, [A_i, A_{m+1}]] \dots]]}{(\mu_{q(1)}^{K_1} - \mu_{q(2)}^{K_1}) \dots (\mu_{q|K_1|}^{K_1} - \mu_i)(\mu_i - \mu_{m+1})} \times \\ \times \frac{A_{r(1)}^{K_2} \dots A_{r(|K_2|)}^{K_2}}{(\mu_{r(1)}^{K_2} - \mu_{r(2)}^{K_2}) \dots (\mu_{r(|K_2|)}^{K_2} - \mu_{m+1})}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Последнее равенство следует из предположения индукции

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{Z=\mu_{m+1}} f_2^{m+1} \{ (A_1; \mu_1) \dots (A_m; \mu_m \parallel (A_{m+1}; \mu_{m+1}) \} (Z) &= \\ = \sum_{\substack{(K_1, K_2), K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \cup_a K_a = A \setminus [A_{m+1}; \mu_{m+1}]} \sum_{q \in S_{|K_1|}} \sum_{r \in S_{|K_2|}} \frac{[A_{q(1)}^{K_1}, [\dots [A_{q|K_1|}^{K_1}, A_{m+1}] \dots]]}{(\mu_{q(1)}^{K_1} - \mu_{q(2)}^{K_1}) \dots (\mu_{q|K_1|}^{K_1} - \mu_{m+1})} \times \\ \times \frac{A_{r(1)}^{K_2} \dots A_{r(|K_2|)}^{K_2}}{(\mu_{r(1)}^{K_2} - \mu_{r(2)}^{K_2}) \dots (\mu_{r(|K_2|)}^{K_2} - \mu_{m+1})}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Нетрудно заметить, что любой член суммы (П.4) можно найти в правой части (П.5). Действительно, первый член в правой части (П.4) равен подсумме (П.5) с $K_1 = \emptyset$ в силу того, что в этом случае

$$\sum_{\substack{(K_1, K_2), K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \bigcup_a K_a = A \setminus [A_{m+1}; \mu_{m+1}]}} \sum_{q \in S_{|K_1|}} \sum_{r \in S_{|K_2|}} = A_{m+1} \times \sum_{p \in S(m)}.$$

Что же касается слагаемого из последней подсуммы (П.4) с конкретным i , то его можно найти в (П.5) с $A_i \in K_1$, $A_{q|K_1|}^{K_1} = A_i$. Из вышесказанного и из того, что число членов суммы (П.4) $m! + \sum_{k=1}^m m! = (m+1)!$ равно числу членов суммы (П.5) $\sum_{k=0}^m C_k^m (m-k)!k! = (m+1)!$, следует равенство этих сумм.

Таким образом, мы полностью доказали (П.3), доказывая тем самым исходное утверждение.

Автор благодарен Г.М. Бабуджяну за постановку задачи и Р.Г. Погосяну за многократные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *М. Годен.* Волновая функция Бете. М.: Мир, 1987.
- [2] *C. N. Yang.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1312.
- [3] *B. Sutherland.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 20. P. 98.
- [4] *P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A: Math. Gen. 1983. V. 16. P. 591.
- [5] *M. Karowski, P. Weisz.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 495.
- [6] *F. A. Smirnov.* Formfactors In Completely Integrable Models Of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific Pub. Co., 1990.
- [7] *H. M. Babujian, R. Flume.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. № 22. P. 2029.
- [8] *V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 247. P. 83.
- [9] *H. M. Babujian.* Correlation function in WZNW model as a Bethe wave function for the Gaudin magnetics. In: Proc. XXIV Int. Symp. Ahrenshoop, Zeuthen 1990. Preprint YERPHI-1261 (4)-90.
- [10] *B. Feigin, E. Frenkel, N. Yu. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 166. P. 27.
- [11] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [12] *Д. П. Желобенко, А. И. Штерн.* Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 5.II.1997 г.

V. V. Mkhitaryan

GAUDIN MAGNET AND OFF MASS SHELL BETHE WAVE FUNCTIONS

The general Bethe equation (or off-shell Bethe ansatz equation) is proved for the Gaudin magnet in the case of a wide class of complex simple Lie algebras.