Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Гудков, О соответствии гиперкомплексных решений специальным унитарным группам, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 29–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:18:06

В. В. Гудков*

О СООТВЕТСТВИИ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫМ УНИТАРНЫМ ГРУППАМ

На примере нелинейного уравнения Клейна–Гордона показано, что гиперкомплексные решения четного индекса имеют матричные представления, которые могут быть поставлены в соответствие специальным унитарным группам. В частности, для индекса 2 установлено, что это соответствие взаимно однозначное. Для нечетного индекса 3 доказано, что в классе унитарных антиэрмитовых матриц не существует антикоммутирующих матриц. Показано, что в задачах электронно-протонного транспорта полученные решения описывают огибание потенциального барьера.

В работе [1] введены, а в работе [2] обобщены функции q_n , с помощью которых строятся новые волновые решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона, называемые далее гиперкомплексными решениями. Наибольший интерес представляют те гиперкомплексные решения, которые имеют матричные представления. Для четных индексов в данной работе указана процедура нахождения матричных представлений гиперкомплексных решений. Для индекса 2 используются матрицы Паули, для индекса 4 – матрицы Дирака, для более высоких четных индексов используются блочно-диагональные матрицы с блоками из матриц Паули и Дирака. Показано, что для четного индекса n при каждом фиксированном аргументе матрица гиперкомплексного решения уравнения Клейна–Гордона является элементом специальной унитарной группы $SU(n)$. Для $n = 2$ установлено взаимно однозначное соответствие между множеством матричных представлений гиперкомплексных решений уравнения Клейна–Гордона и группой спинных вращений $SU(2)$.

Относительно гиперкомплексных решений нечетного индекса справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Не существует двух унитарных антиэрмитовых 3×3 -матриц, которые антикоммутируют друг с другом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится от противного. Из условия перестановочности двух унитарных антиэрмитовых матриц выписываются 3 уравнения для диагональных и 3 уравнения для наддиагональных элементов, и с помощью ряда процедур устанавливается несовместность этих уравнений.

В работе [1] были определены специальные функции действительного переменного $z \in (-\infty, \infty)$

$$p(z) = (1 + \exp(z))^{-1}, \quad q(z) = p(2z) \pm \frac{i}{2} \operatorname{sech}(z)$$

*Институт математики и информатики Латвийского университета, Рига, Латвия

как решения логистического уравнения $u' = u(u - 1)$. В работе [2] дано обобщение комплексной функции q на многокомпонентный случай:

$$q_n(z) = p(2z)E + \frac{\operatorname{sech}(z)}{2} \sum_{k=1}^m a_k M_k, \quad \sum_{k=1}^m a_k^2 = 1, \quad (1)$$

где $n = 2, 3, \dots$; $\{E, M_1, \dots, M_m\}$ – множество гиперкомплексных чисел порядка n (см. [3, с. 28]), в котором определена операция умножения и которое содержит единицу E и m элементов $M_1, \dots, M_m$, обладающих для любых $i, k = 1, 2, \dots, m$ свойствами

$$M_k M_k = -E, \quad M_i M_k = -M_k M_i, \quad i \neq k. \quad (2)$$

Благодаря соотношениям

$$p(2z)(1 - p(2z)) = \frac{\operatorname{sech}^2(z)}{4}, \quad 1 - 2p(2z) = \operatorname{th}(z) \quad (3)$$

и свойствам (2) становится очевидным утверждение, что функция q_n удовлетворяет логистическому уравнению.

Рассмотрим хорошо известное в квантовой теории поля уравнение Клейна–Гордона [4, 5]

$$u_{xx} - u_{tt} = \lambda u^3 - \mu^2 u, \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

В движущейся со скоростью γ системе координат $z = x - \gamma t$ уравнение (4) имеет гиперкомплексные решения

$$\begin{aligned} u_n(z) &= \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} (2q_n(\alpha z) - E) \quad \text{при } \gamma^2 < 1, \\ v_n(z) &= \pm \frac{2\mu\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} (q_n(\beta z))^{1/2} (1 - q_n(\beta z))^{1/2} \quad \text{при } \gamma^2 > 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\alpha = \pm \mu \sqrt{2} (1 - \gamma^2)^{-1/2}, \quad \beta = \pm 2\mu (\gamma^2 - 1)^{-1/2}.$$

Приведем матричные представления решений u_2, u_4, u_6 . Учитывая (1) и второе равенство в (3), перепишем решение u_2 в виде

$$u_2(z) = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \left(-\operatorname{th}(\alpha z)E + \operatorname{sech}(\alpha z) \sum_{k=1}^3 a_k A_k \right), \quad (6)$$

где гиперкомплексные числа представлены в виде матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_k связаны с матрицами Паули σ^k (см. [4, с. 27]) следующими равенствами:

$$A_1 = i\sigma^1, \quad A_2 = -i\sigma^2, \quad A_3 = i\sigma^3.$$

В дальнейшем, забывая о множителе связи между A_k и σ^k , будем под термином “матрицы Паули” подразумевать матрицы A_k .

Комплексные 4×4 -матрицы Дирака γ^k (см. [5, с. 64]) при $k = 1, 2, 3, 4$ обозначим через D_k . Соответствующее им решение (5) имеет вид

$$u_4(z) = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \left(-\operatorname{th}(\alpha z) E + \operatorname{sech}(\alpha z) \sum_{k=1}^4 a_k D_k \right). \quad (7)$$

Блочнo-диагональные линейно независимые комплексные 6×6 -матрицы F_j построим следующим образом: главную диагональ матриц F_k при $k = 1, 2, 3$ представим в виде пары (A_k, D_k) , а при $k = 4, 5, 6$ – в виде (A_{k-3}, D_{k-2}) . Соответствующее им решение (5) имеет вид

$$u_6(z) = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \left(-\operatorname{th}(\alpha z) E + \operatorname{sech}(\alpha z) \sum_{k=1}^6 a_k F_k \right). \quad (8)$$

Способ построения блочно-диагональных матриц F_j может быть распространен и на более высокие четные порядки.

Покажем связь матричных решений u_2, u_4, u_6 со специальными унитарными группами $SU(2), SU(4), SU(6)$. Пусть в векторном (по отношению к сложению матриц) пространстве W всех комплексных $n \times n$ -матриц выбрано множество $\{M_k\}$ таких линейно независимых матриц M_k , которые обладают тремя свойствами: они унитарны, антиэрмитовы и антикоммутируют друг с другом. Максимальное число m линейно независимых матриц из $\{M_k\}$ вместе с единичной матрицей E образуют базис в действительном (над полем действительных чисел) векторном $((m+1)$ -мерном) собственном подпространстве V пространства W . Любая матрица M из V может быть представлена в виде разложения по базису:

$$M = c_0 E + \sum_{k=1}^m c_k M_k, \quad (9)$$

где c_k ($k = 0, 1, \dots, m$) – действительные числа. Умножение матрицы M на эрмитово сопряженную к ней матрицу M^* приводит к условию

$$M M^* = \sum_{k=0}^m c_k^2.$$

Отсюда следует, что матрица M унитарна при

$$\sum_{k=0}^m c_k^2 = 1.$$

Если к тому же $\det M = 1$, то матрица M является элементом специальной унитарной группы $SU(n)$, которая является подгруппой всех унитарных комплексных $n \times n$ -матриц с единичным определителем (см. [6, с. 129]). Естественными примерами таких матриц M_k служат матрицы A_i, D_k, F_j .

Перейдем теперь к решениям u_2, u_4, u_6 уравнения Клейна–Гордона. Будем считать, что в этих решениях правые части выражений (6)–(8) взяты со знаком плюс и что

$\mu = \sqrt{\lambda}$. Тогда для любого решения u из множества $\{u_2, u_4, u_6\}$ выполняется соотношение

$$u(z)u^*(z) = \operatorname{th}^2(\alpha z) + \operatorname{sech}^2(\alpha z) \sum_{k=1}^m a_k^2 = 1, \quad (10)$$

где $m = 3, 4, 6$ соответственно для u_2, u_4, u_6 . Это означает, что для любого фиксированного z матрица $u(z)$ унитарна. Далее, благодаря свойствам матриц A_i, D_k, F_j имеем, что $\det u_k(z) = 1$ при $k = 2, 4, 6$. Равенство $\det u_6 = 1$ накладывает дополнительное условие на коэффициенты a_k :

$$a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6 = 0, \quad a_2 a_4 + a_3 a_5 = 0.$$

Таким образом, наши матричные решения удовлетворяют включениям

$$u_2(z) \in SU(2), \quad u_4(z) \in SU(4), \quad u_6(z) \in SU(6).$$

Относительно решения u_2 справедлив более сильный результат.

ТЕОРЕМА 2. *Для действительных z и a_k множество U_2 матриц*

$$-\operatorname{th}(z)E + \operatorname{sech}(z) \sum_{k=1}^3 a_k A_k, \quad \sum_{k=1}^3 a_k^2 = 1$$

находится во взаимно однозначном соответствии с матричной группой $SU(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элемент из U_2 , как показано выше, есть унитарная 2×2 -матрица с единичным определителем, т.е. элемент из $SU(2)$. С другой стороны, каждый элемент матричной группы $SU(2)$ есть унитарная 2×2 -матрица с единичным определителем, которая может быть разложена по базису $\{E, A_1, A_2, A_3\}$. Пусть c_0, c_1, c_2, c_3 – коэффициенты этого разложения, тогда при $k = 1, 2, 3$ формулами

$$z = \operatorname{arth}(-c_0), \quad a_k = \frac{c_k}{\operatorname{sech}(\operatorname{arth}(-c_0))}$$

однозначно определяются параметры z, a_1, a_2, a_3 некоторой матрицы из U_2 . Теорема доказана.

Решения (5) представляют собой новый класс решений задач электронно-протонного транспорта в биологических структурах. Покажем это на одном примере. Описание процесса “туннельного” переноса электронов между соседними молекулами основывается на одномерной модели с двумя потенциальными ямами, разделенными потенциальным барьером (см. [7, с. 271]). Аналогичная модель используется для описания протонной проводимости в одномерных нитях льдоподобных структур и приповерхностных слоев воды (см. [8, с. 99]).

Задача о смещении электрона (протона) в такой модели сводится к решению уравнения Клейна–Гордона с потенциалом

$$U = \frac{\lambda}{4}(1 - u^2)^2 \Rightarrow U' = \lambda(u^3 - u),$$

где $\lambda/4$ – высота потенциального барьера, $u = \pm 1$ – координаты потенциальных ям. При $\mu^2 = \lambda$ комплексное решение (5) при $n = 1$ записывается в виде

$$u_1 = \pm(-\operatorname{th}(\alpha z) \pm i \operatorname{sech}(\alpha z)),$$

или с помощью полярного угла

$$u_1(z) = \pm \exp(i\varphi(\alpha z)), \quad \varphi(\alpha z) = \pm \operatorname{arctg}(-\operatorname{cosech}(\alpha z)).$$

Отметим, что изменение аргумента z от $-\infty$ до $+\infty$ влечет изменение угла φ от 0 до $\pm\pi$. Следовательно, решение u_1 характеризует смещение электрона (протона) из одного положения равновесия в другое путем поворота-обхода барьера, т.е. процесс “туннелирования” сводится к огибанию потенциального барьера.

В дополнение к огибанию потенциальных барьеров в той же задаче о протонной проводимости в цепочке молекул воды вслед за смещением протона от одной молекулы к другой происходит восстановительный процесс – перемещение так называемых ориентационных дефектов Бьеррума. Это перемещение обусловлено поворотом на угол π молекул воды вокруг вертикальной связи атома кислорода с атомом водорода (см. [8, с. 98]). Поскольку эти повороты тоже связаны с преодолением потенциального барьера, то именно комплексное решение $u = u_0 u_1$ уравнения Клейна–Гордона служит явным подтверждением такого поворота.

Отметим в заключение, что матричные решения u_k ($k = 2, 4, 6$) могут быть представлены в виде диагональных матриц с элементами $\exp(i\varphi_j(\alpha z))$ ($j = 1, \dots, k$) на главной диагонали.

Список литературы

- [1] В. В. Гудков. Доклады РАН. 1997. Т. 353. № 4. С. 439–441.
- [2] В. В. Гудков. ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37. № 5. С. 599–604.
- [3] Э. Маделунг. Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1960.
- [4] П. Рамон. Теория поля. Современный вводный курс. М.: Мир, 1984.
- [5] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [6] Б. Шутц. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984.
- [7] А. С. Давыдов. Биология и квантовая механика. Киев: Наукова думка, 1979.
- [8] А. С. Давыдов. Солитоны в биоэнергетике. Киев: Наукова думка, 1986.

Поступила в редакцию 28.IV.1997 г.

V. V. Gudkov

ON THE CORRESPONDENCE OF HYPERCOMPLEX SOLUTIONS TO SPECIAL UNITARY GROUPS

In the example of the nonlinear Klein–Gordon equation, we demonstrate that the even-indexed, hypergeometric solutions admit matrix representation that can be associated with special unitary groups. For the index 2, in particular, this correspondence is shown to be 1 : 1. For the odd index 3, we show that no anticommuting matrices exist in the class of unitary anti-Hermitian matrices. We also show that in the electron-proton transport problem, the solution obtained describes the passage of the particles through the potential barrier.