Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Васильев, И. В. Тютин, Лагранжево описание неприводимых массивных полей произвольного спина в размерности $2+1$, *ТМФ*, 1997, том 113, номер 1, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:38:48

М. А. Васильев*, И. В. Тютин*

ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ МАССИВНЫХ ПОЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА В РАЗМЕРНОСТИ $2 + 1$

Дано лагранжево описание свободных массивных полей, образующих неприводимое представление группы Пуанкаре произвольного целого и полуцелого спина в пространстве-времени размерности 3. Обсуждается взаимосвязь рассматриваемой теории с уравнениями самодуальности в четырех измерениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — дать лагранжево описание свободных массивных полей, образующих неприводимое представление группы Пуанкаре произвольного целого (бозоны) или полуцелого (фермионы) спина в пространстве-времени размерности 3. Интерес к моделям в пространстве малой размерности связан прежде всего с тем, что, будучи относительно простыми, такие теории служат полигоном для изучения более реалистических теорий в пространствах большего числа измерений. Кроме того, можно надеяться на то, что эти модели могут описывать физические системы типа пленок.

К настоящему моменту имеется большое число работ начиная с классической работы Фирца и Паули [1], в которых построены калибровочно-инвариантные действия для безмассовых полей произвольного спина в произвольной размерности [2] и действия для массивных полей, отвечающих полностью симметричным представлениям малой группы в размерностях $D \geq 4$ [3]. Отметим работу [4], в которой продемонстрировано, что действия для массивных полей в размерности D могут быть получены размерной редукцией действий для безмассовых полей в размерности $D + 1$. При этом автоматически возникают дополнительные поля, без которых невозможно построение локального действия. Прямолинейное использование этой процедуры для построения действия массивных полей в размерности 3 путем редукции калибровочно-инвариантного действия в размерности 4 [5–9] сталкивается со следующей проблемой. Калибровочно-инвариантные действия в размерности 4 описывают поля с двумя значениями спиральности (эти поля можно интерпретировать либо как майорановские поля с двумя значениями спиральности, либо как вейлевские поля и антиполя, каждое с одним значением спиральности). При редукции в трехмерное пространство возникает действие, которое описывает поле с двумя значениями $(2 + 1)$ -мерного спина, оказывающееся, следовательно, приводимым

*Физический институт им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия

представлением $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре [10]. Поскольку в размерности 4 невозможно построить локальное действие, описывающее самодуальное поле с одним значением спиральности [11] (майорано-вейлевское поле), после размерной редукции $4 \rightarrow 3$ необходимо выполнить дополнительную редукцию, вдвое уменьшающую число физических компонент, если мы хотим, чтобы физическая система отвечала неприводимому представлению $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре.

До сих пор в литературе были предложены действия для неприводимых массивных полей в $(2+1)$ -мерном пространстве со спинами $s = 1$ [12–14], $s = 3/2$ [15, 16], $s = 2$ [14, 17] и $s = 5/2$ [18, 19]. Формализм, применяемый в данной работе для построения лагранжева описания произвольных неприводимых представлений $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре, связан с редукцией в размерность $2+1$ тетрадоподобных переменных, введенных для описания безмассовых полей произвольного целого [8] и полуполого [8, 9] спинов в $3+1$ измерениях. В случае спинов $3/2$, 2 и $5/2$ мы воспроизводим результаты работ [16, 14, 18].

План работы следующий. Раздел 2 посвящен описанию используемых обозначений. В разделе 3 построены действия (первого порядка по производным) для бозонных полей произвольного целого спина s , $|s| \geq 2$, а в разделе 4 то же самое сделано для фермионных полей произвольного полуполого спина s , $|s| \geq 3/2$. В разделе 5 рассмотрены ограничения на параметры модели (выбор знаков перед кинетическим и массовым членами в действии), следующие из требования положительности энергии и нормы состояний. В разделе 6 для бозонного случая целых s построено действие второго порядка по производным, описывающее сразу оба неприводимых представления $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре с фиксированным значением $|s|$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве полевых переменных мы будем использовать симметричные по всем спинорным индексам поля $\lambda_{\alpha(n)}^n \equiv \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$ и $h_{\mu|\alpha(n)}^n \equiv h_{\mu|\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \dots = 1, 2$ ¹⁾. Для этих полей будут также использоваться обозначения λ^n и h_μ^n . Поднимание и опускание векторных индексов производится обычным образом с помощью метрических тензоров $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$. Поднимание и опускание спинорных индексов производится с помощью $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ и $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, причем $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{12} = 1$:

$$A_\alpha = A^\beta \varepsilon_{\beta\alpha}, \quad A^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} A_\beta, \quad A^\alpha B_\alpha = -A_\alpha B^\alpha.$$

Преобразование Лоренца для полей h_μ^n и λ^n , отвечающее преобразованию координат $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$, $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu|\alpha(n)}^n &= \frac{i}{2} \omega^{\nu\sigma} (M_{\nu\sigma} h^n)_{\mu|\alpha(n)} = \omega^{\nu\sigma} x_\nu \partial_\sigma h_{\mu|\alpha(n)}^n + \\ &\quad + \omega_{\mu\nu} h^{n\nu}{}_{|\alpha(n)} - \frac{n}{4} \omega^{\nu\sigma} \varepsilon_{\nu\sigma\rho} e^{\rho|}{}_\alpha{}^\beta h_{\mu|\alpha(n-1)\beta}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta \lambda_{\alpha(n)}^n = \omega^{\nu\sigma} x_\nu \partial_\sigma \lambda_{\alpha(n)}^n - \frac{n}{4} \omega^{\nu\sigma} \varepsilon_{\nu\sigma\rho} e^{\rho|}{}_\alpha{}^\beta \lambda_{\alpha(n-1)\beta}^n. \quad (2)$$

¹⁾Здесь и ниже греческие индексы из первой половины алфавита являются спинорными, $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$; из второй половины алфавита – векторными, $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$.

Здесь $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{012} = \varepsilon^{012} = 1$, $e^\mu|_{\alpha\beta}$ — набор трех вещественных симметричных матриц, свойства которых определяются соотношением

$$e^\mu|_{\alpha\gamma} e^\nu|_{\beta\gamma} = \eta^{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\sigma|\alpha\beta}$$

и которые удовлетворяют следующим полезным тождествам:

$$e_{\mu|\alpha(2)} e^{\mu|\beta(2)} = 2\delta_\alpha^\beta \delta_\alpha^\beta, \quad \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} e_{\sigma|\beta(2)} = -2\delta_\alpha^\beta e^\mu|_{\alpha\beta}$$

(в разделе 6 будет использована специальная реализация, в которой $e^{0|}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Примем следующее соглашение [20]:

$$A_{\alpha(k)\beta(l)}^{k+l} B_{\alpha(m)\gamma(n)}^{m+n} \equiv \frac{1}{C_{k+m}^k} \sum A_{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} \beta(l)}^{k+l} B_{\alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_{k+m}} \gamma(n)}^{m+n},$$

суммирование ведется по всем C_{k+m}^k сочетаниям индексов α_i , A^{k+l} и B^{m+n} симметричны по своим спинорным индексам, кроме того,

$$A^{n+m\alpha(n)\beta(m)} B_{\alpha(n+k)\gamma(l)}^{n+k+l} \equiv \sum_{\alpha_i} A^{n+m\alpha_1 \dots \alpha_n \beta(m)} B_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha(k)\gamma(l)}^{n+k+l},$$

$$A^{n+m\alpha(n)\beta(m)} B_{\alpha(n_1)\gamma(k)}^{n_1+k} C_{\alpha(n-n_1)\delta(l)}^{n-n_1+l} \equiv A^{n+m\alpha(n)\beta(m)} \left(B_{\alpha(n_1)\gamma(k)}^{n_1+k} C_{\alpha(n-n_1)\delta(l)}^{n-n_1+l} \right).$$

Оператор Казимира группы Пуанкаре (скаляр Паули–Любаньского)

$$W = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} M_{\nu\sigma} \partial_\mu$$

действует на h_μ^n по правилу

$$(W h^n)_{\mu|\alpha(n)} = \varepsilon_\mu^{\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(n)}^n + \frac{n}{2} e^{\sigma|}_{\alpha\beta} \partial_\sigma h_{\mu|\alpha(n-1)\beta}^n. \quad (3)$$

Его собственные значения ms определяют спин состояния s относительно группы Пуанкаре; m — масса состояния, которую мы всегда будем считать положительной.

Поле h_μ^N описывает только один (старший) спин $\pm(N+2)/2$, если оно удовлетворяет условию

$$e^\mu|_{\beta\gamma} h_{\mu|\alpha(N-1)\gamma}^N = 0 \quad (4)$$

(которое означает, что поле $\tilde{h}_{\beta_1\beta_2\alpha_1\dots\alpha_N}^{N+2} \equiv (1/2)e^\mu|_{\beta_1\beta_2} h_{\mu|\alpha_1\dots\alpha_N}^N$ симметрично по всем $N+2$ спинорным индексам) и, например,

$$\varepsilon_\mu^{\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(N)}^N = \pm m h_{\mu|\alpha(N)}^N \quad (5)$$

(последнее равенство означает, что поле $\tilde{h}^{N+2}$ удовлетворяет уравнению Дирака по каждому спинорному индексу).

Наша задача состоит в нахождении экстремального принципа, приводящего к уравнениям (4), (5) и, быть может, к совокупности динамически тривиальных уравнений для вспомогательных полей.

3. БОЗОННЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе будет построено действие для бозонных полей произвольного целого спина s , $|s| = (N + 2)/2 \geq 2$, $N \geq 2$ четное. Начнем с действия

$$\begin{aligned}
S_B = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \xi_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(n)}^n + \\
& + \frac{m}{2} \sum_{n=2}^N a_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n-1)\beta} e_{\nu|\beta}^\gamma h_{\sigma|\alpha(n-1)\gamma}^n + \\
& + m \sum_{n=2}^N b_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n-2)}^{n-2} + \\
& + m \sum_{n=0}^{N-2} \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)}, \tag{6}
\end{aligned}$$

где суммирование выполняется по четным n . Бозонные поля h_μ^n, λ^n действительные. Из условия вещественности действия следует, что коэффициенты ξ_n, a_n, b_n должны быть вещественными. Мы будем считать, что $\xi_n = \pm 1$, чего всегда можно добиться подходящей нормировкой полей. Действие (6) инвариантно относительно преобразований Лоренца (1), (2). Задача состоит в том, чтобы подобрать коэффициенты ξ_n, a_n, b_n таким образом, чтобы лишние компоненты поля h_μ^N (включая один из двух старших спинов), а также все поля h_μ^n , $0 \leq n \leq N - 2$, и λ^n , $2 \leq n \leq N$, обращались в нуль на уравнениях движения.

Вариация действия по λ^n дает уравнения связей

$$e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(n)}^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N - 2. \tag{7}$$

Из (7) при $n = 0$ следует

$$h_\mu^0 = 0. \tag{8}$$

Вариация действия по h_μ^n дает уравнения движения

$$\begin{aligned}
& \xi_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(n)}^n + (1 - \delta_{n,0}) m a_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}^\beta h_{\sigma|\alpha(n-1)\beta}^n + \\
& + (1 - \delta_{n,0}) m b_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n-2)}^{n-2} - \\
& - (1 - \delta_{n,N}) m b_{n+2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n+2)}^{n+2} + \\
& + (1 - \delta_{n,N}) m e^{\mu|\alpha(2)} \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} = 0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Возьмем дивергенцию левой части (9) по ∂_μ и в полученных уравнениях исключим производные всех функций h_σ^n с помощью (9). При каждом n в возникающих уравнениях могут появиться величины $h_\sigma^{n+4}, h_\sigma^{n+2}, h_\sigma^n, h_\sigma^{n-2}, h_\sigma^{n-4}$. Коэффициенты перед h_σ^{n+4} и

h_σ^{n-4} тождественно равны нулю из-за свойств матриц e_μ и антисимметризации по векторным индексам. Слагаемое с h_σ^{n-2} равно нулю в силу уравнений связей (7)²⁾. В результате получаем после некоторых преобразований

$$2\xi_2 a_2 b_2 e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(2)}^2 = \frac{1}{m} e^{\mu|\alpha(2)} \partial_\mu \lambda_{\alpha(2)}^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_{n+2} & \left(\xi_n a_n - \frac{n+4}{n+2} \xi_{n+2} a_{n+2} \right) e^{\sigma|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n+2)}^{n+2} + \\ & + \left(\frac{2}{n} \xi_n a_n^2 + 2\xi_{n-2} b_n^2 - \frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \xi_{n+2} b_{n+2}^2 \right) e^{\sigma|\alpha^\beta} h_{\sigma|\alpha(n-1)\beta}^n + \\ & + 2\xi_{n-2} b_n \lambda_{\alpha(n)}^n + \frac{1}{m} (1 - \delta_{n,N}) e^{\mu|\alpha(2)} \partial_\mu \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} = 0, \quad 2 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (11)$$

где по определению $b_{N+2} = 0$.

Потребуем, чтобы коэффициенты перед h_σ^{n+2} и h_σ^n в (11) обращались в нуль:

$$\begin{aligned} \xi_n a_n - \frac{n+4}{n+2} \xi_{n+2} a_{n+2} &= 0, \quad 2 \leq n \leq N, \\ \frac{1}{n} \xi_n a_n^2 + \xi_{n-2} b_n^2 - \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \xi_{n+2} b_{n+2}^2 &= 0, \quad 2 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$a_n = \frac{N+2}{n+2} \xi_N \xi_n (-1)^{(N+2)/2} \theta, \quad b_n^2 = -\xi_{n-2} \xi_n \frac{(N+2)^2 - n^2}{4n(n+1)}, \quad \theta^2 = 1,$$

где выбрана нормировка $a_N = (-1)^{(N+2)/2} \theta$, что всегда может быть достигнуто переопределением параметра m . В разделе 5 будет показано, что условие положительности энергии и нормы состояний выполняется только при $\theta = 1$, что мы и примем ниже. Условие $b_n^2 > 0$ дает $\xi_{n-2} \xi_n = -1$, т.е.

$$\xi_n = (-1)^{(n+2)/2} \xi, \quad \xi^2 = 1,$$

так что окончательно имеем

$$\begin{aligned} \xi_n &= (-1)^{(n+2)/2} \xi, \quad a_n = (-1)^{(n+2)/2} \frac{N+2}{n+2}, \\ b_n &= \frac{(-1)^{(n+2)/2}}{2} \sqrt{\frac{(N+2)^2 - n^2}{n(n+1)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Любой другой выбор знаков для b_n может быть скомпенсирован простым переопределением полей.

Полагая $n = N$ в (11), получаем

$$\lambda_{\alpha(N)}^N = 0. \quad (13)$$

²⁾ Отметим, что здесь реально необходимо лишь одно из уравнений связей, именно (8). При $n \geq 4$ коэффициент перед h_σ^{n-2} исчезает, если взять a_n из (12).

Полагая там же $n = N - 2$ и учитывая (13), получаем

$$\lambda_{\alpha(N-2)}^{N-2} = 0$$

и т. д.

Окончательно из (11) следует, что на уравнениях движения все лагранжевы множители равны нулю:

$$\lambda_{\alpha(n)}^n = 0, \quad n = 2, \dots, N.$$

Перейдем к изучению уравнений для h_μ^n .

Пусть $N = 2$. Уравнение движения (9) при $n = 0$ (с учетом (8)) и уравнение (10) дают

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(2)}^2 = 0, \quad e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(2)}^2 = 0,$$

что эквивалентно условию (4). Уравнение движения (9) при $n = 2$ имеет вид

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(2)}^2 + \xi m \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}{}^\beta h_{\sigma|\alpha\beta}^2 = 0,$$

что эквивалентно (5).

Пусть $N > 2$. Уравнение движения (9) при $n = 0$ (с учетом (8)), уравнение связи (7) при $n = 2$ и уравнение (10) дают

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(2)}^2 = 0, \quad e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(2)}^2 = 0, \quad e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(2)}^2 = 0,$$

откуда, как нетрудно убедиться, следует

$$h_{\mu|\alpha(2)}^2 = 0.$$

Далее предположим, что мы проверили, что все h_μ^k , $2 \leq k \leq n_0 < N - 2$, равны нулю на уравнениях движения. Тогда уравнение движения (9) при $n = n_0$ и уравнение связи (7) при $n = n_0 + 2$ дают

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(n_0+2)} h_{\sigma|\alpha(n_0+2)}^{n_0+2} = 0, \quad e^{\mu|\alpha(n_0+2)} h_{\mu|\alpha(n_0+2)}^{n_0+2} = 0,$$

откуда следует

$$h_{\mu|\alpha(n_0+2)}^{n_0+2} = 0.$$

Итак, уравнение движения (9) при $n \leq N - 4$, уравнения связи (8) и (7) и уравнение (10) дают

$$h_{\mu|\alpha(n)}^n = 0, \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Наконец, из уравнения движения (9) при $n = N - 2$ и $n = N$ можно получить

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(N)} h_{\sigma|\alpha(N)}^N = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(N)}^N + \xi m \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}{}^\beta h_{\sigma|\alpha(N-1)\beta}^N = 0. \tag{15}$$

Условие (14) при $N \geq 3$ эквивалентно условию (4). В силу этого условия уравнения (15) могут быть переписаны в эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu{}^{\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(N)}^N - \xi m h_{\mu|\alpha(N)}^N &= 0, \\ e^{\nu|\beta} \partial_\nu h_{\mu|\alpha(N-1)\gamma}^N - \xi m h_{\mu|\beta\alpha(N-1)}^N &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Из этих представлений следуют равенства

$$\begin{aligned} (\square + m^2)h_{\mu|\alpha(N)}^N &= 0, \quad \square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2, \\ (Wh^N)_{\mu|\alpha(N)} &= m \left(\xi \frac{N+2}{2} \right) h_{\mu|\alpha(N)}^N. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, параметр m совпадает с массой покоя, а из (17) следует, что поле h_{μ}^N имеет спин $\xi(N+2)/2$.

Итак, установлено, что действие (6) при выборе параметров (12) описывает неприводимое представление $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре спина $\xi(N+2)/2$.

4. ФЕРМИОННЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе будет построено действие для фермионных полей произвольного полуполого спина s , $|s| = (N+2)/2 \geq 3/2$, где $N \geq 1$ нечетное:

$$\begin{aligned} S_{\Phi} &= \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)} \partial_{\nu} h_{\sigma|\alpha(n)}^n + \\ &+ \frac{i\varepsilon m}{2} \sum_{n=1}^N a_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n-1)\beta} e_{\nu|\beta}^{\gamma} h_{\sigma|\alpha(n-1)\gamma}^n + \\ &+ im \sum_{n=3}^N b_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n-2)}^{n-2} + \\ &+ im \sum_{n=1}^{N-2} \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} e^{\mu|\alpha(2)} h_{\mu|}^n \alpha^{(n)}, \end{aligned} \quad (18)$$

и суммирование выполняется по нечетным n . Фермионные поля h_{μ}^n и λ^n действительные, коэффициенты a_n, b_n вещественны, $\xi_n = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Уравнения связей имеют вид

$$e^{\mu|}_{\alpha(2)} h_{\mu|\alpha(n)}^n = 0, \quad n = 1, \dots, N-2. \quad (19)$$

Уравнения движения аналогичны уравнениям движения для бозонных полей:

$$\begin{aligned} \xi_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_{\nu} h_{\sigma|\alpha(n)}^n + \varepsilon m a_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}^{\beta} h_{\sigma|\alpha(n-1)\beta}^n + (1 - \delta_{n,1}) m b_n \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n-2)}^{n-2} - \\ - (1 - \delta_{n,N}) m b_{n+2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|}^{\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n+2)}^{n+2} - (1 - \delta_{n,N}) m e^{\mu|\alpha(2)} \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Как и в бозонном случае, возьмем дивергенцию левой части (20) по ∂_{μ} и исключим производные всех функций h_{σ}^n с помощью (20). В возникающих уравнениях при фиксированном n коэффициенты перед h_{σ}^{n+4} и h_{σ}^{n-4} тождественно равны нулю, а слагаемое с h_{σ}^{n-2} равно нулю в силу уравнений связей (19)³⁾, в результате чего после некоторых

³⁾ Слагаемое с h_{σ}^{n-2} исчезает и без использования уравнений связей, поскольку коэффициент перед h_{σ}^{n-2} равен нулю одновременно с равенством нулю коэффициента перед h_{σ}^{n+2} .

преобразований приходим к следующему:

$$\begin{aligned} & \varepsilon b_3 \left(\xi_1 a_1 - \frac{5}{3} \xi_3 a_3 \right) e^{\sigma|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(3)}^3 + \\ & + \left(2\xi_1 a_1^2 - \frac{4}{3} \xi_3 b_3^2 \right) e^{\sigma|_{\alpha}{}^{\beta}} h_{\sigma|\beta}^1 - \frac{1}{m} e^{\mu|\alpha(2)} \partial_{\mu} \lambda_{\alpha(3)}^3 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon b_{n+2} \left(\xi_n a_n - \frac{n+4}{n+2} \xi_{n+2} a_{n+2} \right) e^{\sigma|\alpha(2)} h_{\sigma|\alpha(n+2)}^{n+2} + \\ & + \left(\frac{2}{n} \xi_n a_n^2 + 2\xi_{n-2} b_n^2 - \frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \xi_{n+2} b_{n+2}^2 \right) e^{\sigma|_{\alpha}{}^{\beta}} h_{\sigma|\alpha(n-1)\beta}^n - \\ & - 2\xi_{n-2} b_n \lambda_{\alpha(n)}^n - \frac{1}{m} (1 - \delta_{n,N}) e^{\mu|\alpha(2)} \partial_{\mu} \lambda_{\alpha(n+2)}^{n+2} = 0, \quad 3 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (22)$$

Как и в бозонном случае, по определению $b_{N+2} = 0$. Потребуем, чтобы в уравнении (21) обращался в нуль коэффициент перед h_{σ}^3 , а в уравнениях (22) – коэффициенты перед h_{σ}^{n+2} и h_{σ}^n :

$$\begin{aligned} & \xi_n a_n - \frac{n+4}{n+2} \xi_{n+2} a_{n+2} = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ & \frac{1}{n} \xi_n a_n^2 + \xi_{n-2} b_n^2 - \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \xi_{n+2} b_{n+2}^2 = 0, \quad 3 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям бозонного случая и имеют те же решения. Примем нормировку $a_N = (-1)^{(N+1)/2}$. Кроме того, в разделе 5 будет показано, что условие положительности энергии и нормы состояний требует $\xi_N = (-1)^{(N+1)/2}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \xi_n = (-1)^{(n+1)/2}, \quad a_n = (-1)^{(n+1)/2} \frac{N+2}{n+2}, \\ & b_n = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2} \sqrt{\frac{(N+2)^2 - n^2}{n(n+1)}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, как и в бозонном случае, из уравнений (22) следует, что все лагранжевы множители λ^n равны нулю, а уравнение (21) принимает вид

$$e^{\mu|_{\alpha}{}^{\beta}} h_{\mu|\beta}^1 = 0. \quad (24)$$

Обратимся к уравнениям для h_{μ}^n .

Пусть $N = 1$. В этом случае лагранжевы множители отсутствуют, а $h_{\mu|\alpha}^1$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_{\nu} h_{\sigma|\alpha}^1 + \varepsilon m \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}{}^{\beta} h_{\sigma|\beta}^1 = 0.$$

Это уравнение и его следствие (24) эквивалентны уравнениям (4), (5).

Пусть $N \geq 3$. Из уравнения связи (19) при $n = 1$ и уравнения (24) следует $h_{\mu|\alpha}^1 = 0$. Далее, как и в бозонном случае, убеждаемся, что $h_{\mu}^n = 0$, $3 \leq n \leq N - 2$. Уравнения

движения (20) при $n = N - 2$ дают для h_μ^N условие (14), эквивалентное (4), а те же уравнения (20) при $n = N$ дают

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(N)}^N + \varepsilon m \varepsilon^{\mu\nu\sigma} e_{\nu|\alpha}{}^\beta h_{\sigma|\alpha(N-1)\beta}^N = 0, \quad (25)$$

откуда следует, что h_μ^N удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона с массой m и описывает спин $\varepsilon(N + 2)/2$.

Отметим, что если факторы i и ε включить в определение коэффициентов ξ_n , a_n и b_n , то параметры бозонного и фермионного действий могут быть записаны едиными формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_n &= \zeta_n \xi, & \tilde{a}_n &= \zeta_n \theta \frac{N+2}{n+2}, & \tilde{b}_n &= \frac{\zeta_n}{2} \sqrt{\frac{(N+2)^2 - n^2}{n(n+1)}}, \\ \zeta_n &= (-1)^{(n+2)/2} = \exp\left(i\pi \frac{n+2}{2}\right), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{a}_n = i\varepsilon a_n, \quad \tilde{\xi}_n = i\xi_n, \quad \tilde{b}_n = ib_n$$

в фермионном случае и

$$\tilde{a}_n = a_n, \quad \tilde{\xi}_n = \xi_n, \quad \tilde{b}_n = b_n$$

в бозонном.

5. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

В этом разделе будут рассмотрены ограничения на параметры модели, следующие из условия положительности энергии и нормы состояний. Как мы видели выше, на уравнениях движения поля h_μ^n , $n < N$, все лагранжевы множители λ^n и некоторые компоненты поля h_μ^N равны нулю. Это означает, что в теории имеются связи. Поскольку теория не вырождена (нет калибровочной симметрии), связи могут быть только второго рода. Как показано в [21], связи второго рода можно подставлять в исходное действие, в результате чего возникает эквивалентная теория. Мы воспользуемся этим обстоятельством. Кроме того, в силу лоренц-инвариантности для наших целей достаточно рассмотреть компоненты h_μ^N при нулевом импульсе (в системе покоя). Уравнения движения (15), (25) с учетом связей (14) (или эквивалентно (16)) дают при $\mu = 0$

$$h_{0|\alpha(N)}^N = 0. \quad (26)$$

Введем поле $(1/2)e_{\alpha_1\alpha_2}^\mu h_{\mu|\alpha_3\dots\alpha_{N+2}}^N \equiv \tilde{h}_{\alpha(N+2)}^{N+2}$, которое симметрично по всем $N+2$ спинорным индексам в силу условия (14) (или эквивалентно (4)). Уравнение (26) означает, что поле $\tilde{h}^{N+2}$ бесследово (используется реализация матриц e_μ , в которой $e_{0|\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$):

$$\tilde{h}_{11\alpha(N)}^{N+2} + \tilde{h}_{22\alpha(N)}^{N+2} = 0.$$

Таким образом, $\tilde{h}^{N+2}$ имеет всего две независимые компоненты:

$$\tilde{h}_{1\dots 1}^{N+2} \equiv 2^{-(N+2)/2} q_1, \quad \tilde{h}_{21\dots 1}^{N+2} \equiv 2^{-(N+2)/2} q_2.$$

Выразим действия (6) и (18) через переменные q_1 и q_2 , пользуясь соотношением

$$h_{\mu|\alpha(N)}^N = e_{\mu|}^{\alpha(2)} \tilde{h}_{\alpha(N+2)}^{N+2}.$$

Бозонный случай. Используя равенства $\xi_N = (-1)^{(N+2)/2} \xi$ и $a_N = (-1)^{(N+2)/2} \theta$, после несложных преобразований получаем

$$S_B = \xi q_2 \dot{q}_1 - \frac{\theta m}{2} (q_1^2 + q_2^2).$$

Из этого выражения видно, что ξ может иметь любой знак, в то время как θ должно быть положительным.

Фермионный случай. Возьмем $\xi_N = (-1)^{(N+1)/2} \xi$, $\xi = \pm 1$ и $a_N = (-1)^{(N+1)/2}$, тогда

$$S_\Phi = \frac{i\xi}{2} (q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2) - i\varepsilon m q_1 q_2.$$

Удобно перейти к новой комплексной переменной η :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 + i\xi\varepsilon q_2), \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \eta^\dagger), \quad q_2 = \frac{\xi\varepsilon}{i\sqrt{2}} (\eta - \eta^\dagger),$$

в терминах которой действие выглядит следующим образом:

$$S_\Phi = \xi (i\eta^\dagger \dot{\eta} - m\eta^\dagger \eta).$$

Это выражение явно показывает, что ε может иметь любой знак, в то время как для ξ допустимо только одно значение $\xi = 1$.

6. КВАДРИРОВАНИЕ

Выше мы построили действия для неприводимых представлений $(2+1)$ -мерной группы Пуанкаре, которые в бозонном случае можно записать в виде

$$S_B = \frac{\xi}{2} \varphi D_N \varphi + \frac{1}{2} \varphi M_N \varphi,$$

а в фермионном случае — в виде

$$S_\Phi = \frac{i}{2} \psi D_N \psi + \frac{i\varepsilon}{2} \psi M_N \psi,$$

где φ (ψ) — набор всех полей h_μ^n , λ^n в бозонном (фермионном) случае, D_N — однородный симметричный (антисимметричный) дифференциальный оператор первого порядка, M_N — симметричная (антисимметричная) матрица, не содержащая производных. Матрица M_N обратима и в бозонном, и в фермионном случаях (в то время как оператор D_N необратим). Естественнo предположить, что операторы $D_N \pm M_N$ являются “квадратными корнями” из некоторого дифференциального оператора второго порядка, описывающего поле с двумя значениями спина, по крайней мере в бозонном случае. Как говорилось во введении, такие операторы естественнo возникают при редукции четырехмерных калибровочных действий.

Ниже будет построено действие для бозонов, имеющее второй порядок по производным и описывающее поля спинов $\pm s$, причем оператор второго порядка получается квадрированием оператора первого порядка. Начнем с действия

$$S = \frac{1}{2}\varphi(-D_N + M_N)R(D_N + M_N)\varphi = -\frac{1}{2}\varphi D_N R D_N \varphi + \frac{1}{2}\varphi M_N R M_N \varphi, \quad (27)$$

где R – неособенная симметричная матрица. Для того чтобы уравнения движения имели вид

$$(-D_N + M_N)R(D_N + M_N)\varphi = 0,$$

должно выполняться условие

$$M_N R D_N - D_N R M_N = 0. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае действие (27) описывает поля двух спинов $\pm(N+2)/2$. Условию (28) можно удовлетворить, выбирая матрицу R равной M_N^{-1} . Тогда действие (27) принимает вид

$$S = -\frac{1}{2}\varphi D_N M_N^{-1} D_N \varphi + \frac{1}{2}\varphi M_N \varphi, \quad (29)$$

и можно сказать, что операторы первого порядка в действии (6) (и (18)) получаются “извлечением квадратного корня” из оператора второго порядка в действии (29).

Эквивалентное действие получается, если ввести дополнительные поля ω того же типа, что и φ :

$$S' = \frac{1}{2}\varphi M_N \varphi + \frac{1}{2}\omega M_N \omega + \omega D_N \varphi.$$

Делая в этом действии замену

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

получаем

$$S' = \frac{1}{2}\varphi_1(D_N + M_N)\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2(-D_N + M_N)\varphi_2.$$

Таким образом, поле φ_1 описывает спин $(N+2)/2$, а поле φ_2 – спин $-(N+2)/2$.

Отметим, что в случае фермионов действие

$$S = -\frac{\xi}{2}\psi D_N M_N^{-1} D_N \psi + \frac{\xi}{2}\psi M_N \psi, \quad \xi = \pm 1,$$

являющееся аналогом бозонного действия (29), также описывает два спина $\pm(N+2)/2$. Однако при любом ξ оно неприемлемо по физическим соображениям. В этом легче всего убедиться, перейдя к эквивалентному действию

$$S' = \frac{\xi}{2}\psi M_N \psi + \frac{\xi}{2}\eta M_N \eta + \eta D_N \psi = \frac{\xi}{2}\psi_1(D_N + M_N)\psi_1 + \frac{\xi}{2}\psi_2(-D_N + M_N)\psi_2, \\ \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2).$$

Видно, что при любом ξ кинетический член одного из фермионов имеет неправильный знак.

Отметим, что столь простое разложение действия для двух поляризаций в сумму действий для независимых компонент оказывается возможным благодаря введению адекватного набора вспомогательных полей, найденных в настоящей работе. При этом поля ω (точнее их часть, ассоциированная с 1-формами $h_{\mu|\alpha(n)}^n$) могут трактоваться как аналог лоренцевой связности в триадной формулировке гравитации.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Описанные в работе динамические системы могут представлять интерес еще и потому, что они тесно связаны с уравнениями самодуальности в $2 + 2$ измерениях

$$\varepsilon_{\rho\mu}{}^{\nu\sigma} \partial_\nu h_{\sigma|\alpha(N)}^N = \partial_\rho h_{\mu|\alpha(N)}^N - \partial_\mu h_{\rho|\alpha(N)}^N, \quad (30)$$

которые переходят в (5) при “компактифицирующей” подстановке

$$h_{3|\alpha(N)}^N = 0, \quad \partial_3 h_{\mu|\alpha(N)}^N = \pm m h_{\mu|\alpha(N)}^N \quad (31)$$

в предположении, что 3-компоненты векторов соответствуют второму временному направлению. Аналогично евклидов вариант (5) может быть получен из евклидовой версии (30).

Отметим, что используемый в настоящей работе набор полей $h_{\mu|\alpha(n)}^n$ ($0 \leq n \leq N$) отвечает разложению полей $h_{\mu|\alpha(N/2)\dot{\alpha}(N/2)}^N$ (N четное) и $h_{\mu|\alpha((N+1)/2)\dot{\alpha}((N-1)/2)}^N$ (N нечетное), использовавшихся в [8] для описания четырехмерных безмассовых полей спина $s = N/2 + 1$, по неприводимым представлениям диагональной $(2 + 1)$ -мерной группы Лоренца, действующей одновременно на точечные и неточечные спинорные индексы. Любопытно также, что лагранжиан-множители $\lambda_{\mu|\alpha(n)}^n$ имеют ту же структуру по спинорным индексам ($N \geq n > 0$). Это наталкивает на мысль, что их можно попытаться отождествить с компонентой $(3 + 1)$ -мерного калибровочного поля вдоль “лишнего” времени при размерной редукции некоторой гипотетической самодуальной теории в $(2 + 2)$ -мерном пространстве-времени.

Самодуальные уравнения движения безмассовых полей произвольного спина при $D = 4$ могут быть сформулированы не только на линейном, но и на нелинейном уровне [22]. Недавно суперсимметричные самодуальные уравнения для полей произвольного спина изучались в [23]. В контексте полученных результатов было бы интересно вернуться к вопросу о возможности построения теории самодуальных полей произвольного спина в четырехмерной теории на уровне действия.

Также представляло бы интерес построение топологически массивного варианта $(2 + 1)$ -мерной теории массивных полей произвольного спина, обобщающего ранее полученные теории для $s = 1$ [13, 14], $s = 3/2$ [15], $s = 2$ [14] и $s = 5/2$ [19].

Авторы благодарны С. Ф. Прокушину за сотрудничество на ранней стадии работы при исследовании динамики спина 3. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 96-02-17314, INTAS, грант № 94-2317-ext, и организации NWO Голландии.

Список литературы

- [1] *M. Fierz, W. Pauli.* Proc. R. Soc. A. 1939. V. 173. P. 211.
- [2] *T. Curtright.* Phys. Lett. B. 1979. V. 85. P. 219; *C. S. Aulakh, I. G. Koh, S. Ouvry.* Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 284; *A. K. H. Bengtsson.* Phys. Lett. B. 1986. V. 182. P. 321; *J. M. F. Labastida.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 322. P. 185.
- [3] *W. Rarita, J. Schwinger.* Phys. Rev. 1941. V. 60. P. 61; *В. Л. Гинзбург.* ЖЭТФ. 1942. Т. 12. С. 460; *Е. С. Фрадкин.* ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 27, 211; *L. P. S. Singh, C. R. Hagen.* Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 898, 910.
- [4] *C. Aragone, S. Deser, Z. Yang.* Ann. Phys. 1987. V. 179. P. 76.
- [5] *C. Fronsdal.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3624; 1979. V. 20. P. 848.
- [6] *J. Fang, C. Fronsdal.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3630; 1980. V. 22. P. 1361.
- [7] *B. de Wit, D. Z. Freedman.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 358.
- [8] *М. А. Васильев.* ЯФ. 1980. Т. 32. С. 855.
- [9] *C. Aragone, S. Deser.* Nucl. Phys. B. 1980. V. 170. [FS1]. P. 329.
- [10] *B. Binengar.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 1511.
- [11] *F. Gliozzi, J. Sherk, D. Olive.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 122. P. 253; *J. Sherk.* Extended supersymmetry and extended supergravity theory. In: Recent Development in Gravitation. Eds M. Levy and S. Deser. N. Y.: Plenum Publ. Corp., 1979.
- [12] *P. K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Lett. B. 1984. V. 136. P. 38.
- [13] *W. Siegel.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 156. P. 135; *R. Jackiw, S. Templeton.* Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 2291.
- [14] *S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 372.
- [15] *S. Deser, J. H. Kay.* Phys. Lett. B. 1983. V. 120. P. 97.
- [16] *S. Deser.* Phys. Lett. B. 1984. V. 140. P. 321.
- [17] *C. Aragone, A. Khoudeir.* Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 141.
- [18] *C. Aragone, J. Stephany.* Class. Quantum. Gravit. 1984. V. 1. P. 265.
- [19] *C. Aragone, S. Deser.* Class. Quantum. Gravit. 1984. V. 1. P. 331.
- [20] *М. А. Васильев.* ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1784; *M. A. Vasiliev.* Fortschr. Phys. 1988. V. 35. P. 741.
- [21] *Д. М. Гитман, И. В. Тютин.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
- [22] *M. A. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 1992. V. 285. P. 225.
- [23] *Ch. Devchand, V. Ogievetsky.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 367. P. 140.

Поступила в редакцию 7.IV.1997 г.

М. А. Vasiliev, I. V. Tyutin

**LAGRANGIAN FORMULATION OF IRREDUCIBLE MASSIVE
FIELDS OF ARBITRARY SPIN IN $(2 + 1)$ -DIMENSIONS**

Lagrangian formulation of the free massive fields corresponding to irreducible representations of the Poincaré group of arbitrary integer and half-integer spins in three-dimensional space-time is presented. A relationship of the theory under consideration with the self-duality equations in four dimensions is discussed.